3 1761 07550547 9

COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

52374 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Par J. HAAG,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND

TOME I.

ALGÈBRE ET ANALYSE.

**UNIVERSITY OF TORONTO
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1914

415910
23.9.43

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

PRÉFACE.

L'Ouvrage dont ce Livre commence la publication est, comme son titre l'indique, l'exposé de cette partie si fondamentale des Mathématiques qu'on est convenu d'appeler les *Mathématiques spéciales*.

A de légères modifications près, c'est le cours que j'ai professé pendant deux ans (1907 et 1908) au lycée de Douai. Il contient donc le développement des diverses théories qui figurent actuellement aux programmes d'admission aux Écoles Polytechnique et Normale supérieure. Mais on y trouvera aussi quelques additions, que je considère comme très importantes pour les personnes qui veulent poursuivre leurs études mathématiques, et qui, cependant, ne sont plus enseignées nulle part, du moins officiellement.

Or, je me suis proposé d'écrire un Livre dont la complète assimilation permit au lecteur d'aborder avec fruit l'Enseignement supérieur des Mathématiques, lui évitant toutes ces hésitations, tous ces retours en arrière, que l'on constate chez les étudiants qui arrivent dans nos Facultés avec un bagage insuffisant.

A celui qui veut devenir mathématicien, je conseille donc l'étude approfondie de l'Ouvrage en entier, y compris les exercices, auxquels j'attache une importance capitale.

Les candidats aux grandes écoles, qui ne s'intéressent pas particulièrement aux Mathématiques, pourront laisser de côté ce qui n'est pas dans leur programme. Il en va d'une manière analogue pour les étudiants de *Mathématiques générales*, futurs physiciens ou ingénieurs. Entre autres choses, ils pourront se dispenser des passages en

petits caractères, qui ne sont pas nécessaires à la compréhension du reste de l'Ouvrage et ont généralement trait à des questions un peu difficiles.

Comme je l'ai dit plus haut, j'attache une grande importance aux exercices. Les uns sont résolus et doivent servir d'exemples au lecteur. Les autres lui sont proposés; il doit en traiter le plus grand nombre possible et en rédiger complètement quelques-uns. Il pourra laisser de côté ceux qui lui sembleront trop ardu, quitte à y revenir quand il sera devenu plus habile.

Les exercices sont divisés en Chapitres, qui correspondent à ceux du cours, *dont ils sont en quelque sorte inséparables*. Mon intention première avait d'ailleurs été de les placer immédiatement après les Chapitres auxquels ils se rapportent. Mais, M. Gauthier-Villars et moi avons, dans la suite, jugé préférable de faire deux volumes, un seul d'entre eux pouvant suffire à certaines personnes.

Il m'arrive, à certains endroits, pour éviter des longueurs ou des redites, de renvoyer le lecteur à un numéro ultérieur, ou même aux Tomes II et III. Cela peut sembler illogique. Qu'il me suffise de faire observer que les propriétés auxquelles je renvoie sont indépendantes de celles pour quoi elles me sont utiles, ce qui s'oppose à tout cercle vicieux.

Je conseillerai au lecteur qui ne connaîtrait encore des Mathématiques que les éléments, de ne lire cet Ouvrage que la plume à la main. Il pourra lui arriver en effet d'être contraint à écrire quelques calculs pour aller de l'avant. Qu'il se dise alors que le temps passé à élucider un point difficile n'est jamais du temps perdu. Un Livre de Mathématiques ne doit pas se lire comme un roman; plus il exige de travail et de réflexion, plus il est profitable.

J. HAAC.

COURS COMPLET

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

CHAPITRE I.

NOMBRES INCOMMENSURABLES. — RADICAUX; EXPOSANTS.

I. — NOMBRES INCOMMENSURABLES.

1. Définition du nombre incommensurable. — Il convient, avant d'aborder l'étude de l'Algèbre et de l'Analyse, de définir, d'une manière précise, le mot *nombre* dans son acception la plus générale.

Le lecteur possède la notion primordiale de *nombre entier* ou *naturel* et celle, qui en dérive, de *nombre fractionnaire*. Les nombres entiers et les nombres fractionnaires constituent les *nombres rationnels* ou *commensurables*. Il est indispensable de les compléter par une autre catégorie de nombres, qui sont les *nombres irrationnels* ou *incommensurables*. C'est de ces nombres que nous allons nous occuper tout d'abord dans le présent Chapitre.

Ils s'introduisent très naturellement dans la mesure de certaines grandeurs. Proposons-nous par exemple de mesurer le segment OA (*fig. 1*) en prenant le segment OU pour unité. Nous essayons d'abord

Fig. 1.

de recouvrir OA en juxtaposant plusieurs segments égaux à OU. Si cela est possible, la mesure de OA est un nombre entier. Sinon, nous partageons OU en q parties égales, telles que OU', et nous essayons de recouvrir OA en juxtaposant un certain nombre p de segments égaux à OU'. Si cela est possible, la mesure de OA est le nombre

fractionnaire $\frac{p}{q}$. Si, au contraire, on ne peut y arriver, si grande que soit la valeur donnée à q , on convient de dire que la mesure de OA est un *nombre incommensurable ou irrationnel*.

2. Coupure. — La définition concrète que nous venons de donner ne peut suffire aux analystes : c'est pourquoi ceux-ci se sont efforcés, depuis longtemps, de donner des nombres incommensurables une définition purement abstraite. Ils ont imaginé, dans ce but, bien des procédés : nous indiquerons seulement celui de la *coupure*.

Revenons au segment OA, supposé incommensurable avec OU. Soit x un nombre rationnel quelconque ; il est la mesure d'un certain segment OM évidemment différent de OA. Si le point M tombe à gauche de A, nous dirons que x appartient à la *première classe* ; s'il tombe à droite, x appartiendra à la *seconde classe*. Il est évident que *les nombres de la première classe sont tous plus petits que ceux de la seconde classe*. Toutes les fois que, par un procédé quelconque, on arrive à ranger *tous* les nombres commensurables en deux classes jouissant de cette propriété, on dit qu'on a *fait une coupure*.

En particulier, le seul fait de choisir un point A sur la demi-droite Ox donne naissance à une coupure. Mais, il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que la mesure a du segment OA est commensurable ou non. Dans le premier cas, le nombre a doit être rangé arbitrairement dans la première ou la seconde classe ⁽¹⁾ ; et alors on peut dire que dans la classe dont il fait partie, il y a un nombre rationnel plus grand ou plus petit que tous les autres.

Si, au contraire, a est incommensurable, il n'y a pas, dans la première classe, de nombre plus grand que tous les autres, ni, dans la seconde classe, de nombre plus petit que tous les autres ⁽²⁾.

Toutes les fois qu'une coupure possède ce caractère, on convient de dire qu'elle définit un nombre incommensurable. Dans le cas contraire, elle définit un nombre commensurable, qui est le plus

⁽¹⁾ On en fait quelquefois une troisième classe.

⁽²⁾ En effet, tout nombre x de la première classe, par exemple, est la mesure d'un segment OM < OA. Or, on peut toujours trouver une fraction de OU inférieure à MA ; il suffit de diviser OU en un nombre n suffisamment grand de parties égales. En ajoutant $\frac{1}{n}$ à x , on obtient alors un nombre rationnel de la première classe supérieure à x .

grand de tous les nombres de la première classe ou le plus petit de tous les nombres de la seconde classe.

3. Éclairons tout ceci d'un autre exemple. Soit un nombre rationnel N . Rangeons dans une première classe tous les nombres commensurables dont le carré est au plus égal à N et plaçons dans la seconde classe ceux dont le carré dépasse N . Nous faisons visiblement une coupure, car le carré d'un nombre croît en même temps que ce nombre.

Si N est le carré d'un nombre rationnel α , celui-ci appartient à la première classe, dont il est le plus grand; la coupure définit le nombre commensurable α . Sinon, je dis qu'il n'y a pas, dans la première classe, de nombre plus grand que tous les autres. En effet, soit x un nombre de cette classe; on a $x^2 < N$. Or, pour n entier suffisamment grand, on a $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < N$, car ceci revient à $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 2x\right) < N - x^2$, inégalité facile à vérifier ⁽¹⁾. Mais alors, $x + \frac{1}{n}$ appartient à la première classe et dépasse x . On verrait de même que dans la seconde classe il n'y a pas de nombre plus petit que tous les autres. Donc, notre coupure définit un nombre incommensurable, lequel est désigné, comme dans le cas où N est carré parfait, par le symbole $\sqrt{N}$.

4. *Remarque.* — Il arrive souvent que le procédé employé pour déterminer une coupure ne permet pas de reconnaître immédiatement si *tous* les nombres rationnels sont compris dans l'ensemble des deux classes. Voici une remarque qui, dans ce cas, peut être fort utile. *Si l'on peut trouver deux nombres, de classes différentes, aussi voisins l'un de l'autre qu'on le veut, il échappe au plus un nombre à la classification.* En effet, si deux nombres a et b n'appartenaient ni à la première, ni à la seconde classe, ils seraient tous deux supérieurs aux nombres de la première classe et inférieurs aux nombres de la seconde classe ⁽²⁾. Par suite, il ne serait pas possible

(1) Il suffit, par exemple, en supposant $n = 1$, de prendre

$$\frac{1}{n} (1 + 2x) < N - x^2, \text{ ou } n < \frac{1 + 2x}{N - x^2}.$$

(2) On suppose, bien entendu, que tout nombre inférieur à un nombre de la première classe est lui-même de la première classe et qu'il en va d'une manière analogue pour la seconde classe.

de trouver deux nombres de classes différentes dont la différence soit plus petite que $b - a$ ($b > a$), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si un seul nombre échappe à la classification, il est le nombre rationnel déterminé par la coupure. S'il n'en échappe aucun, celle-ci définit un nombre incommensurable.

5. **Valeur approchée d'un nombre irrationnel.** — Soit donné un nombre rationnel z . Considérons la suite $z, 2z, 3z, \dots, nz, \dots$. Si n est assez grand, nz peut dépasser tout nombre donné. Il suit de là qu'il y a certainement des nombres de la suite précédente dans la seconde classe de tout nombre incommensurable A . Soit $(p+1)z$ le plus petit d'entre eux; on l'appelle la *valeur approchée de A , à z près par excès*, tandis que pz en est la *valeur approchée à z près par défaut* (1). En prenant z suffisamment petit, on voit qu'on peut trouver des nombres de classes différentes aussi voisins l'un de l'autre qu'on le désire.

Dans le cas particulier où z est de la forme $\frac{1}{10^n}$, le nombre pz peut être représenté par un nombre décimal possédant n chiffres décimaux. Si l'on augmente la valeur de n , il faut ajouter, vers la droite, d'autres chiffres décimaux et cela sans modifier les précédents. Si n croît indéfiniment, on obtient un nombre décimal illimité qui constitue la *représentation décimale* de A (2).

6. **Égalité et inégalité des nombres définis par des coupures.** — Par définition, deux coupures définissent le même nombre si chaque classe est composée des mêmes nombres dans les deux coupures (3).

THÉORÈME. — *Pour que deux nombres A et B soient égaux, il*

(1) Ceci s'applique aussi au cas où A est rationnel; mais alors, celui-ci doit être rangé dans la première classe et peut coïncider avec pz , pour certaines valeurs de z .

(2) Un nombre rationnel peut aussi posséder une représentation décimale illimitée; mais alors on sait que les chiffres décimaux se reproduisent périodiquement à partir d'un certain rang, tandis qu'il n'en est pas de même pour le cas d'un nombre irrationnel.

(3) Ceci peut-être légèrement inexact si, les deux coupures déterminant un même nombre rationnel A , celui-ci est rangé dans la première classe pour la première coupure et dans la seconde classe pour la seconde coupure. On peut éviter cette difficulté en considérant trois classes, ou en convenant de ne jamais admettre dans la seconde classe un nombre plus petit que tous les autres.

faut et il suffit qu'ils aient même valeur approchée à z près par défaut pour une valeur de z pouvant être rendue aussi petite qu'on veut.

La condition est évidemment nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, montrons que, si elle est remplie, un nombre rationnel a ne peut appartenir, par exemple, à la première classe de A et à la seconde classe de B. S'il en était ainsi, on pourrait trouver β rationnel assez petit pour que $a - \beta$ appartînt à la seconde classe de B. Dès lors, pour $z < \beta$, la valeur approchée de A serait plus grande que $a - \beta$, tandis que celle de B serait inférieure à ce même nombre, ce qui contredit l'hypothèse.

Conséquemment, *deux nombres sont égaux s'ils ont même représentation décimale et réciproquement.*

Soient deux nombres inégaux A et B, représentés, comme au n° 1, par les points A et B de l'axe Ox. Ces points sont distincts et l'un d'eux se trouve nécessairement à droite de l'autre, soit par exemple A à droite de B. Le segment OA est plus grand que le segment OB. On dit alors que *le nombre A est plus grand que le nombre B*. Au contraire, B est plus petit que A.

Voyons comment on peut reconnaître ceci, d'une manière abstraite, au moyen des coupures définissant A et B. Il est manifeste que *tous les nombres de la seconde classe de A appartiennent à la seconde classe de B, tandis que ceux de la première classe de B appartiennent à la première classe de A*. Mais, *il y a une infinité de nombres qui appartiennent à la première classe de A et à la seconde classe de B*. (Ce sont les nombres rationnels représentés par les points de Ox compris entre A et B.) C'est ce dernier caractère qui permet de reconnaître que A est plus grand que B.

En particulier, il est évident que tout nombre irrationnel est plus grand que tout nombre de sa première classe et plus petit que tout nombre de sa seconde classe.

Il résulte aussi de la définition précédente que *si $A > B$ et $B > C$, on a $A > C$* . En effet, par hypothèse, on peut trouver une infinité de nombres a dans la première classe de A qui font en même temps partie de la seconde classe de B. Mais, la seconde classe de B est tout entière dans la seconde classe de C; donc, les nombres a sont aussi dans cette dernière; ce qui est le caractère de l'inégalité $A > C$.

7. Nombres négatifs. — Jusqu'à présent, il n'a été question que de nombres arithmétiques ou positifs. Mais on peut tout aussi bien définir des nombres incommensurables négatifs. Ils correspondent, sur $x'Ox$, à des points situés à gauche de O . Avec cette extension, la première classe d'un nombre positif doit être complétée par tous les nombres rationnels négatifs et la seconde classe d'un nombre négatif par tous les nombres rationnels positifs.

Deux nombres A et B sont dits *symétriques* ou *opposés*, si les points homologues de $x'x$ sont symétriques par rapport à O . On écrit alors $A = -B$, $B = -A$.

La totalité des nombres commensurables et incommensurables, positifs et négatifs constitue, avec le nombre zéro, les *nombres relatifs*. Il nous reste maintenant à définir les opérations élémentaires qu'on peut effectuer sur ces nombres.

8. Addition et soustraction des nombres incommensurables. — Soient deux nombres relatifs A et B . Désignons par a et b des nombres rationnels quelconques appartenant à leurs premières classes respectives et par a' et b' des nombres appartenant aux secondes classes. Nous allons faire une coupure en rangeant dans une première classe tous les nombres inférieurs ou égaux aux sommes de la forme $a + b$ et dans une seconde classe tous les nombres supérieurs ou égaux aux sommes de la forme $a' + b'$. En vertu du n° 3, on peut rendre a et a' , b et b' et par suite $a + b$ et $a' + b'$ aussi voisins qu'on le veut; d'où il résulte (n° 4) que notre classification ne laisse échapper qu'un nombre au plus et constitue bien une coupure. Le nombre (rationnel ou non) déterminé par cette coupure est, par définition, la somme $A + B$.

On peut définir d'une manière analogue la somme de n nombres ou bien procéder de proche en proche en additionnant les deux premiers termes de la somme, puis ajoutant le troisième au résultat obtenu et ainsi de suite. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'identité des deux définitions et d'étendre aux nombres incommensurables les propriétés élémentaires de l'addition.

Retraire un nombre B d'un nombre A , c'est, par définition, chercher un nombre x tel qu'on ait $B + x = A$. Pour l'obtenir, il suffit d'ajouter à A le nombre $(-B)$, car il est aisé de vérifier que les deux nombres incommensurables symétriques B et $(-B)$ ont une

somme nulle, et l'on a, d'autre part,

$$\begin{aligned} B + [A + (-B)] &= B + A + (-B) = A + B + (-B) \\ &= A + [B + (-B)] = A + 0 = A. \end{aligned}$$

9. Multiplication et division des nombres incommensurables. — Soient d'abord deux nombres positifs A et B. Limitons, comme nous l'avons fait au début, leurs premières classes aux nombres rationnels positifs. En conservant les notations du numéro précédent, rangeons dans une première classe tous les nombres inférieurs ou égaux aux produits de la forme ab et dans une seconde classe tous les nombres supérieurs ou égaux aux produits de la forme $a'b'$. La différence $a'b' - ab$ pouvant être rendue aussi petite qu'on veut, nous venons d'établir une coupure (n° 4). Le nombre (rationnel ou non) qui lui correspond est, par définition, le produit AB.

On définirait de même, ou bien de proche en proche, le produit de plusieurs nombres positifs.

Le produit de plusieurs nombres relatifs est obtenu, par définition, en multipliant les valeurs absolues de ces nombres et faisant précéder le résultat du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que le nombre des facteurs négatifs est pair ou impair.

Inverse d'un nombre. — Soit le nombre positif A, dont la première classe ne comprend que des nombres positifs. Rangeons dans une première classe tous les nombres de la forme $\frac{1}{a}$ et dans une seconde classe ceux de la forme $\frac{1}{a'}$. La coupure ainsi obtenue définit un nombre, incommensurable en même temps que A, qui est dit l'inverse de A et désigné par le symbole $\frac{1}{A}$. Il est aisé de vérifier l'identité $A\left(\frac{1}{A}\right) = 1$.

Si A est négatif, son inverse est, par définition, le nombre négatif $-\left(\frac{1}{-A}\right)$.

Diviser le nombre A par le nombre B c'est, par définition, trouver un nombre x tel qu'on ait $Bx = A$. Pour l'obtenir, il suffit de multiplier A par $\left(\frac{1}{B}\right)$, comme on le constate en faisant un raisonnement analogue à celui fait pour la soustraction.

Extension du calcul algébrique aux nombres irrationnels. — Les opérations élémentaires étant définies pour les nombres incommensurables et jouissant des mêmes propriétés fondamentales que pour les nombres commensurables, on peut étendre toutes les règles et propriétés du calcul algébrique à l'ensemble de tous les nombres relatifs. C'est là un fait que nous pouvons admettre sans peine et dont la démonstration serait d'ailleurs aisée, mais longue et fastidieuse.

10. Extension de la notion de coupure. — Toutes les fois que nous avons fait une coupure, elle n'a porté que sur les nombres rationnels. Néanmoins, il est utile, pour certaines questions, de donner à la notion de coupure un sens un peu plus large, en rangeant *tous* les nombres relatifs (ou seulement arithmétiques) en deux classes telles que tout nombre de la première soit plus petit que tout nombre de la seconde. Il est clair qu'on pratique ainsi du même coup une coupure dans les nombres commensurables et qu'on définit par conséquent un certain nombre A , rationnel ou non.

Mais si l'on admet l'extension ci-dessus, ce nombre doit être rangé dans l'une des deux classes, à moins qu'on ne lui fasse constituer, à lui seul, une troisième classe (¹).

II. — RADICAUX ET EXPOSANTS.

11. Radicaux. — Soient un nombre relatif quelconque a , commensurable ou non, et un nombre naturel m . On appelle *puissance $m^{\text{ième}}$* de a et l'on désigne par a^m le produit de m facteurs égaux à a .

Si m est impair, a^m a le signe de a ; si m est pair, a^m est toujours positif et égal à $(-a)^m$. Rappelons les identités suivantes, qui résultent immédiatement de la définition précédente et des propriétés

¹ Des que le lecteur se sera bien assimilé les notions que nous venons d'exposer, nous lui conseillons la lecture des paragraphes 1 et 3 du Chapitre I (p. 1 à 35, 52 à 54) de l'ouvrage suivant : *Leçons d'Algèbre et d'Analyse*, par J. TANNERY (Gauthier Villars, 1906). Il y trouvera des explications très claires et très détaillées sur la théorie des nombres incommensurables, qui lui permettront peut être de préciser dans son esprit les quelques points qui pourraient encore lui paraître obscurs.

Nous aurons encore l'occasion de citer le Livre ci-dessus; nous le désignerons dorénavant par la rubrique *Leçons*.

de commutativité et d'associativité de la multiplication

$$(1) \quad a^m a^p = a^{m+p},$$

$$(2) \quad \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \quad (m > p),$$

$$(3) \quad (a^m)^p = (a^p)^m = a^{mp},$$

$$(4) \quad a_1^m a_2^m \dots a_p^m = (a_1 a_2 \dots a_p)^m.$$

Enfin, remarquons encore que, les nombres a et b étant supposés positifs, l'inégalité $a > b$ entraîne $a^m > b^m$, quel que soit m .

Cela posé, nous allons définir la *racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique du nombre positif a* ⁽¹⁾, soit $\sqrt[m]{a}$. Mettons dans une première classe tous les nombres arithmétiques dont la puissance $m^{\text{ième}}$ est inférieure ou égale à a et dans une seconde classe tous ceux qui ont une puissance $m^{\text{ième}}$ supérieure à a . Nous faisons ainsi une coupure, car, en vertu de la remarque ci-dessus, un nombre de la première classe ne saurait être plus grand qu'un nombre de la seconde classe. Cette coupure définit un nombre qui est, par définition, $\sqrt[m]{a}$. Il est rationnel (et appartient alors à la première classe) si a est la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre rationnel. Sinon, il est incommensurable.

THÉORÈME. — *Le seul nombre arithmétique dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit égale à a est $\Lambda = \sqrt[m]{a}$.*

Montrons d'abord que $\Lambda^m = a$. Soit x un nombre quelconque de la première classe de Λ^m : on peut trouver un nombre β de la première classe de Λ tel que $x \leq \beta^m$ (n° 9). Or $\beta^m \leq a$; donc $x \leq a$; autrement dit, x appartient à la première classe de a . On prouverait de même que tout nombre de la seconde classe de Λ^m fait partie de la seconde classe de a . Donc Λ^m et a sont égaux (n° 6).

Je dis maintenant qu'il n'y a pas d'autre nombre B dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit a . En effet, si $B > \Lambda$, on a $B^m > \Lambda^m = a$; si $B < \Lambda$, on a $B^m < \Lambda^m = a$.

COROLLAIRE. — *Pour montrer que deux nombres arithmétiques sont égaux, il suffit de prouver l'égalité de leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$.*

Nous ferons usage de cette remarque.

(1) Nous supposons dorénavant a positif, parce que la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre négatif n'existe pas toujours; il faut, en effet, que m soit impair. De même, dans ce Chapitre, nous donnerons aux radicaux leur signification arithmétique, sans nous occuper des racines négatives qui existent quand m est pair.

Identities. — On a les identités suivantes :

$$(5) \quad \sqrt[m]{a_1} \sqrt[m]{a_2} \dots \sqrt[m]{a_p} = \sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_p}.$$

$$(6) \quad (\sqrt[m]{a})^p = \sqrt[m]{a^p}.$$

$$(7) \quad \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[m \cdot p]{a}.$$

$$(8) \quad \sqrt[m \cdot p]{a^p} = \sqrt[m]{a}.$$

Pour démontrer la première, il suffit, conformément au corollaire précédent, d'élever les deux membres à la puissance m et de s'appuyer sur l'identité (1). Si l'on suppose ensuite $a_1 = a_2 = \dots = a_p = a$, on obtient l'identité (6) (1). L'identité (7) s'établit en élevant les deux membres à la puissance mp et s'appuyant, pour cela, sur l'identité (3). Enfin (8) résulte visiblement de (7).

12. Exposants fractionnaires. — Le calcul des radicaux devient identique au calcul des puissances, grâce à l'introduction des exposants fractionnaires.

Par définition, si p et q sont deux entiers positifs, on a

$$(9) \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Pour que cette convention soit acceptable, il faut prouver que si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, on a $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p'}{q'}}$. On peut évidemment se borner au cas où l'une des deux fractions est irréductible, soit par exemple $\frac{p}{q}$. On a alors $p' = \lambda p$, $q' = \lambda q$, λ désignant un certain nombre entier. D'où

$$a^{\frac{p'}{q'}} = \sqrt[q']{a^{p'}} = \sqrt[\lambda q]{a^{\lambda p}} = \sqrt[q]{\sqrt[\lambda]{a^{\lambda p}}} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Les exposants fractionnaires jouissent des mêmes propriétés que les exposants entiers. Étendons-leur d'abord les identités (1), (2), (3), (4).

$$(10) \quad a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{p'}{q}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{p'}{q}} = a^{\frac{pq' + qp'}{qq'}}.$$

ou

$$\sqrt[q]{a^p} \sqrt[q]{a^{p'}} = \sqrt[qq']{a^{pq' + qp'}}.$$

(1) On peut aussi l'établir en élevant ses deux membres à la puissance m et en se servant, pour le premier membre, de l'identité (1).

Pour démontrer cette identité, élevons-la à la puissance qq' . Le premier membre devient, d'après (4), (3) et (1),

$$(\sqrt[q]{a^p} \sqrt[q']{a^{p'}})^{qq'} = (\sqrt[q]{a^p})^{qq'} (\sqrt[q']{a^{p'}})^{qq'} = [\sqrt[q]{a^p}]^q [\sqrt[q']{a^{p'}}]^{q'} = a^{pq + p'q},$$

ce qui est bien la puissance qq' du second membre.

L'identité (2) étant une conséquence de (1), il est inutile de la démontrer à nouveau.

$$2^\circ \quad \left(\sqrt[q]{a^{\frac{p}{q}}} \right)^{\frac{p'}{q}} = a^{\frac{p}{q} \frac{p'}{q}} = a^{\frac{pp'}{q^2}},$$

ou

$$\sqrt[q]{\sqrt[q]{a^p}^{\frac{p'}{q}}} = \sqrt[q]{a^{\frac{pp'}{q}}},$$

Élevons à la puissance qq' , le second membre devient $a^{pp'}$; le premier devient successivement, d'après (3),

$$3^\circ \quad \begin{aligned} & (\sqrt[q]{a^p})^{p'q} = (a^p)^{p'} = a^{pp'}, \\ & a_1^{\frac{p}{q}} a_2^{\frac{p}{q}} \dots a_n^{\frac{p}{q}} = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

ou

$$\sqrt[q]{a_1^p} \sqrt[q]{a_2^p} \dots \sqrt[q]{a_n^p} = \sqrt[q]{(a_1 a_2 \dots a_n)^p}.$$

Or ceci résulte de (5) et (4).

13. Voici maintenant des théorèmes qui nous serviront plus tard.

THÉOREME I. — Si $a > 1$, on a $a^{\frac{p}{q}} > 1$; si $a < 1$, on a $a^{\frac{p}{q}} < 1$.

En effet, si dans la première hypothèse, par exemple, on avait $a^{\frac{p}{q}} = 1$, on en déduirait, en élevant à la $q^{\text{ième}}$ puissance, $a^{p'} = 1$, ce qui est contradictoire avec $a > 1$.

THÉOREME II. — Si $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q}$, on a $a^{\frac{p}{q}} > a^{\frac{p'}{q}}$ ou $a^{\frac{p}{q}} < a^{\frac{p'}{q}}$, suivant que $a > 1$ ou $a < 1$.

En effet, la première inégalité, par exemple, s'écrit

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p'}{q}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{p'}{q}} > 1,$$

ce qui résulte du théorème I.

THÉOREME III. — *Étant donné un nombre fixe a et un nombre positif ε aussi petit qu'on veut, on peut toujours déterminer η tel que l'inégalité $\frac{p}{a^\eta} < \varepsilon$ entraîne*

$$\left| \frac{p}{a^\eta} - 1 \right| < \varepsilon.$$

En effet, supposons d'abord $a > 1$. L'inégalité à vérifier s'écrit

$$\frac{p}{a^\eta} < 1 + \varepsilon.$$

D'après le théorème II, il suffit de prendre η sous la forme $\frac{1}{n}$, n étant un nombre entier tel qu'on ait

$$\frac{1}{a^n} < 1 + \varepsilon,$$

ou

$$a < (1 + \varepsilon)^n.$$

Or la formule du binôme (n° 25) montre immédiatement qu'on a (1)

$$(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon.$$

Il suffit donc de prendre

$$1 + n\varepsilon > a$$

ou

$$n > \frac{a-1}{\varepsilon},$$

ce qui est toujours possible.

Si $a < 1$, il faut vérifier l'inégalité

$$1 - \frac{p}{a^\eta} < \varepsilon$$

ou, en divisant par a^η ,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^\eta - 1 < \frac{\varepsilon}{\frac{p}{a^\eta}},$$

ce qui est entraîné par

$$\left(\frac{1}{a}\right)^\eta - 1 < \varepsilon.$$

On est donc ramené au cas précédent.

(1) On peut aussi établir cette inégalité *par voie de récurrence*, c'est-à-dire montrer que, si elle est vraie pour n , elle est vraie pour $n+1$.

THÉORÈME IV. — *Étant donné un nombre positif z aussi petit qu'on veut et un nombre positif N aussi grand qu'on veut, on peut toujours trouver τ_1 tel que les inégalités $\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} < \tau_1$, $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} < N$ entraînent*

$$\left| a^{\frac{p'}{q'}} - a^{\frac{p}{q}} \right| < \varepsilon.$$

En effet, cette inégalité s'écrit

$$\left| a^{\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Si $a < 1$, elle est entraînée par

$$1 - a^{\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}} < \varepsilon,$$

laquelle résulte du théorème III.

Si $a > 1$, et si N' désigne un nombre rationnel quelconque plus grand que N , elle est entraînée par

$$a^{\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{N'}} = \varepsilon',$$

laquelle résulte encore du théorème III ⁽¹⁾.

14. Exposants incommensurables. — Soient z un nombre incommensurable et a un nombre positif plus grand que *un*. Il s'agit de définir a^z . A cet effet, désignons par $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ deux nombres rationnels quelconques appartenant respectivement à la première et à la seconde classe de z . Rangeons dans une première classe tous les nombres de la forme $a^{\frac{p}{q}}$ et les nombres plus petits et, dans une seconde classe, tous les nombres de la forme $a^{\frac{p'}{q'}}$ et les nombres plus grands. Les premiers sont plus petits que les seconds, en vertu du théorème II du numéro précédent. En outre, on peut trouver deux nombres de

---

(1) On peut remarquer que le nombre τ_1 ne dépend que de z lorsque a est > 1 . Au contraire, si $a < 1$, il dépend de z et N .

classes différentes aussi voisins qu'on le veut; cela résulte, en effet, du théorème IV, puisque $\frac{p'}{q} - \frac{p}{q}$ peut être diminué à volonté et qu'on peut toujours supposer que $\frac{p'}{q}$ reste inférieur à un certain nombre N de la seconde classe de α . Nous venons donc de faire une coupure (au sens du n° 10) et, par suite, de déterminer un nombre qui est, par définition, α^α .

Si $\alpha < 1$, on procède de la même manière, avec cette seule différence qu'il faut intervertir les rôles de $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q}$. Quant au symbole 1^α , il est égal à 1, quel que soit α .

Les exposants incommensurables jouissent des mêmes propriétés que les exposants commensurables. C'est ainsi que l'identité (1), démontrée pour m et p rationnels, est encore vraie pour m et p irrationnels.

Supposons d'abord $\alpha > 1$. Si A est un nombre de la première classe du produit $a^m a^p$, on peut trouver deux nombres X et Y , appartenant respectivement aux premières classes de a^m et a^p , tels que l'on ait $A < XY$ (n° 9). D'autre part, d'après la définition de a^m , on peut trouver un nombre rationnel μ dans la première classe de m tel que $X < a^\mu$. On a, de même, $Y < a^\pi$, π étant un nombre rationnel de la première classe de p . On en déduit $XY < a^\mu a^\pi = a^{\mu+\pi}$, puisque μ et π sont rationnels. Comme $A < XY$, on a, *a fortiori*, $A < a^{\mu+\pi}$. Il en résulte que A appartient à la première classe de a^{m+p} , parce que $\mu + \pi$ appartient à la première classe de $m + p$ (n° 8).

On prouverait de même que tout nombre de la seconde classe de $a^m a^p$ appartient à la seconde classe de a^{m+p} . Donc $a^m a^p = a^{m+p}$ (n° 6).

Pour $\alpha < 1$, démonstration analogue.

L'identité (2) est également vraie pour m et p irrationnels, puisque c'est une conséquence de (1).

On pourrait maintenant faire l'extension des identités (3) et (4), ainsi que des théorèmes du n° 13. Mais cela nous sera beaucoup plus facile au Chapitre VI, auquel nous renvoyons maintenant le lecteur (nos 80 à 82).

15. Exposants négatifs et nul. — *Si x est un nombre positif quelconque, le symbole a^{-x} représente, par définition, la quantité $\frac{1}{a^x}$. Le symbole a^0 représente l'unité.*

Les exposants négatifs et nul jouissent des mêmes propriétés que les exposants positifs.

1° On a, quels que soient x et y ,

$$(10) \quad a^x a^y = a^{x+y}.$$

Cela a été prouvé pour x et y positifs. Supposons maintenant $x > 0$ et $y < 0$, soit $y = -y'$ ($y' > 0$). L'égalité (10) devient

$$\frac{a^x}{a^{y'}} = a^{x-y'}.$$

Ceci est l'identité (2) si $x > y'$. Si $x < y'$, cela revient à

$$\frac{a^y}{a^x} = a^{y-x},$$

ce qui est encore l'identité (2). Enfin, si $x = y'$, cela résulte de la définition de a^0 .

Soit maintenant $x = -x'$, $y = -y'$ ($x' > 0$, $y' > 0$). L'égalité s'écrit

$$\frac{1}{a^{x'}} \frac{1}{a^{y'}} = \frac{1}{a^{x'+y'}},$$

ce qui résulte de l'identité (10) établie pour x et y positifs.

L'identité (2) n'est plus maintenant à distinguer de (1), puisqu'elle s'écrit

$$a^m a^{-p} = a^{m-p}.$$

$$2^\circ \quad (11) \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad (x \text{ et } y \text{ rationnels}).$$

Si $x > 0$ et $y = -y' < 0$, il faut prouver que

$$\frac{1}{(a^{x'})^{y'}} = \frac{1}{a^{x'y'}},$$

ce que nous savons être vrai.

Si $x = -x' < 0$ et $y > 0$, il faut prouver que

$$\left(\frac{1}{a^{x'}} \right)^y = \frac{1}{a^{x'y}},$$

ce qui résulte de ce que $\left(\frac{1}{a^{x'}} \right)^y = \frac{1}{(a^{x'})^y}$.

Enfin, si $x = -x' < 0$ et $y = -y' < 0$, le premier membre de (11)

s'écrit successivement, en s'appuyant sur le cas précédent,

$$\frac{1}{(a^{x'})^{\beta}} = \frac{1}{(a^{-x'})^{\beta}} = \frac{1}{a^{-x'\beta}} = a^{x'\beta} = a^{x\beta}.$$

Quant à l'identité (4'), son extension pour $m < 0$ saute aux yeux.

Enfin, nous verrons au Chapitre VI (nos 80 et 82) ce que deviennent les théorèmes I, II, III, IV.

CHAPITRE II.

ANALYSE COMBINATOIRE. — FORMULE DU BINÔME.

16. Permutations. — Considérons m objets distincts, dont nous n'avons pas besoin de préciser la nature, et qui seront seulement supposés tels qu'on sache les distinguer les uns des autres. Nous les représenterons, par exemple, par des lettres, ou bien par les numéros $1, 2, 3, \dots, m$.

Cela posé, imaginons qu'on range les lettres représentatives $a, b, c, \dots, l$ sur une ligne horizontale, et cela *dans un ordre déterminé*. Nous dirons que nous avons formé une *permutation* de nos m lettres, ou des m objets correspondants. Il est clair que, dès que m est plus grand que 1, on peut former, de cette manière, plusieurs permutations différant entre elles par l'ordre des lettres. Si nous écrivons les unes au-dessous des autres toutes les permutations possibles, chacune d'elles n'étant écrite qu'une fois, nous dirons que nous avons construit *le tableau des permutations* des m lettres. Voici, à titre d'exemple, le tableau des permutations des trois lettres a, b, c :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} c, \ a, \ b, \\ a, \ c, \ b, \\ a, \ b, \ c, \\ c, \ b, \ a, \\ b, \ c, \ a, \\ b, \ a, \ c. \end{array} \right.$$

17. Règle de formation du tableau des permutations. — Voyons comment on peut former le tableau T_m des permutations de m lettres $a, b, c, \dots, h, l$. Dans ce but, nous allons employer une *méthode de récurrence* et déduire T_m du tableau T_{m-1} des m lettres $a, b, \dots, h$. De chaque permutation (p) de T_{m-1} , nous pouvons déduire m permutations distinctes de T_m en écrivant successivement la lettre l à

gauche de la première lettre de (p) , puis entre la première et la deuxième, puis entre la deuxième et la troisième, etc., et enfin à droite de la dernière. Si nous faisons de même pour toutes les permutations de T_{m-1} , je dis que nous obtenons le tableau T_m . En effet :

1^o Nous n'avons obtenu que des permutations de T_m ;

2^o Toutes les permutations obtenues sont différentes, car deux quelconques d'entre elles diffèrent soit par l'ordre relatif des lettres $a, b, \dots, l$ [si elles proviennent de deux permutations (p) différentes], soit par la position de l vis-à-vis de celles-ci [si elles proviennent de la même permutation (p)];

3^o Toute permutation (p') de T_m a été obtenue, car, en y supprimant la lettre l , on obtient une permutation (p) de T_{m-1} , dont on a forcément déduit (p') , d'après la façon même dont il a été procédé.

Maintenant que nous savons déduire T_m de T_{m-1} , nous n'avons plus qu'à partir de T_1 , lequel se compose de l'unique permutation a ; nous en déduirons T_2 , puis T_3 , puis T_4 , et ainsi de suite, de proche en proche, jusqu'à T_m . C'est au moyen de cette règle que le tableau (1) a été déduit de T_2 .

18. Nombre des permutations de m lettres. — Dans de nombreuses questions d'Algèbre et d'Analyse, on voit intervenir le nombre des permutations du tableau T_m . Ce nombre, qu'on désigne ordinairement par le symbole P_m , se déduit immédiatement de la règle de formation ci-dessus. Celle-ci montre, en effet, de façon claire, qu'entre P_m et P_{m-1} on a la *relation de récurrence*

$$(2) \quad P_m = m P_{m-1}.$$

Cette relation étant linéaire et homogène, on en déduit, conformément à une méthode générale (Note I),

$$(3) \quad P_m = 1.2.3 \dots (m-1).m = m!$$

Ce produit des m premiers nombres entiers se désigne souvent par la notation $m!$, qui s'énonce *factorielle m*.

19. Arrangements. — Reprenons nos m lettres $a, b, c, \dots, l$. Choisissons au hasard p ($p \leq m$) d'entre elles et écrivons-les sur une ligne horizontale, *dans un ordre déterminé*. Nous dirons que nous avons formé un *arrangement de nos m lettres p à p* . Si nous écri-

vons les uns au-dessous des autres tous les arrangements qu'on peut ainsi obtenir, chacun d'eux n'étant écrit qu'une fois ⁽¹⁾, nous construisons le *tableau des arrangements* des m lettres p à p . Voici, à titre d'exemple, le tableau des arrangements des trois lettres a, b, c , prises deux à deux, écrit sur une ligne horizontale, de gauche à droite, pour tenir moins de place :

$$(4) \quad ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

20. Règle de formation du tableau des arrangements. — Soit à construire le tableau T_m^p des arrangements des m lettres $a, b, \dots, l$, prises p à p . Employons encore la méthode de récurrence. Supposons formé le tableau T_m^{p-1} relatif aux mêmes lettres prises $p-1$ à $p-1$. De chaque arrangement (a) de T_m^{p-1} , nous pouvons déduire $m-(p-1)$ arrangements distincts de T_m^p en écrivant successivement à droite de (a) chacune des lettres qui n'y figurent pas. Si nous faisons de même pour tous les arrangements de T_m^{p-1} , je dis que nous construisons T_m^p . En effet :

1° Nous n'obtenons que des arrangements de T_m^p ;

2° Tous les arrangements formés sont différents, car deux quelconques d'entre eux se distinguent par la nature ou l'ordre des $p-1$ premières lettres, ou bien par la nature de la $p^{\text{ième}}$;

3° Tout arrangement (a') de T_m^p a été obtenu, car, en y supprimant la dernière lettre, on obtient un arrangement (a) de T_m^{p-1} , dont on a forcément déduit (a') .

Si maintenant nous partons de T_m^1 , lequel se compose des m arrangements $a, b, c, \dots, l$, nous pourrions former, de proche en proche, $T_m^2, T_m^3, \dots, T_m^p, \dots, T_m^m$. Il est clair d'ailleurs que le dernier tableau, T_m^m , n'est autre que celui des permutations des m lettres données. Le tableau (4) a été construit d'après la règle ci-dessus.

21. Nombre des arrangements de m lettres p à p . — Ce nombre est désigné par Λ_m^p . D'après ce qui précède, il est clair qu'on a la relation de récurrence, linéaire et homogène,

$$(5) \quad \Lambda_m^p = (m - p + 1) \Lambda_m^{p-1};$$

---

(1) Deux arrangements du tableau doivent différer, soit par la nature, soit par l'ordre des lettres qui les constituent.

d'où l'on déduit (Note I)

$$(6) \quad A_m^p = m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1).$$

22. Combinaisons. — Considérons toujours les mêmes lettres $a, b, \dots, l$. Choisissons encore au hasard p ($p \leq m$) d'entre elles et écrivons-les sur une ligne horizontale, dans un ordre quelconque. Nous obtenons une *combinaison de nos m lettres p à p* . Il est clair que tout arrangement donne une combinaison. Mais, tandis que deux arrangements constitués par les mêmes lettres peuvent être différents (si ces lettres n'y sont pas rangées dans le même ordre), nous *conviendrons* au contraire de *regarder comme identiques deux combinaisons comprenant les mêmes lettres*, quand même celles-ci seraient rangées différemment dans les deux combinaisons. On voit donc que le caractère essentiel d'une combinaison est que *l'ordre des lettres qui y figurent est indifférent*. Au lieu de les écrire sur une ligne horizontale, comme nous l'avons supposé, on peut les écrire sur une feuille de papier suivant une disposition quelconque. On peut aussi prendre des caractères d'imprimerie et mettre dans un sac ceux qui correspondent à une même combinaison, ou encore procéder de cette manière pour les objets représentés par les lettres. Si nous écrivons les unes au-dessous des autres toutes les combinaisons des m lettres $a, b, \dots, l$ prises p à p , chacune d'elles n'étant écrite qu'une fois, nous construirons le *tableau des combinaisons*. Voici, par exemple, le tableau des combinaisons des trois lettres a, b, c deux à deux :

$$(7) \quad ab, \quad ac, \quad bc.$$

23. Formation du tableau des combinaisons. — On peut d'abord remarquer que, pour former le tableau Θ_m^p des combinaisons des m lettres $a, b, \dots, l$ prises p à p , on pourrait construire le tableau T_m^p des arrangements, puis supprimer dans celui-ci tout arrangement constitué par les mêmes lettres qu'un autre arrangement non supprimé. Les arrangements qui resteraient donneraient le tableau Θ_m^p cherché. Mais il est clair que ce procédé exigerait des opérations inutiles. Il est plus simple de procéder directement comme il suit.

Remarquons d'abord qu'on peut, dans chaque combinaison, écrire les lettres dans un ordre arbitrairement fixé, par exemple dans l'ordre

alphabétique. Ou bien, s'il s'agit de numéros, on peut ranger ceux-ci par ordre de grandeur croissante. Plaçons-nous, par exemple, dans cette dernière hypothèse.

Procédons encore par récurrence. Supposons formé le tableau Θ_m^{p-1} des combinaisons des m premiers nombres entiers $p-1$ à $p-1$, celles-ci étant écrites comme il vient d'être expliqué. A droite de chacune d'elles écrivons successivement tous les nombres inférieurs à $m+1$ et supérieurs au dernier nombre λ de la combinaison considérée. Je dis que nous obtenons Θ_m^p . En effet :

- 1° Nous n'obtenons que des combinaisons de Θ_m^p ;
- 2° Nous n'avons formé que des combinaisons différentes, ainsi que le lecteur s'en rendra compte aisément;
- 3° Toute combinaison (c') de Θ_m^p a été obtenue, car si l'on y supprime le dernier nombre λ' , on obtient une combinaison de Θ_m^{p-1} , ne comprenant que des nombres plus petits que λ' . Mais il est clair qu'on a pris tout à l'heure cette combinaison et qu'on lui a ajouté en particulier le nombre λ' , formant ainsi (c').

Le tableau Θ_m^1 est évident; on en déduira de proche en proche Θ_m^2 , Θ_m^3 , ..., Θ_m^p , ..., Θ_m^m . Le tableau (γ) a été construit d'après la règle ci-dessus.

24. Nombre des combinaisons. — Ce nombre, qu'on représente par C_m^p , se déduit de la comparaison des tableaux T_m^p et Θ_m^p . Toute combinaison de Θ_m^p se trouve répétée $p!$ fois dans T_m^p , car les arrangements qui contiennent p lettres déterminées ne sont autres que les permutations de ces p lettres. On a donc ⁽¹⁾

$$(8) \quad C_m^p = \frac{A_m^p}{p!} = \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{p!}.$$

On arrive au même résultat en remarquant que la lettre a figure $\frac{p}{m} C_m^p$ fois dans le tableau Θ_m^p , puisque celui-ci contient en tout $p C_m^p$ lettres et que chaque lettre s'y trouve le même nombre de fois. D'autre part, si l'on retranche a des combinaisons qui la contiennent,

⁽¹⁾ C_m^p étant évidemment entier, on a ce théorème d'Arithmétique : *Le produit de p nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des p premiers nombres entiers.*

on obtient le tableau Θ_{m-1}^{p-1} relatif aux lettres $b, c, \dots, l$. On a donc la relation de récurrence

$$(9) \quad C_m^p = \frac{m}{p} C_{m-1}^{p-1}.$$

D'une façon générale,

$$C_{m-q}^{p-q} = \frac{m-q}{p-q} C_{m-q-1}^{p-q-1}.$$

De cette formule, on déduit aisément (8), en se ramenant au calcul direct de C_{m-p+1}^1 , qui est évidemment égal à $m-p+1$.

THÉORÈME. — *On a*

$$(10) \quad C_m^p = C_m^{m-p}.$$

En effet, multiplions les deux termes de C_m^p par $(m-p)!$; il vient

$$(11) \quad C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!},$$

d'où résulte immédiatement la formule à démontrer.

On peut aussi remarquer que les tableaux Θ_m^p et Θ_m^{m-p} renferment le même nombre de combinaisons, car on peut établir entre eux une *correspondance parfaite* ⁽¹⁾, en associant les combinaisons dont la réunion reproduit les m nombres 1, 2, ..., m ⁽²⁾.

THÉORÈME. — *On a*

$$(12) \quad C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}.$$

Le lecteur vérifiera cette formule au moyen de (8) ou de (11). Il pourra aussi raisonner comme il suit :

Partageons Θ_m^p en deux tableaux partiels T et T' composés, le premier, des combinaisons ne contenant pas a ; le second, des combinaisons qui renferment au contraire cette lettre. Il est visible que T

(1) Étant donnés deux ensembles E et E' constitués par des éléments quelconques, on dit qu'ils sont en *correspondance parfaite*, si, par un moyen quelconque, on associe à chaque élément de E un élément déterminé et unique de E', et si, inversement, à tout élément de E' on fait correspondre un élément de E et un seul.

(2) Cette remarque s'applique également à la formation du tableau Θ_m^p , que l'on ramène à la formation, plus simple, du tableau Θ_m^{m-p} dès que $p > \frac{m}{2}$.

n'est autre que le tableau des C_{m-1}^p combinaisons des lettres $b, c, \dots, l$ prises p à p . D'autre part, nous avons vu tout à l'heure que T' contenait C_{m-1}^{p-1} combinaisons. La conclusion saute aux yeux.

25. Formule du binôme. — La formule du *binôme de Newton* est une application directe de la théorie des combinaisons. Elle a pour but de développer $(x+a)^m$ suivant les puissances décroissantes de x , en supposant que m est un nombre entier positif.

Plus généralement, proposons-nous de développer de cette manière le produit

$$P = (x+a)(x+b)\dots(x+l),$$

où $a, b, \dots, l$ sont m nombres donnés, que nous supposerons d'abord distincts. On sait que pour faire le produit de plusieurs sommes, on doit additionner tous les produits partiels obtenus en prenant, de toutes les manières possibles, un terme et un seul dans chaque somme, et multipliant les termes ainsi choisis. Si nous appliquons cette règle à P , nous voyons que tout produit partiel contenant x^{m-p} en facteur proviendra du choix du terme x dans $m-p$ des binômes donnés et du terme constant dans les p binômes restants. Si, dans tous les termes analogues, on met x^{m-p} en facteur, le coefficient de x^{m-p} sera la *somme S_p des produits p à p des m nombres $a, b, \dots, l$* . Il est clair, d'ailleurs, que, pour avoir celle-ci, il suffit d'écrire le tableau des combinaisons p à p de ces m nombres distincts, de faire le produit des nombres qui figurent dans chaque combinaison et d'ajouter tous les résultats obtenus.

Nous pouvons maintenant écrire le développement demandé sous la forme

$$(13) \quad P = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \dots + S_p x^{m-p} + \dots + S_{m-1} x + S_m.$$

Supposons à présent que les m nombres $a, b, \dots, l$ deviennent égaux au premier d'entre eux. La formule précédente subsistera toujours; mais, à la limite, tous les termes de S_p par exemple seront égaux à a^p . Comme ils étaient au nombre de C_m^p , on voit que S_p deviendra égal à $C_m^p a^p$. On a donc

$$(14) \quad (x+a)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} a + C_m^2 x^{m-2} a^2 + \dots + C_m^p x^{m-p} a^p + \dots + C_m^m a^m.$$

Telle est la *formule du binôme de Newton*, ou simplement *formule du binôme*.

Remarques. — I. Étant donné que les deux lettres x et a jouent dans la formule (14) des rôles identiques, on est en droit d'affirmer que *les coefficients numériques équidistants des extrêmes sont égaux*; ceci revient d'ailleurs à la formule (10) établie plus haut.

Lorsque, dans le calcul du développement, on est arrivé au milieu, les coefficients suivants se déduisent des premiers par symétrie.

II. La comparaison de deux termes consécutifs $C_m^{p-1} x^{m-p+1} a^{p-1}$ et $C_m^p x^{m-p} a^p$ nous montre, grâce à la formule $C_m^p = C_m^{p-1} \frac{m-p+1}{p}$, que l'on passe d'un terme au suivant en diminuant d'une unité l'exposant de x , augmentant d'une unité celui de a , multipliant le coefficient par l'exposant de x dans le terme que l'on quitte et le divisant par l'exposant de a dans le terme auquel on arrive.

Cette règle est assez pratique quand on a affaire à des puissances élevées.

Elle nous renseigne aussi sur la *loi de croissance des coefficients*. Ceux-ci croissent tant que l'exposant de x dépasse de plus d'une unité celui de a . Si m est pair, il y a un terme du milieu, dans lequel les deux exposants sont égaux et dont le coefficient est le plus élevé. Si m est impair, il y a deux termes du milieu, dans lesquels les exposants de x et de a diffèrent d'une unité et dont les coefficients sont égaux entre eux et supérieurs à tous les autres.

III. Il est bon de connaître par cœur les développements suivants, qui sont d'un usage courant :

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2,$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = x^3 + a^3 + 3ax(x + a),$$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4.$$

26. Carré et cube d'un polynôme. — On peut se proposer de généraliser la formule du binôme en cherchant à développer la puissance $m^{\text{ième}}$ d'une somme d'un nombre quelconque de termes. Il existe une formule générale résolvant cette question ⁽¹⁾, mais, elle n'est d'un emploi courant que pour $m = 2$ et 3 ; aussi nous bornerons-nous à l'établir dans ces deux cas.

⁽¹⁾ Voir, par exemple, pour le cas d'un trinôme, *Leçons* (n° 48).

Soit d'abord à développer

$$(15) \quad (a + b + \dots + l)^2 = \overset{\text{A}}{\underbrace{(a + b + \dots + l)}_{\text{A}}} \overset{\text{B}}{\underbrace{(a + b + \dots + l)}_{\text{B}}}.$$

Nous avons d'abord les termes $a^2 + b^2 + c^2 + \dots + l^2$, obtenus en multipliant deux termes de même rang dans les deux facteurs.

Si maintenant nous multiplions le premier terme de A par le deuxième terme de B, nous trouvons le produit partiel ab . Mais nous y arrivons aussi en multipliant le second terme de A par le premier terme de B. Donc ab est répété deux fois dans le développement. On raisonnerait de même pour les autres termes de même forme ⁽¹⁾ et l'on peut écrire la formule

$$(16) \quad (a + b + c + \dots + l)^2 = \Sigma a^2 + 2 \Sigma ab \quad (2).$$

Développons maintenant

$$(17) \quad (a + b + c + \dots + l)^3 = \underbrace{(a + b + c + \dots + l)}_{\text{A}} \underbrace{(a + b + c + \dots + l)}_{\text{B}} \underbrace{(a + b + c + \dots + l)}_{\text{C}}.$$

Si nous prenons, pour former des produits partiels, des termes de même rang dans les trois facteurs, nous obtenons $a^3 + b^3 + \dots + l^3 = \Sigma a^3$,

Choisissons maintenant a dans deux des facteurs et b dans le troisième; comme cela peut se faire de trois manières différentes, on obtient $3a^2b$. Si l'on ajoute tous les produits analogues ⁽³⁾, on obtient $3\Sigma a^2b$.

⁽¹⁾ On les appelle quelquefois les *termes rectangles*.

⁽²⁾ Le signe Σ , qui s'énonce *sigma de* ou *somme de*, indique qu'il faut faire la somme de tous les termes qui se déduisent de a^2 ou de ab , en remplaçant, de toutes les manières possibles, la lettre a ou les lettres a et b , par les différentes lettres $a, b, c, \dots, l$.

⁽³⁾ Il faut, pour les former, écrire le tableau des arrangements des lettres $a, b, \dots, l$ deux à deux. Il est à remarquer, en effet, que les arrangements ab et ba , par exemple, donnent bien des termes différents, car a^2b n'est pas égal à b^2a .

Considérons enfin les produits partiels de la forme abc ⁽¹⁾. A chaque manière d'obtenir celui-ci correspond une permutation des trois lettres a , b , c , et réciproquement, ainsi qu'on le voit en écrivant chaque fois au-dessous de chaque facteur la lettre qu'on y prend. Il y a donc six termes égaux à abc , et l'on a finalement

$$(18) \quad (a + b + \dots + l)^3 = \Sigma a^3 + 3 \Sigma a^2 b + 6 \Sigma abc.$$

⁽¹⁾ On les déduit du tableau des combinaisons trois à trois. Deux produits ne sont en effet distincts que si les lettres qui y figurent ne sont pas les mêmes.

CHAPITRE III.

NOMBRES COMPLEXES.

---

27. Définition et but des nombres complexes. — On appelle *nombre complexe* ou *imaginaire* une expression de la forme $a + bi$, dans laquelle a et b sont deux nombres relatifs ordinaires ou *nombres réels*, et i un symbole dont nous préciserons le rôle dans la suite, mais qui, pour l'instant, doit être regardé comme un signe accolé au nombre b pour le distinguer de a ⁽¹⁾. Le signe $+$ n'a également (du moins jusqu'à nouvel ordre) aucune signification et le nombre complexe $a + bi$ doit être simplement regardé comme un groupe de deux nombres relatifs que l'on veut introduire simultanément dans les calculs, mais en leur faisant jouer un rôle différent.

On convient de certaines règles pour étendre aux nombres complexes les opérations auxquelles peuvent être soumis les nombres ordinaires. Ces règles sont choisies de telle manière que les propositions fondamentales du calcul algébrique ne cessent pas d'être vraies. Une suite quelconque d'opérations effectuées sur n nombres complexes équivaut à une suite d'opérations effectuées sur $2n$ nombres ordinaires, ceux-ci étant d'ailleurs partagés en deux classes distinctes, à savoir les nombres a et les nombres b .

On conçoit qu'il puisse résulter de là une simplification, tout au moins au point de vue de la forme, pour certains calculs algébriques de quantités réelles.

En Analyse, on peut de même considérer la *variable complexe* $z = x + yi$, où x et y désignent deux variables indépendantes, au sens ordinaire du mot (n° 56), et introduire des fonctions de cette variable. Cela revient à introduire simultanément deux catégories de fonctions de x et y (n° 127) : et toute proposition sur les fonctions d'une variable complexe se traduit par une proposition sur

---

(1) On écrit indifféremment $a + bi$ ou $a + ib$.

certaines fonctions de deux variables réelles. On conçoit tout l'avantage qui peut découler de semblables considérations.

Enfin, un autre but, non moins important, de la théorie des imaginaires consiste en la généralisation de certaines notions, qui, définies au moyen d'un ou de plusieurs nombres réels, cessent d'avoir un sens quand ces derniers ne satisfont plus à certaines conditions déterminées. Telle est, par exemple, la notion de racine d'une équation du second degré, à laquelle les nombres imaginaires doivent leur origine ⁽¹⁾.

28. Dans le cas où b est nul, on convient de confondre le symbole $a + bi$ avec le nombre réel a . C'est légitime, car nous verrons que les règles du calcul des nombres complexes se réduisent aux règles ordinaires de l'Algèbre, quand on suppose nuls les nombres b relatifs à tous les nombres imaginaires sur lesquels on opère (n° 30).

Lorsque a est nul, on dit qu'on a une *imaginaire pure*; on l'écrit simplement bi .

Dans $a + bi$, a est appelé la *partie réelle* et bi la *partie imaginaire*; on dit aussi que b est le *coefficient de i* , bien que cela n'ait aucun sens *a priori*, du moins pour le moment.

Un nombre complexe est *nul*, si l'on a à la fois $a = 0$, $b = 0$. Deux nombres complexes $a + bi$ et $a' + b'i$ sont *égaux* si $a = a'$, $b = b'$; *symétriques* ⁽²⁾ si $a = -a'$, $b = -b'$, et *imaginaires conjugués* si $a = a'$, $b = -a'$.

On appelle *module* du nombre complexe $c = a + bi$ le *nombre réel positif* $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$. On le représente ordinairement par le symbole $|a + bi|$. Dans le cas où b est nul, on retombe sur la *valeur absolue* de a . Une proposition évidente est la suivante :

Pour qu'un nombre imaginaire soit nul, il faut et il suffit que son module le soit.

29. **Représentation géométrique des nombres complexes.** — Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy . Considérons le point M qui a pour coordonnées a et b relativement à ces axes (*fig. 2*). Ce point

⁽¹⁾ Cf. *Leçons*, t. I, p. 201 et suiv.

⁽²⁾ On dit aussi quelquefois que l'un est égal à l'autre *change de signe*; mais cette expression est mauvaise, car un nombre complexe n'a pas de signe.

est dit le *point représentatif du nombre complexe c* , lequel est appelé l'*affixe* de M . La longueur OM est évidemment égale au

module ρ de c . L'angle ω de Ox avec OM est appelé l'*argument* de c . Il est défini à $2k\pi$ près, k désignant un nombre entier positif, négatif ou nul ⁽¹⁾; de sorte que, *pour que deux nombres complexes soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient même module et que leurs arguments diffèrent de $2k\pi$* .

On a manifestement

$$(1) \quad a = \rho \cos \omega, \quad b = \rho \sin \omega;$$

on déduit de là la *forme trigonométrique* du nombre c , à savoir :

$$(2) \quad c = \rho(\cos \omega + i \sin \omega).$$

ce qui doit être considéré comme une autre manière d'écrire simultanément les deux équations (1) ⁽²⁾.

Les nombres réels sont les affixes des points de Ox ; les points de Oy représentent les imaginaires pures. A deux nombres symétriques ou conjugués correspondent deux points symétriques par rapport à O ou Ox .

30. Règle générale de calcul des nombres complexes. — *Pour effectuer une suite quelconque d'additions, soustractions et multiplications sur des nombres complexes, on convient de regarder*

⁽¹⁾ Voir Tome II : *Géométrie analytique*. — On peut remarquer que ρ et ω sont les *coordonnées polaires* de M (*loc. cit.*).

⁽²⁾ Nous verrons tout à l'heure qu'on peut aussi considérer le second membre comme le produit du nombre réel ρ par le nombre imaginaire $\cos \omega + i \sin \omega$.

ceux-ci comme des binômes dans lesquels le symbole i serait une variable indépendante; on effectue sur ces binômes les opérations indiquées en suivant les règles ordinaires du calcul algébrique; on obtient ainsi un certain polynôme $f(i)$ relativement à la variable i . On calcule le reste de la division de ce polynôme par $i^2 + 1$; on obtient ainsi un binôme du premier degré $A + Bi$ (n° 201). Par définition, le nombre complexe $C = A + Bi$ est le résultat des opérations proposées.

Au point de vue pratique, il revient au même de remplacer, partout où cela est possible, i^2 par -1 , jusqu'à ce que i ne figure plus qu'au premier degré. En effet, supposons, d'une manière générale, que $f(i)$ se présente sous la forme $f(i) \equiv P(i) + i^2 Q(i)$, P et Q désignant deux polynômes quelconques en i . Je dis que le polynôme $f_1(i) \equiv P(i) - Q(i)$ donne le même reste de division par $i^2 + 1$ que $f(i)$. En effet, on a

$$f(i) - f_1(i) \equiv (i^2 + 1) Q(i),$$

ce qui justifie visiblement notre affirmation.

Dès lors, on voit qu'on peut, sans modifier le résultat final, remplacer, chaque fois que l'occasion se présente, i^2 par -1 dans $f(i)$; ce qui conduit en dernier lieu à un binôme du premier degré au plus. Or, ce binôme est à lui-même son propre reste de division par $i^2 + 1$; il constitue donc bien le nombre complexe $A + Bi$, résultat des opérations proposées.

Dans la pratique, on ne calcule jamais le polynôme $f(i)$. En effectuant les opérations indiquées, dès qu'on voit apparaître une puissance de i supérieure à la première on la remplace par -1 , $-i$, $+1$, $+i$, suivant que l'exposant est de la forme $4n - 2$, $4n - 1$, $4n$, $4n + 1$. Cela simplifie évidemment les calculs.

Remarques. — I. Si tous les nombres donnés sont réels, $f(i)$ se réduit à une constante, qui n'est autre que le résultat des opérations proposées effectuées sur ces nombres avec leur sens habituel. Le reste de division par $i^2 + 1$ se confond avec la même constante, ce qui justifie l'assertion émise au début du n° 28.

II. Si l'on remplace tous les nombres donnés par leurs conjugués, le polynôme $f(i)$ est remplacé par $f(-i)$. Le reste de divi-

sion $A + Bi$ est remplacé par $A - Bi$, comme on le voit en changeant i en $-i$ dans l'identité de la division. *Le résultat* des opérations est donc *transformé en son conjugué*.

Nous allons maintenant passer en revue les opérations élémentaires de l'Algèbre des nombres imaginaires, en nous servant du principe général qui vient d'être exposé ⁽¹⁾.

31. Addition. — On a évidemment

$$(3) \quad (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \dots + (a_n + b_n i) \\ = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) i.$$

En particulier, on voit qu'on peut maintenant attribuer un sens au signe $+$ dans l'expression $(a + bi)$, car cette imaginaire peut être considérée comme la somme du nombre réel a et de l'imaginaire pure bi .

Il saute aux yeux qu'on peut étendre au cas actuel les propriétés élémentaires de commutativité et d'associativité ⁽²⁾ de l'addition.

Représentation géométrique. — Soient (fig. 3) $M_1, M_2, \dots, M_n$ les points représentatifs des nombres complexes $c_1, c_2, \dots, c_n$ pré-

cédents et M le point représentatif de leur somme. En vertu de (3) et du théorème des projections, on a l'égalité géométrique suivante ⁽³⁾:

$$(4) \quad (OM) = (OM_1) + (OM_2) + \dots + (OM_n).$$

⁽¹⁾ On pourrait procéder en sens inverse, c'est-à-dire définir séparément chaque opération, pour en déduire, en dernier lieu, notre règle générale.

⁽²⁾ Une opération effectuée sur plusieurs nombres est dite *commutative* quand on peut, sans changer le résultat, modifier arbitrairement l'ordre de ces nombres. Elle est *associative* si l'on peut remplacer une partie quelconque d'entre eux par le résultat de la même opération effectuée sur cette partie.

⁽³⁾ Voir Tome II.

Par conséquent, pour avoir M , connaissant $M_1, M_2, \dots, M_n$, il suffit de construire le contour polygonal $OM_1P_2P_3\dots P_{n-1}P_n$, dont les côtés consécutifs sont équipollents à $(OM_1), (OM_2), \dots, (OM_n)$. L'extrémité P_n de ce contour est le point M cherché.

THÉORÈME I. — *Le module d'une somme est au plus égal à la somme des modules de ses différents termes.*

Cela revient, en effet, à dire que le segment de droite OM est, au plus égal, à la longueur du contour $OM_1P_2\dots P_n$. On peut aussi démontrer cette proposition par un calcul direct, en l'établissant d'abord pour $n = 2$ et employant ensuite la méthode de récurrence.

THÉORÈME II. — *Le module de la somme de deux nombres est au moins égal à la différence des modules de ces nombres.*

Cela équivaut à dire qu'un côté d'un triangle est au moins égal à la différence des deux autres côtés.

REMARQUE. — *Deux nombres symétriques ont une somme nulle; deux nombres imaginaires conjugués ont une somme réelle, qui est le double de leur partie réelle commune.*

32. Soustraction. — Retrancher $(a_1 + b_1i)$ de $(a_2 + b_2i)$, c'est trouver $(a + bi)$ tel que l'on ait

$$(a_2 + b_2i) = (a_1 + b_1i) + (a + bi) = (a_1 + a) + (b_1 + b)i.$$

On tire de là

$$a + bi = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i = (a_2 + b_2i) + (-a_1 - b_1i).$$

Donc, il suffit d'ajouter à c_2 le nombre symétrique de c_1 .

Géométriquement, on doit avoir (fig. 4)

$$(OM_2) = (OM_1) + (OM),$$

d'où

$$(5) \quad (OM) = (OM_2) - (OM_1) = (M_1M_2).$$

Donc, le module de $(c_2 - c_1)$ est égal à la distance M_1M_2 et l'argument est l'angle de Ox avec (M_1M_2) .

REMARQUE. — Deux nombres conjugués ont une différence imaginaire pure.

33. **Multiplication.** — Conformément à notre règle générale, on a, par exemple,

$$(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

En particulier,

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2;$$

le produit de deux nombres imaginaires conjugués est réel et égal au carré de leur module commun.

Le produit du nombre réel b par l'imaginaire pure i est l'imaginaire pure bi . On peut donc dorénavant considérer, dans $a + bi$, le terme bi comme le produit de b par i .

On pourrait calculer le produit de n facteurs⁽¹⁾, mais cela ne présente pas d'intérêt, du moins sous la forme précédente. On obtient, au contraire, des résultats élégants en prenant les facteurs sous la forme trigonométrique. Par exemple

$$\begin{aligned} (6) \quad & z_1(\cos \omega_1 + i \sin \omega_1) z_2(\cos \omega_2 + i \sin \omega_2) \\ &= z_1 z_2 [\cos \omega_1 \cos \omega_2 - \sin \omega_1 \sin \omega_2 + i(\sin \omega_1 \cos \omega_2 + \sin \omega_2 \cos \omega_1)] \\ &= z_1 z_2 [\cos(\omega_1 + \omega_2) + i \sin(\omega_1 + \omega_2)]. \end{aligned}$$

On conclut de là l'important théorème suivant :

THÉORÈME. — Le module et l'argument d'un produit sont respectivement égaux au produit des modules et à la somme des arguments des facteurs de ce produit.

(1) Le lecteur démontrera sans peine que l'opération est commutative, associative et distributive [c'est-à-dire que l'on a

$$c(c_1 + c_2 + \dots + c_n) = cc_1 + cc_2 + \dots + cc_n.$$

Ces deux propriétés sont mises en évidence par la formule (6), pour le cas de deux facteurs. Pour les étendre au cas d'un nombre quelconque de facteurs, il suffit d'appliquer la méthode de récurrence, ce qui n'offre pas l'ombre d'une difficulté.

COROLLAIRE. — *Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

On le voit en passant par les modules et utilisant, outre le théorème précédent, une remarque énoncée à la fin du n° 28.

Représentation géométrique. — Soient (fig. 5) les deux points M_1 et M_2 , dont les affixes sont c_1 et c_2 . Marquons sur Ox le point U

Fig. 5.

tel que $\overline{OU} = +1$. Construisons sur OM_2 un triangle OM_2M *directement semblable* à OUM_1 , le côté OM_2 devant être homologue de OU . Je dis que le point M a pour affixe le produit $c_1 c_2$.

En effet, il nous suffit, d'après le théorème énoncé plus haut, de prouver les deux égalités

$$OM = OM_1 \cdot OM_2, \quad \widehat{xOM} = \widehat{xOM_1} + \widehat{xOM_2}.$$

La seconde est évidente du fait de l'égalité des angles homologues $\widehat{xOM_1}$ et $\widehat{M_2OM}$ des deux triangles. Quant à la première, elle s'obtient en écrivant la proportionnalité des côtés homologues :

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{OM_2}{OU} = OM_2,$$

d'où

$$OM = OM_1 \cdot OM_2.$$

En répétant la construction précédente de proche en proche, on pourrait construire le point représentatif du produit d'un nombre quelconque de facteurs.

34. Division. — Étant donnés c_1 et c_2 , il faut trouver c tel que

$$c_2 = cc_1$$

ou

$$(a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i)(a + bi) = aa_1 - bb_1 + i(ab_1 + ba_1),$$

D'où les deux équations

$$aa_1 - bb_1 = a_2,$$

$$ab_1 + ba_1 = b_2,$$

qui donnent

$$(7) \quad a = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \quad b = \frac{b_2 a_1 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Donc, la division est toujours possible et admet une seule solution, à condition que le diviseur ne soit pas nul.

THÉORÈME. — *On ne change pas le quotient quand on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre complexe quelconque non nul.*

En effet, si l'on a $c_2 = cc_1$, on a aussi $(c_2 z) = c(c_1 z)$, quel que soit z ; de sorte que c est aussi bien le quotient de $c_2 z$ par $c_1 z$ que de c_2 par c_1 .

On déduit de ce théorème un *moyen rapide d'effectuer la division*; on écrit

$$(8) \quad \frac{a_2 + b_2 i}{a_1 + b_1 i} = \frac{(a_2 + b_2 i)(a_1 - b_1 i)}{a_1^2 + b_1^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} + i \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Fig. 6.

THÉORÈME. — *Le module d'un quotient est égal au module du dividende divisé par le module du diviseur; l'argument du quotient est égal à l'argument du dividende moins celui du diviseur.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de celui du n° 33.

Représentation géométrique. — Le point M s'obtient en construisant le triangle OM_2M *directement semblable* au triangle OM_1U ; mais, cette fois, OM_2 doit être l'homologue de OM_1 (*fig. 6*).

33. Puissances entières. — Pour élever une imaginaire à la puissance entière m , il est commode de la prendre sous la forme trigonométrique. Si l'on applique, en effet, le théorème du n° 33 au produit de m facteurs égaux, on a

$$(9) \quad [\rho(\cos \omega + i \sin \omega)]^m = \rho^m (\cos m\omega + i \sin m\omega).$$

En particulier, si $\rho = 1$, on a

$$(10) \quad (\cos \omega + i \sin \omega)^m = \cos m\omega + i \sin m\omega,$$

formule connue sous le nom de *formule de Moivre*.

Géométriquement, si l'on prend un point M_1 situé à la distance 1 de l'origine (*fig. 7*), les puissances entières successives de son affixe

sont représentées par les sommets du polygone régulier $UM_1M_2M_3, \dots$, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 ; la puissance $m^{\text{ième}}$ est représentée par le sommet M_m . Si l'on définit la puissance négative e^{-m} par $e^{-m} = \frac{1}{e^m}$, ce qui précède s'applique aussi bien aux puissances négatives et il suffit de continuer la ligne polygonale dans le sens négatif, à partir du point U , suivant $UM_{-1}M_{-2}, \dots$. Si l'on désigne, en outre, le point U par M_0 et si l'on convient que $e^0 = 1$, on voit que la puissance $m^{\text{ième}}$ de l'affixe de M_1 est représentée par M_m , et cela pour une valeur entière quelconque de m , positive, négative ou nulle.

Pour que le polygone se ferme et, par suite, pour que les puissances entières consécutives se reproduisent périodiquement à partir

d'une certaine valeur de l'exposant, il faut et il suffit que $\frac{\omega}{\pi}$ soit un nombre commensurable.

36. Racines. — Soient un nombre complexe C , de module R et d'argument α , et m un nombre naturel. On appelle *racine $m^{\text{ième}}$ de C* tout nombre c qui, élevé à la puissance m , reproduit C . On écrit

$$c = \sqrt[m]{C} = R^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\omega}{m}}.$$

Si ρ et ω sont le module et l'argument de c , ceux de C doivent être (n° 35) ρ^m et $m\omega$. On a donc (n° 29)

$$\rho^m = R, \quad m\omega = \alpha + 2k\pi,$$

k étant un entier positif, négatif ou nul. Toutes les racines de c sont donc données par les formules

$$(11) \quad \rho = R^{\frac{1}{m}}, \quad \omega = \frac{\alpha + 2k\pi}{m},$$

où l'on doit donner à k toutes les valeurs entières possibles.

On pourrait croire, à première vue, qu'il existe une infinité de racines correspondant aux différentes valeurs de k . Mais il n'en est rien, car, pour que les deux nombres k et k' donnent la même racine, il faut et il suffit qu'on ait (n° 29)

$$\frac{\alpha + 2k'\pi}{m} - \frac{\alpha + 2k\pi}{m} = 2k''\pi$$

ou

$$k' - k = k''m.$$

Il suit de là qu'il y a seulement m racines distinctes; on les obtient toutes en donnant à k m valeurs entières consécutives, par exemple $0, 1, 2, \dots, m-1$.

Représentation géométrique. — Nos m racines sont visiblement représentées par les sommets d'un polygone régulier convexe de m côtés, inscrit dans la circonférence de centre O et de rayon $R^{\frac{1}{m}}$; le premier sommet peut être pris à l'extrémité du rayon déduit de O par une rotation de l'angle $\frac{\alpha}{m}$.

Racines de l'unité. — Nous terminerons ce Chapitre en faisant connaître quelques propriétés classiques des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Leur étude est suffisamment justifiée par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *On obtient toutes les racines $m^{\text{ièmes}}$ d'un nombre en multipliant l'une d'elles par les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.*

En effet, nous aurons ces dernières en faisant $R = 1$, $\alpha = 0$ dans les formules (11), ce qui donne

$$(12) \quad \varphi' = 1, \quad \omega' = \frac{2k\pi}{m}.$$

Si l'on multiplie le nombre (φ', ω') par la racine $(\varphi_0 = R^{\frac{1}{m}}, \omega_0 = \frac{\alpha}{m})$, on obtient (n° 33)

$$\varphi = \varphi' \varphi_0 = R^{\frac{1}{m}}, \quad \omega = \omega' + \omega_0 = \frac{\alpha + 2k\pi}{m}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Représentation géométrique. — Les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les affixes des sommets du polygone régulier comme $M_0 M_1 M_2, \dots, M_{m-1} M_0$ (fig. 8).

Nous appellerons *rang d'une racine* l'indice du sommet M_k correspondant : c'est aussi celui des nombres $0, 1, 2, \dots, m-1$ par lequel il faut multiplier $\frac{2\pi}{m}$ pour obtenir l'argument de la racine considérée.

THÉORÈME. — *Si l'on élève une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité aux puissances entières successives $1, 2, 3, \dots$, on obtient encore des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, formant une suite périodique.*

En effet, si l'on part de la racine ω_k , de rang k , on obtient successivement les racines de rang $k, 2k, 3k, \dots$, car les points représentatifs des puissances entières de ω_k sont les sommets du polygone régulier de premier côté $M_0 M_k$ (n° 33). D'ailleurs, l'arc $M_0 M_k$ étant commensurable avec la circonfé-

rence, ce polygone se ferme nécessairement; par conséquent, la suite $\omega_k, \omega_{2k}, \dots$ est bien périodique. Le nombre de termes distincts de cette suite, c'est-à-dire le nombre des côtes du polygone, est manifestement le plus petit nombre entier p qui, multiplié par k , donne un multiple de m . Autrement dit pk doit être le plus petit commun multiple de k et de m ; par suite, p est le quotient de m par le plus grand commun diviseur de ces deux nombres. En particulier, pour que la suite comprenne toutes les racines mêmes, il faut et suffit que p soit égal à m et, par conséquent, que k soit premier avec m . On dit alors que ω_k est une racine primitive. Si m est un nombre premier, toutes les racines, sauf l'unité, sont primitives. D'après ce qui précède, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *On obtient toutes les racines en élevant une racine primitive à m puissances entières consécutives.*

C'est ainsi que si l'on appelle j une racine cubique imaginaire de l'unité, les trois racines sont j, j^2 et $j^3 = 1$.

CHAPITRE IV.

SÉRIES

I. — SUITES INFINIES. — LIMITES.

37. Imaginons qu'à chaque nombre naturel n , on fasse correspondre, au moyen d'une règle quelconque qu'il nous est inutile de préciser ⁽¹⁾, un nombre déterminé u_n ⁽²⁾. Nous obtenons ce qu'on appelle une *suite infinie* $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, dont u_n est dit le *terme général*, et que nous représenterons par le symbole (u_n) .

On dit que la suite (u_n) est *convergente* ou encore que son terme général tend vers une limite déterminée pour n infini, quand il existe un nombre fixe u jouissant de la propriété suivante :

Étant donné un nombre positif ε qu'on peut choisir aussi petit qu'on le veut, on peut lui faire correspondre un nombre naturel N tel que l'inégalité $n \geq N$ entraîne la suivante

$$|u_n - u| < \varepsilon.$$

Autrement dit, si petit que soit ε , u_n finit toujours par rester compris entre $u - \varepsilon$ et $u + \varepsilon$ ⁽³⁾. Le nombre u est appelé la *limite* de la suite ou du nombre variable u_n .

Si le nombre u n'existe pas, on dit que la suite est *divergente*. Ceci peut arriver de deux manières. Un premier cas est celui où le nombre u_n tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$. On dit, par exemple, que u_n tend vers $+\infty$, ou encore *augmente indéfiniment* par valeurs positives, si à tout nombre A , choisi à l'avance aussi grand qu'on le veut, on peut faire correspondre un nombre naturel N

---

(1) La plupart du temps, u_n se présentera pour nous sous la forme d'une certaine fonction algébrique ou transcendante (Chap. V) du nombre n .

(2) Ce nombre peut être réel ou imaginaire.

(3) Cette interprétation suppose u_n et u réels.

tel que l'inégalité $u > N$ entraîne $u_n > N - \epsilon$ (1). La limite $-\infty$ se définit d'une manière analogue.

Cette première espèce de divergence ressemble, à un certain point de vue, à la convergence, dont elle ne diffère qu'en ce que le *nombre fini* n est remplacé par ce qu'on pourrait appeler *l'un des deux nombres* $+\infty$ et $-\infty$, en réservant ici pour le mot *nombre* un sens purement conventionnel défini par ce qui précède. La divergence est tout autre lorsque u_n oscille, au contraire, infiniment sans tendre vers aucune limite finie ou infinie.

38. Voici maintenant quelques théorèmes classiques, et tout à fait intuitifs sur les suites infinies ou, si l'on veut, sur les limites.

THÉOREME I. — *La limite d'une somme est égale à la somme des limites de ses termes.*

D'une façon précise, soient les deux suites convergentes (u_n) et (v_n) , de limites respectives u et v ; je dis que la suite (w_n) , de terme général $w_n = u_n + v_n$, est convergente et admet pour limite $u + v$. En effet, étant donné le nombre ϵ , nous pouvons trouver N (2), tel que $n \geq N$ entraîne à la fois

$$(1) \quad |u_n - u| < \epsilon \quad \text{et} \quad |v_n - v| < \epsilon;$$

d'où, en s'appuyant sur le théorème I du n° 31,

$$(2) \quad |(u_n + v_n) - (u + v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| = |u_n - u| + |v_n - v| < 2\epsilon.$$

Comme ϵ peut être diminué à volonté, il en est de même de 2ϵ et le théorème est démontré.

On l'étendra, soit directement, soit par récurrence, à une somme comprenant un nombre quelconque fini de termes.

COROLLAIRE. — *Si la suite (u_n) est convergente et la suite (v_n) divergente, la suite $(u_n + v_n)$ est divergente.*

(1) Il revient au même de dire que $\frac{1}{u_n}$ tend vers zéro par valeurs positives, ou, comme nous écrirons quelquefois, vers 0 . De même, si u_n tend vers $-\infty$, $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0 .

(2) En réalité, nous avons un nombre N pour (u_n) et un nombre N' pour (v_n) ; mais il suffit de prendre pour N le plus grand de ces deux nombres.

Car, si elle était convergente, il en serait de même de la suite qui a pour terme général $(u_n + v_n) + (-u_n) = v_n$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

THÉORÈME II. — *La limite d'un produit est égale au produit des limites de ses facteurs.*

D'une façon précise, soient les deux suites convergentes (u_n) et (v_n) , de limites respectives u et v ; je dis que la suite de terme général $w_n = u_n v_n$ est convergente et admet pour limite $w = uv$. En effet, partons des inégalités (1), qui sont vérifiées dès que $n \geq N$. Si nous posons

$$u_n - u = x_n, \quad v_n - v = y_n,$$

nous avons

$$\begin{aligned} w_n - w &= u_n v_n - uv = x_n v + y_n u + x_n y_n, \\ (3) \quad |w_n - w| &= |x_n v| + |y_n u| + |x_n y_n| \\ &\leq \varepsilon |v| + \varepsilon |u| + \varepsilon^2 = \varepsilon(|u| + |v| + \varepsilon). \end{aligned}$$

Comme ε peut être diminué à volonté, il en est de même de $\varepsilon(|u| + |v| + \varepsilon)$ et le théorème est démontré.

On l'étendra au produit d'un nombre quelconque fini de facteurs.

THÉORÈME III. — *Si la suite (u_n) est convergente et a une limite non nulle, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est aussi convergente et a pour limite $\frac{1}{u}$.*

En effet, évaluons la différence $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u}$ en fonction de $u_n - u = x_n$; nous avons

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u} = \frac{-x_n}{u(u + x_n)}.$$

Or, étant donné un nombre positif ε , que nous astreignons à être plus petit que $\frac{|u|}{2}$, nous pouvons trouver N tel que, si $n \geq N$, on ait $|x_n| < \varepsilon < \frac{|u|}{2}$. Mais alors, on aura, *a fortiori*,

$$(4) \quad \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u} \right| = \frac{\varepsilon}{|u| |u + x_n|} = \frac{\varepsilon}{|u| (|u| - |x_n|)} \stackrel{(2)}{<} \frac{\varepsilon}{|u| \frac{|u|}{2}} = \frac{2\varepsilon}{|u|^2}.$$

(1) Les suites (u_n) et $(-u_n)$ sont évidemment convergentes ou divergentes en même temps.

(2) Cf. n° 31, théorème II.

Comme ε peut être diminué à volonté, il en est de même de $\frac{\varepsilon}{|u|}$ et le théorème est démontré.

Remarque. — Dans le cas où u est nul, la suite $\frac{1}{u_n}$ est divergente. Le lecteur prouvera aisément que si $u = +\infty$, $\frac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$; si $u = -\infty$, $\frac{1}{u_n}$ tend vers $-\infty$.

THÉORÈME IV. — *La limite d'un quotient dont le dénominateur ne tend pas vers zéro est égale au quotient des limites de ses termes.*

D'une façon précise, soient les deux suites convergentes (u_n) et (v_n) , de limites respectives u et v , v n'étant pas nul. La suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est convergente et admet pour limite $\frac{u}{v}$. Cela résulte, en effet, des deux théorèmes précédents, car on peut écrire $\frac{u_n}{v_n} = u_n \frac{1}{v_n}$.

COROLLAIRE. — *Si la suite (u_n) est convergente et a une limite non nulle et si la suite (v_n) est divergente, la suite $(u_n v_n)$ est également divergente.*

Car, si elle était convergente, il en serait de même de $\frac{u_n v_n}{u_n} = v_n$.

39. Plus grande et plus petite des limites. — Supposons que tous les termes de la suite (u_n) soient inférieurs à un certain nombre fixe A ⁽¹⁾. On dit alors que celle-ci est *bornée supérieurement*.

Nous plaçant dans cette hypothèse, rangeons dans une première classe tout nombre a qui peut être dépassé par des termes de la suite de rang aussi élevé qu'on le veut et, dans une deuxième classe, tout nombre a' tel qu'à partir d'un certain rang u_n reste inférieur à a' ⁽²⁾. Il est clair qu'aucun nombre n'échappe à la classification. En second lieu, a est forcément plus petit que a' : car, s'il était plus grand, il ne pourrait être dépassé par des termes de rang aussi élevé qu'on le voudrait, puisqu'à partir d'une certaine valeur de n , u_n reste inférieur à a' et, par suite, resterait plus petit que a .

Nous venons donc de faire une coupure (n° 10), qui définit un certain nombre U , qui est dit *la plus grande des limites* de la suite. On peut le

(1) On les suppose ici réels.

(2) Il existe certainement de tels nombres, par exemple tous les nombres supérieurs à A .

caractériser en disant que, *si petit que soit le nombre positif ε , u_n finit par rester inférieur à $U + \varepsilon$, et l'on peut trouver les valeurs de n aussi élevées qu'on veut telles que u_n dépasse $U - \varepsilon$.*

On définit d'une manière semblable *la plus petite des limites* d'une suite bornée inférieurement.

Une suite est dite *non décroissante*, si l'inégalité $n' > n$ entraîne la suivante $u_{n'} \geq u_n$. Si l'on a, au contraire, $u_{n'} \leq u_n$, la suite est dite *non croissante* ⁽¹⁾.

THÉOREME I. — *Si une suite non décroissante est bornée supérieurement, elle est convergente et admet pour limite sa plus grande des limites.*

En effet, si petit que soit ε , on peut trouver, d'après ce qui précède, au moins un terme u_N supérieur à $U - \varepsilon$. Mais alors, dès que $n \geq N$, on a $u_n - u_N > U - \varepsilon$. D'autre part, u_n est toujours $< U$, car si l'on trouvait un terme $u_{n'}$ égal à $U + h$ ($h > 0$), dès que n serait $\geq n'$, u_n serait $\geq U + h$ et, par suite, ne pourrait pas devenir et rester $< U + \varepsilon$, pour des valeurs de ε aussi petites qu'on le voudrait. Il suit bien de là que u_n admet pour limite U .

On a un théorème analogue pour les *suites non croissantes et bornées inférieurement*.

Nous terminerons ce qui est relatif aux suites infinies par l'énoncé du théorème suivant, dont on se sert trop peu souvent pour que nous en donnions la démonstration ⁽²⁾ :

THÉOREME II. — *Pour qu'une suite (u_n) soit convergente, il faut et il suffit qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un nombre naturel N tel que l'inégalité $n > N$ entraîne la suivante*

$$|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon,$$

et cela quel que soit p .

II. — SÉRIES A TERMES POSITIFS.

(1). Généralités. — Étant donnée une suite infinie (u_n) , on appelle *série* le symbole

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + \dots$$

⁽¹⁾ Il peut arriver que ces caractères ne se manifestent qu'à partir d'un certain rang; mais cela n'a aucune importance, car au point de vue de la convergence, on peut toujours supprimer d'une suite un nombre quelconque fini de termes.

⁽²⁾ Le lecteur la trouvera dans J. TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions*, 2^e édition (n^o 56).

Ce symbole n'a, *a priori*, aucun sens, puisque nous ne savons pas ce que c'est que la somme d'un nombre infini de nombres. On lui en donne un par la convention suivante :

Appelons S_n la somme des n premiers termes de la série. Si la suite (S_n) est convergente et a pour limite S , on dit que la série (u_n) est convergente et a pour somme S . Si, au contraire, la suite (S_n) est divergente, on dit aussi que la série (u_n) est divergente.

Reconnaître la nature d'une série, c'est pouvoir dire si elle est convergente ou divergente. Ceci est relativement facile dans le cas où la somme S_n peut se mettre sous la forme d'une fonction simple de n , dont on puisse chercher la limite pour n infini. Malheureusement, ce cas est l'exception; c'est pourquoi il a été nécessaire d'établir ce qu'on appelle des *règles, critères ou caractères de convergence*, lesquels permettent de reconnaître la nature de certaines séries.

Aucun critère n'est d'ailleurs absolument général, c'est-à-dire qu'il existe toujours des séries sur lesquelles il ne renseigne pas. Il y a toutefois exception pour le suivant :

THÉORÈME I. — *Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un nombre naturel N tel que la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs d'indices supérieurs à N soit, en valeur absolue, plus petite que ε .*

Cela résulte en effet du théorème II du n° 39. Il est du reste aisé de prouver que la condition est nécessaire. En effet, si la série (u_n) est convergente et a pour somme S , on peut, étant donné ε , trouver N tel que $n \geq N$ entraîne $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors, quel que soit le nombre positif p ,

$$|S_{n+p} - S_n| = |(S_{n+p} - S) - (S - S_n)| = |S_{n+p} - S| + |S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{C, Q, F, D.}$$

Pratiquement, ce théorème sert peu souvent pour établir la convergence d'une série, par suite même de sa généralité.

Par contre, en voici une conséquence d'application courante :

THÉORÈME II. — *Pour qu'une série soit convergente, il faut que son terme général tende vers zéro.*

Cela résulte de la démonstration précédente où l'on ferait $p = 1$.

Il suit de là que, *si l'on a reconnu que le terme général d'une série ne tend pas vers zéro, on peut affirmer que celle-ci est divergente*. Mais, il faudrait bien se garder de conclure à la convergence dans le cas contraire, car nous verrons de nombreux exemples de séries divergentes dont le terme général tend vers zéro.

11. Séries à termes positifs. — Nous commencerons par étudier une catégorie fort importante de séries, qu'on appelle *séries à termes positifs*. Comme leur nom l'indique, ce sont des séries dont tous les termes sont positifs. On peut y rattacher aussi les séries à termes négatifs et, plus généralement, celles dont le terme général finit, à partir d'un certain rang, par garder un signe constant ⁽¹⁾. Il est clair, en effet, qu'on peut toujours, par la suppression d'un nombre fini de termes (ce qui ne change pas la nature de la série) et, le cas échéant, par un changement de signe, se ramener à une série à termes tous positifs.

THÉORÈME. — *Si la somme des n premiers termes d'une série à termes positifs est bornée supérieurement, la série est convergente.*

Car la suite (S_n) est non décroissante et l'on peut appliquer le théorème I du n° 39.

COROLLAIRE. — *Si une série à termes positifs est divergente, S_n croît indéfiniment avec n .*

Les autres critères reposent tous sur la *comparaison des séries à termes positifs*.

12. Comparaison des séries à termes positifs. — **THÉORÈME I.** — *Soient deux séries à termes positifs (u_n) et (v_n) et un nombre positif a .*

1° *Si l'on a, à partir d'un certain rang, $u_n \leq av_n$ et si (v_n) converge, il en est de même de (u_n) .*

2° *Si l'on a, à partir d'un certain rang, $u_n \geq av_n$ et si (v_n) diverge, il en est de même de (u_n) .*

⁽¹⁾ On peut reconnaître ce caractère au moyen du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, qui doit finir par rester positif.

En effet, nous pouvons d'abord supposer, en vertu d'une remarque déjà faite, que ces caractères se manifestent dès le premier terme. Ceci étant, appelons U_n et V_n les sommes des n premiers termes des (u_n) et (v_n) respectivement.

1^o Si V est la somme de la série (v_n) , on a

$$U_n = aV_n \leq aV;$$

on est ramené au théorème du numéro précédent.

2^o On a

$$U_n = aV_n;$$

or V_n augmente indéfiniment (n^o 44); donc aussi U_n .

Application pratique. — Pratiquement, il est commode de chercher la limite du rapport $\frac{u_n}{v_n}$. Si cette limite λ existe et si elle n'est pas nulle, ni infinie, on peut affirmer que les deux séries sont de même nature. Le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ finit toujours, en effet, par rester compris, par exemple, entre $\lambda + \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2}$ et $\lambda - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$; dès lors, si (v_n) converge, on applique (1^o) en prenant $a = \frac{3\lambda}{2}$; si (v_n) diverge, on applique (2^o) en prenant $a = \frac{\lambda}{2}$.

Si $\lambda = 0$, on n'est renseigné que si (v_n) est convergente : (u_n) l'est aussi.

Si $\lambda = \pm \infty$, on n'est renseigné que si (v_n) est divergente : (u_n) l'est aussi.

THÉOREME II. — 1^o *Si l'on a, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$ et si (v_n) converge, il en est de même de (u_n) .*

2^o *Si, au contraire, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$ et que (v_n) diverge, il en est de même de (u_n) .*

En effet, on a, suivant le cas, en supposant toujours que le caractère se manifeste dès les premiers termes,

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} < \frac{u_{n-2}}{v_{n-2}} < \dots < \frac{u_1}{v_1},$$

ou bien

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} > \frac{u_{n-2}}{v_{n-2}} > \dots > \frac{u_1}{v_1}.$$

Il suffit de prendre $a \equiv \frac{u_1}{v_1}$ pour être ramené au théorème I.

Les deux théorèmes précédents sont d'un usage courant. En voici un troisième, qui sert moins fréquemment, mais dont nous aurons cependant à faire usage.

THÉORÈME III (Cauchy). — *Si, à partir d'un certain rang, les termes de la série (u_n) sont non croissants (n° 39), cette série est de même nature que la série de terme général $v_n \equiv a^n u_{a^n}$, où a désigne un nombre entier quelconque plus grand que 1.*

1° Supposons (u_n) convergente. On a

$$u_{a^{p-1}+1} + u_{a^{p-1}+2} + \dots + u_{a^p} = u_{a^p}(a^p - a^{p-1}) = v_p \left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

Faisons successivement $p = 1, 2, \dots, n$ et ajoutons, il vient

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right) V_n \leq U_{a^n} < U.$$

Donc (v_n) converge (n° 41).

2° Supposons (u_n) divergente. On a

$$u_{a^p} + u_{a^{p+1}} + \dots + u_{a^{p+1}-1} = u_{a^p}(a^{p+1} - a^p) = v_p(a - 1).$$

D'où l'on déduit, comme précédemment,

$$(a - 1) V_n = U_{a^{n+1}-1} - U_{a-1}.$$

Or, $U_{a^{n+1}-1}$ augmente indéfiniment avec n ; donc aussi V_n .

43. Règles de convergence. — Des théorèmes précédents nous allons déduire des règles de convergence en prenant pour séries de comparaison des séries dont l'étude directe est évidente. La première de celles-ci est la *progression géométrique*

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$$

On peut reconnaître immédiatement la nature de cette série, parce qu'on possède une expression fort simple pour la somme des n premiers termes, à savoir $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, si $q \neq 1$, et n si $q = 1$. D'où il résulte

que ⁽¹⁾ :

Si $q < 1$, la série converge et a pour somme $\frac{1}{1-q}$;

Si $q \geq 1$, la série diverge.

Si maintenant nous appliquons les théorèmes I et II du numéro précédent, en prenant pour série (v_n) une progression géométrique, nous arrivons aux deux règles suivantes :

RÈGLE DE CAUCHY. — *Si l'on a, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$, la série est convergente; si $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, elle est divergente.*

Cela résulte du théorème I (n° 42), en prenant $v_n = k^n$ dans la première hypothèse et $v_n = 1$ dans la seconde.

Application pratique. — On cherche la limite de $\sqrt[n]{u_n}$, pour n infini. Si cette limite λ existe, on a les conclusions suivantes :

1° *Si $\lambda < 1$, la série converge*; car, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{u_n}$ reste compris entre $\lambda - \varepsilon$ et $\lambda + \varepsilon$, si petit que soit ε ; il suffit alors de prendre $\varepsilon < 1 - \lambda$, pour qu'en posant $k = \lambda + \varepsilon$, on se trouve dans la première hypothèse de la règle de Cauchy.

2° *Si $\lambda > 1$, la série diverge*, car $\sqrt[n]{u_n}$ finit par rester supérieur à 1.

3° *Si $\lambda = 1$, il y a doute*; excepté toutefois si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers sa limite par valeurs supérieures, auquel cas il y a encore divergence.

RÈGLE DE DALEMBERT. — *Si l'on a, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1$, la série est convergente; si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, elle est divergente.*

Cela résulte du théorème II (n° 42), en prenant $v_n = k^n$ dans la première hypothèse et $v_n = 1$ dans la seconde.

Application pratique. — On procède comme pour la règle de Cauchy, en cherchant la limite λ du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Les conclusions sont absolument les mêmes que plus haut et nous laissons au lecteur le soin de les énoncer et de les justifier.

⁽¹⁾ Nous admettons que q^n tend vers 0 ou $+\infty$, suivant que $q < 1$ ou > 1 , ce qui sera prouvé plus tard (n° 82).

Rapprochement des deux règles. — Le lecteur n'est pas sans remarquer l'analogie de ces deux règles. Effectivement, il existe entre elles une certaine dépendance : on démontre que si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite, $\sqrt[n]{u_n}$ admet la même limite. Mais l'inverse peut être inexact, comme le montre l'exemple de la série suivante

$$a + ab + a^2b + a^2b^2 + \dots + a^n b^{n-1} + a^n b^n + \dots$$

pour laquelle $\sqrt[n]{u_n}$ a pour limite $\sqrt[n]{ab}$, tandis que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est alternativement égal à a et à b .

On voit donc que la règle de Cauchy est plus générale que celle de D'Alembert, en ce sens que la première est toujours applicable quand la seconde l'est, tandis que la réciproque n'est pas vraie. Mais, au point de vue pratique, cette remarque n'a pas grande importance et les deux règles se valent.

44. Série fondamentale $\frac{1}{n^x}$. — Après la progression géométrique, la série qui va nous servir de terme de comparaison est celle qu'on appelle quelquefois *série fondamentale* et qui a pour terme général $u_n = \frac{1}{n^x}$, x désignant un nombre positif donné.

Appliquons-lui le théorème III (n° 42) : nous sommes ramenés à la série $v_n = a^n \frac{1}{(a^n)^x} = \left(\frac{1}{a^{x-1}}\right)^n$, laquelle est une progression géométrique de raison $\frac{1}{a^{x-1}}$. Donc, *la série fondamentale est convergente pour $x > 1$ et divergente pour $x \leq 1$. Dans le cas particulier où $x = 1$, on l'appelle la série harmonique.*

RÈGLE $n^x u_n$. — 1° *Si le produit $n^x u_n$ reste inférieur à un nombre fixe et si x est plus grand que 1, la série (u_n) est convergente.*

2° *Si le produit $n^x u_n$ reste supérieur à un nombre fixe non nul et si x est inférieur ou égal à 1, la série (u_n) est divergente.*

Cela résulte en effet du théorème I (n° 42) appliqué à la série (u_n) et à la série $v_n = \frac{1}{n^x}$.

Application pratique. — On essaie de trouver un nombre x tel que $n^x u_n$ tende vers une limite λ , finie et non nulle, pour n infini.

Dans ce cas, la série converge ou diverge suivant que $x > 1$, ou $x \leq 1$. Cela résulte, en effet, de ce que $n^x u_n$ finit toujours par rester compris entre $\lambda + \varepsilon$ et $\lambda - \varepsilon$, ε pouvant être pris assez petit pour que $\lambda - \varepsilon$ soit positif.

Si la limite λ est nulle ou infinie, on n'est renseigné que si $x > 1$ dans le premier cas (la série est convergente) et si $x \leq 1$ dans le second cas (la série est divergente).

45. *Les trois règles que nous venons d'énoncer sont celles qu'on emploie le plus couramment et qu'il faut savoir appliquer sans hésitation. Il en existe d'autres, de moindre importance, auxquelles on a recours quand les premières sont en défaut.*

Nous citerons seulement la règle de Duhamel et la règle de Gauss.

Règle de Duhamel. — Elle est relative au cas douteux de la règle de D'Alembert. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers 1 par valeurs inférieures. Nous pouvons alors poser

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + z_n};$$

le nombre z_n finit évidemment par demeurer positif. La règle de Duhamel est alors la suivante :

- 1° Si, à partir d'un certain rang, on a $nz_n > k > 1$, la série converge;
2° Si, à partir d'un certain rang, on a $nz_n \leq 1$, la série diverge.

1° Supposons $nz_n > k > 1$. Pour établir la convergence de la série (u_n) , nous allons lui appliquer le théorème II (n° 42), en prenant pour série de comparaison la série $v_n = \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}}$, où $\frac{p}{q}$ désigne un nombre fractionnaire quelconque compris entre 1 et k . Il nous suffit de prouver qu'à partir d'un certain rang on a l'inégalité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1 + z_n} < \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{p}{q}}}.$$

ou

$$1 + z_n < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Or, cette inégalité est entraînée par la suivante

$$1 + \frac{k}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}},$$

laquelle équivaut à

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p > 0.$$

Le premier membre étant un polynôme en $\frac{1}{n}$, on sait (n° 123) que pour $\frac{1}{n}$ suffisamment petit, c'est-à-dire pour n suffisamment grand, son signe est celui de son terme de moindre degré en $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire, d'après la formule du binôme, celui de la quantité $\frac{1}{n}(kq - p)$. Comme celle-ci est positive, puisqu'on a pris $\frac{p}{q} < k$, la première partie de notre règle est démontrée.

2° Supposons $nx_n \leq 1$. Appliquons encore le théorème II (n° 42), en prenant $v_n = \frac{1}{n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}},$$

car cela revient à $x_n = \frac{1}{n}$. Donc la série est divergente.

Application pratique. — On cherche la limite λ de nx_n . Si $\lambda > 1$, il y a convergence; si $\lambda < 1$, il y a divergence; si $\lambda = 1$, il y a doute, sauf si la limite est atteinte par valeurs inférieures, auquel cas il y a encore divergence.

46. *Règle de Gauss.* — Supposons que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en n , soit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + A_2 n^{p-2} + \dots}{B_0 n^q + B_1 n^{q-1} + B_2 n^{q-2} + \dots}.$$

La règle de D'Alembert nous montre immédiatement que, si $p > q$, il y a divergence; si $p < q$, il y a convergence; si $p = q$, il y a convergence ou divergence, suivant que $\frac{A_0}{B_0} < 1$ ou > 1 . Mais, si $A_0 = B_0$, il y a doute. La règle de Gauss est alors la suivante :

Pour que la série soit convergente, il faut et il suffit qu'on ait $B_1 - A_1 > 1$, en supposant, ce qui est évidemment permis, que la valeur commune de A_0 et B_0 a été ramenée égale à l'unité.

Appliquons, en effet, la règle de Duhamel. Nous avons

$$nx_n = \frac{(B_1 - A_1)n^p + (B_2 - A_2)n^{p-1} + \dots}{n^p - A_1 n^{p-1} + \dots}.$$

Cette fraction rationnelle a pour limite $B_1 - A_1$; donc, si $B_1 - A_1 > 1$, la série converge; si $B_1 - A_1 < 1$, elle diverge. Il n'y a doute que si $B_1 - A_1 = 1$. Mais, nous allons montrer directement que, dans ce cas, la série est encore divergente. Pour cela, nous allons lui appliquer le théorème II (n° 42), en prenant $c_n = \frac{1}{n + \lambda}$, λ étant un nombre fixe que nous déterminerons tout à l'heure. Comme la série (c_n) , qui est comparable à la série harmonique (théorème I), est divergente, il nous suffit de prouver qu'on a, pour n suffisamment grand,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n - \lambda}},$$

ou, après des calculs élémentaires,

$$(B_2 - A_2 + \lambda - A_1)n^{p-1} + \dots < 0,$$

les termes non écrits étant de degré inférieur à $p-1$ par rapport à n . Or pour n très grand, le premier membre garde le signe de son premier terme (n° 123); si donc nous déterminons λ par la seule condition d'être inférieur à $A_1 - A_2 - B_2$, nous serons certains que l'inégalité finira toujours par être vérifiée.

III. — SÉRIES A TERMES QUELCONQUES.

47. **Convergence absolue et semi-convergence.** — Occupons-nous maintenant des *séries dites à termes quelconques*, pour lesquelles le terme général n'arrive jamais à garder un signe invariable et qui renferment par conséquent une infinité de termes positifs et une infinité de termes négatifs.

Pour ces séries, il y a lieu de distinguer deux manières très différentes d'être convergente. On y est conduit par la considération de la *série des termes positifs* et de la *série des termes négatifs*. D'une façon précise, parmi les n premiers termes de la série proposée, il existe p termes positifs $u'_1, u'_2, \dots, u'_p$ et q termes négatifs $-u''_1, -u''_2, \dots, -u''_q$. Soient S'_p la somme des premiers et $-S''_q$ la somme des seconds.

Cela posé, supposons que n augmente indéfiniment; il en est de même de p et q . Il peut maintenant se présenter trois circonstances :

1° *Les séries à termes positifs* (u'_p) et (u''_q) sont toutes deux convergentes. Dans ce cas, lorsque n croît indéfiniment, S'_p et S''_q tendent respectivement vers les limites S' et S'' ; donc la somme $S_n = S'_p - S''_q$ tend vers $S' - S''$. La série (u_n) est donc convergente; on dit qu'elle est *absolument convergente*.

2° Les séries (u_p) et (u_q) sont toutes deux divergentes. Les sommes S_p' et S_q'' tendent toutes deux vers $+\infty$; mais, il peut se faire néanmoins que leur différence S_n tende vers une limite déterminée. Dans ce dernier cas, on dit que la série (u_n) est *semi-convergente*.

3° Une des deux séries (u_p) et (u_q) est convergente; l'autre est divergente. La série (u_n) est alors divergente.

Un procédé commode pour reconnaître la convergence absolue consiste à considérer la *série des valeurs absolues*, qui est obtenue en changeant le signe de tous les termes négatifs. Si Σ_n désigne la somme de ses n premiers termes, on a évidemment $\Sigma_n = S_p' + S_q''$. On voit que c'est seulement dans le premier des trois cas précédents que cette somme possède une limite finie.

Donc :

THÉORÈME. — *Pour qu'une série soit absolument convergente, il faut et il suffit que la série des valeurs absolues soit convergente.*

La recherche des séries absolument convergentes se ramène, comme on le voit, à l'étude des séries à termes positifs. Il est, au contraire, quelquefois très difficile de prouver qu'une série est semi-convergente.

48. **Séries alternées.** — On appelle ainsi toute série dont les termes sont, à partir d'un certain rang, alternativement positifs et négatifs ⁽¹⁾.

THÉORÈME. — *Si le terme général d'une série alternée tend vers zéro, et si sa valeur absolue finit, à partir d'un certain rang, par n'être pas croissante ⁽²⁾, la série est convergente.*

Supposant toujours que les caractères se manifestent dès le premier terme, considérons la série

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots,$$

où les u sont des nombres positifs non croissants et tendant vers zéro. On a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geq 0, \quad S_{2n+2} - S_{2n}.$$

(1) On peut reconnaître ce caractère au moyen du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ qui doit finir par rester négatif.

(2) On peut dire aussi que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ doit finir par rester compris entre 0 et -1.

En outre,

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1.$$

Donc, quand n croît indéfiniment, S_{2n} tend vers une limite $S \leq u_1$ (n° 39, théorème I). De même

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n+1} - u_{2n} > 0, \quad S_{2n+1} - S_{2n-1}$$

et

$$S_{2n+1} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + u_{2n+1} > 0.$$

Donc, S_{2n+1} tend vers une limite $S' > 0$ (n° 39, théorème I).

Je dis maintenant que $S = S'$. En effet, on a

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1},$$

ce qui donne, à la limite (théorème I du n° 38),

$$S' - S = 0.$$

On voit finalement que, quelle que soit la manière dont n augmente indéfiniment, S_n tend vers une limite S positive et plus petite que u_1 .

Le cas où la série commence par un terme négatif se ramène au précédent; la somme S est alors négative et plus grande que le premier terme. D'une façon générale, on peut donc dire que *la somme de la série a le signe du premier terme et lui est inférieure en valeur absolue*.

Un exemple classique est celui de la *série harmonique alternée*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots,$$

à laquelle s'applique visiblement le théorème précédent. Cette série est d'ailleurs semi-convergente, puisque la série $\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente (n° 44).

49. Théorème d'Abel. — *Étant données une série (u_n) , dont la somme des n premiers termes a un module borné supérieurement, et une suite infinie (a_n) de nombres positifs, non croissants et tendant vers zéro, la série $(a_n u_n)$ est convergente.*

Soient S_n et Σ_n les sommes des n premiers termes de (u_n) et $(a_n u_n)$. Cal-

culons Σ_n en fonction de $S_1, S_2, \dots, S_n$. On a

$$\begin{aligned}\Sigma_n &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = a_1 S_1 + a_2 (S_2 - S_1) + \dots + a_n (S_n - S_{n-1}), \\ \Sigma_n &= (a_1 - a_2) S_1 + (a_2 - a_3) S_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n) S_{n-1} + a_n S_n.\end{aligned}$$

Considérons la série de terme général $v_n = (a_n - a_{n+1}) S_n$: si V_n désigne la somme de ses n premiers termes, on a

$$\Sigma_n = V_{n-1} + a_n S_n.$$

Comme $a_n S_n$ tend vers zéro, puisque a_n tend vers zéro et que $|S_n|$ reste fini, il nous suffit, pour démontrer le théorème, de prouver la convergence de la série (v_n) . Or, je dis que celle-ci est absolument convergente. En effet, soit V_n la somme des n premiers termes de la série $(|v_n|)$. On a

$$V_n = (a_1 - a_2)|S_1| + (a_2 - a_3)|S_2| + \dots + (a_n - a_{n+1})|S_n|,$$

puisque les différences $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots$ sont toutes positives ou nulles.

Donc, si A désigne la borne supérieure de $|S_n|$, on a

$$V_n \leq A[(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1})] = A(a_1 - a_{n+1}) \leq A a_1.$$

De là résulte bien la convergence de la série $(|v_n|)$, d'après un théorème du n° 41.

Application. — Prenons $u_n = (-1)^{n-1}$. La somme S_n est égale à 1 ou 0, suivant que n est impair ou pair; elle est donc bornée supérieurement et inférieurement. En appliquant le théorème d'Abel, on retombe sur le théorème des séries alternées.

Séries trigonométriques. — Prenons maintenant $u_n = \cos n\theta$, θ désignant un arc quelconque donné non multiple de 2π . On a (*Exerc.*; Chap. VII, exercice résolu, n° 7).

$$S_n = \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

Donc

$$|S_n| < \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}.$$

Il en résulte que si les nombres positifs $a_1, a_2, \dots$ décroissent et tendent vers zéro, la série

$$a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + a_n \cos n\theta + \dots$$

est convergente.

De même, si les nombres $b_1, b_2, \dots$ décroissent et tendent vers zéro, la série

$$b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots + b_n \sin n\theta + \dots$$

est convergente et, par suite, aussi la suivante

$$(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) + \dots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \dots$$

Une telle série porte le nom de *série trigonométrique* ou *série de Fourier*. Les séries de cette nature jouent un rôle très important dans l'étude des fonctions périodiques (n° 66) et aussi dans certaines questions de Physique mathématique.

50. Séries imaginaires. — Tout ce qui est relatif aux séries à termes quelconques peut s'étendre, sans aucune difficulté, aux *séries à termes imaginaires*. Soit la série de terme général $u_n = a_n + b_n i$, où a_n et b_n sont deux nombres réels. Par définition, la série (u_n) est convergente si les deux séries (a_n) et (b_n) le sont. Si l'on appelle A et B leurs sommes respectives, la somme de la série (u_n) est $A + Bi$. Si l'une au moins des séries (a_n) et (b_n) est divergente, il en est de même de (u_n) .

La série (u_n) est dite *absolument convergente* si les deux séries (a_n) et (b_n) le sont (n° 47). Dans le cas contraire, elle est *semi-convergente*.

THÉORÈME. — *Pour qu'une série imaginaire soit absolument convergente, il faut et il suffit que la série des modules soit convergente.*

La série des modules a pour terme général $\varphi_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Si elle est convergente, il en est de même des séries de termes généraux $|a_n|$ et $|b_n|$, en vertu du théorème I du n° 42, car $|a_n|$ et $|b_n|$ sont plus petits que φ_n . Réciproquement, si les séries $(|a_n|)$ et $(|b_n|)$ convergent, il en est de même de la série $(|a_n| + |b_n|)$ et par suite de la série φ_n , car $\varphi_n < |a_n| + |b_n|$.

La démonstration que nous avons donnée du théorème d'Abel (n° 49) et celle que nous donnerons de la multiplication des séries (n° 52) s'appliquent aussi bien aux séries imaginaires qu'aux séries réelles.

IV. — ADDITION ET MULTIPLICATION DES SÉRIES.

§1. Addition des séries. — Étant données deux séries (u_n) et (v_n) , si l'on ajoute leurs termes de même rang, on obtient une nouvelle série, de terme général $w_n = u_n + v_n$, qui est dite *la somme des deux premières*. Si celles-ci sont convergentes et ont pour sommes U et V , la série (w_n) est également convergente et a pour somme $W = U + V$ (théorème 1 du n° 38). Si (u_n) converge et que (v_n) diverge, (w_n) diverge (corollaire du n° 38). Si (u_n) et (v_n) divergent, on ne peut rien dire de (w_n) .*

On peut étendre tout ceci à l'addition d'un nombre quelconque de séries.

§2. Multiplication des séries. — La multiplication des séries est loin d'être aussi simple que leur addition. Cauchy est le premier qui s'en soit occupé d'une manière précise, en fixant une règle pour la formation du terme général de la série produit de deux séries données. Voici quelle est cette règle. Étant données les deux séries (u_n) et (v_n) , la série produit a pour terme général

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + u_3 v_{n-2} + \dots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1.$$

Autrement dit, on effectue la multiplication comme si l'on avait affaire à deux polynômes ordonnés d'une certaine manière ⁽¹⁾ et l'on groupe en un même terme w_n tous les produits partiels dont la somme des indices est égale à $n + 1$.

Cette règle ne présenterait aucun intérêt et n'aurait qu'une signification purement formelle, si l'on ne démontrait pas que la série (w_n) est convergente et a pour somme le produit des sommes U et V des deux séries proposées, supposées convergentes. Ceci n'est d'ailleurs vrai que dans certaines conditions. Cauchy l'a démontré dans le cas où les deux séries (u_n) et (v_n) sont absolument convergentes. Depuis, *Mertens a prouvé qu'il suffisait que l'une au moins des deux*

⁽¹⁾ On peut imaginer par exemple que chaque terme de (u_n) est un monome par rapport à une certaine variable x , de degré égal à son indice. De même pour (v_n) . Le produit est alors ordonné suivant les puissances croissantes de x , w_n désignant le terme en x^{n+1} (Cf. *Séries entières*, n° 105).

séries fût absolument convergente, soit, par exemple, la série (u_n) . C'est ce que nous allons faire voir ici.

Nous allons prouver que les différences

$$\delta_{2n} = (w_1 + w_2 + \dots + w_{2n}) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n)(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$$

et

$$\delta_{2n+1} = (w_1 + w_2 + \dots + w_{2n+1}) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n)(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$$

tendent toutes deux vers zéro, quand n croît indéfiniment. On en conclura manifestement que la somme des $2n$ ou des $2n+1$ premiers termes de la série (w_n) a même limite que le produit

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n)(v_1 + v_2 + \dots + v_n),$$

lequel tend vers UV (n° 38, théorème II).

Occupons-nous d'abord de la différence δ_{2n} . Ordonnons-la suivant les indices croissants des u_i (1)

$$\begin{aligned} \delta_{2n} = & u_1(v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{2n}) + u_2(v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{2n-1}) + \dots \\ & + u_n v_{n+1} - u_{n+1}(v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\ & + u_{n+2}(v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) - \dots - u_{2n} v_1. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |\delta_{2n}| \leq & |u_1| |v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{2n}| + |u_2| |v_{n+1} + \dots + v_{2n-1}| + \dots \\ & + |u_n| |v_{n+1}| + |u_{n+1}| |v_1 + v_2 + \dots + v_n| \\ & + |u_{n+2}| |v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}| - \dots - u_{2n} |v_1|. \end{aligned}$$

Or, de la convergence des séries $(|u_n|)$ et (v_n) , on déduit d'abord qu'on peut trouver un nombre positif λ supérieur à toutes les sommes telles que

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \quad \text{et} \quad |v_1 + v_2 + \dots + v_n|.$$

De plus, en vertu du théorème I du n° 40, étant donné un nombre positif ε aussi petit qu'on veut, on peut lui faire correspondre un nombre naturel N tel que l'inégalité $n \geq N$ entraîne les deux suivantes

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon, \quad |v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+p}| < \varepsilon,$$

---

(1) Nous recommandons au lecteur, pour la compréhension de ce calcul, d'écrire les unes au-dessus des autres les expressions des termes $w_1, w_2, \dots, w_n$ en fonction des u_i et v_i .

et ceci quel que soit p . Dans ces conditions, on aura

$$\begin{aligned} |\delta_{2n}| &< \varepsilon |u_1| + \varepsilon |u_2| + \dots + \varepsilon |u_n| + \Lambda |u_{n+1}| + \Lambda |u_{n+2}| + \dots + \Lambda |u_{2n}|, \\ |\delta_{2n}| &< \varepsilon (|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|) + \Lambda (|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{2n}|), \\ |\delta_{2n}| &< \varepsilon \Lambda + \Lambda \varepsilon = 2\varepsilon \Lambda. \end{aligned}$$

Comme ε peut être choisi aussi petit qu'on le veut, il en est de même de $2\varepsilon \Lambda$ et l'on voit bien que δ_{2n} tend vers zéro pour n infini.

De même, δ_{2n+1} peut s'écrire

$$\begin{aligned} \delta_{2n+1} &= u_1(v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{2n+1}) + u_2(v_{n+1} + \dots + v_{2n}) + \dots \\ &\quad + u_n(v_{n+1} + v_{n+2}) + u_{n+1}(v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1}) \\ &\quad + u_{n+2}(v_1 + v_2 + \dots + v_n) + \dots + u_{2n+1}v_1. \end{aligned}$$

Comme pour δ_{2n} , on démontrerait que, si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\delta_{2n+1}| < 2\varepsilon \Lambda,$$

de sorte que δ_{2n+1} tend également vers zéro, pour n infini. c. q. f. d.

Remarque. — On peut se demander s'il n'est pas possible de faire pour Mertens ce que Mertens a fait pour Cauchy, c'est-à-dire d'étendre encore le théorème, en enlevant la restriction de convergence absolue pour l'une des séries. Un exemple suffit pour montrer qu'il n'en est rien. Essayons en effet de faire, suivant la règle de Cauchy, le carré de la série semi-convergente qui a pour terme général $(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a

$$w_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p(n-p+1)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

Or, on vérifie aisément que chaque terme du crochet est au moins égal à $\frac{2}{n+1}$; d'où l'on conclut que $|w_n|$ est plus grand que $\frac{2n}{n+1}$. Comme cette dernière quantité tend vers 2, w_n ne tend pas vers zéro et la série que nous avons formée est divergente.

V. — CALCUL NUMÉRIQUE DES SÉRIES.

§3. Il se présente fréquemment, en Analyse, qu'un nombre est défini comme étant la somme d'une certaine série convergente. Il arrive aussi qu'un nombre Λ défini d'une manière quelconque ne

puisse être calculé pratiquement d'une façon directe; on en cherche alors un *développement en série*, c'est-à-dire qu'on tâche de construire une série convergente admettant Λ pour somme. Ceci se présente couramment dans la théorie des fonctions (voir Chap. VII), mais aussi dans bien d'autres questions, telles que, par exemple, les calculs astronomiques.

Il importe donc de savoir calculer, avec une approximation donnée, la somme de toute série dont on a reconnu la convergence. C'est ce qui va maintenant nous occuper.

Séries sommables. — Un cas particulier très simple, mais peu fréquent, est celui où la somme des n premiers termes peut se mettre sous la forme d'une fonction de n dont on aperçoit facilement la limite exacte pour n infini. On dit alors que la série est *sommable*. Calculer sa somme, c'est en *faire la sommation*.

Un exemple de ce genre nous a été fourni par la progression géométrique. Nous en indiquons d'autres dans les exercices correspondant à ce Chapitre et aussi dans le Chapitre VII, relatif aux séries entières.

Lorsqu'on ne connaît aucun procédé de sommation, il faut se contenter d'un résultat approché, ce qui, d'ailleurs, est pratiquement suffisant, si l'on peut pousser l'approximation assez loin.

§4. Calcul approché d'une série. — Proposons-nous donc de calculer la somme S d'une série (u_n) avec une approximation égale, par exemple, à $\frac{1}{10^p}$. A cet effet, nous réduisons la série à ses N premiers termes et nous calculons chacun de ceux-ci avec $p + q$ décimales. Nous commettons ainsi deux sortes d'erreurs :

L'*erreur de première espèce* est la somme des erreurs provenant du calcul de chaque terme; elle est inférieure à $\frac{N}{10^{p+q}}$.

L'*erreur de seconde espèce* résulte des termes négligés; elle est égale au *reste* R_N de la série, c'est-à-dire à la somme de la série convergente

$$R_N = u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$$

Si N est choisi suffisamment grand, elle peut être diminuée à volonté, d'après la convergence même de la série proposée. On conçoit dès lors qu'il soit possible de *s'arranger pour que la somme des*

deux erreurs soit plus petite que $\frac{1}{10^p}$. Mais, pour savoir quand cette condition est remplie, il est nécessaire de connaître, pour chaque valeur de N , une limite supérieure de $|R_N|$. Cela peut ne pas être facile. Voici néanmoins des cas assez fréquents pour lesquels cette question se résout immédiatement.

1° La série est à termes positifs et l'on peut lui appliquer la règle de Cauchy (n° 43). — On a évidemment

$$R_N < k^{N+1} + k^{N+2} + \dots = \frac{k^{N+1}}{1-k};$$

2° La série est à termes positifs et l'on peut lui appliquer la règle de D'Alembert (n° 43). — On a, dans ce cas,

$$R_N < u_{N+1}(1 + k + k^2 + \dots) = \frac{u_{N+1}}{1-k};$$

3° La série est à termes quelconques, mais elle est absolument convergente. — On cherchera, au moyen d'une des deux règles précédentes, si c'est possible, une limite supérieure du reste de la série des valeurs absolues. Comme celui-ci est plus grand que $|R_N|$, il en sera de même, *a fortiori*, de la limite obtenue.

4° La série est alternée. — D'après ce qui a été vu au n° 48, le reste est toujours du signe du premier terme négligé et lui est inférieur en valeur absolue.

Il est aisé de constater que, dans chacun de ces cas, le reste a même ordre de grandeur que le premier terme négligé. Dans la pratique, on ne calcule guère que des séries pour lesquelles il en est ainsi. Si le terme général tend assez vite vers zéro, ou, comme on dit, si la série est *rapidement convergente*, et si l'approximation demandée n'est pas exagérée, on peut adopter la règle pratique suivante :

Règle pratique. — On calcule les termes successifs avec $p + 2$ décimales; quand on n'obtient plus que des zéros, on fait la somme des termes calculés et l'on prend celle-ci pour valeur approchée de la série.

Cette règle, qui est en quelque sorte une règle empirique, n'a rien

d'absolu. On peut néanmoins observer que si l'on pose $R_n = \frac{\varepsilon}{10^{p+2}}$, l'erreur totale est plus petite que $\frac{N-\varepsilon}{10^{p+2}}$. Pour qu'elle soit inférieure à $\frac{1}{10^p}$, il faut et il suffit qu'on ait

$$N - \varepsilon < 100.$$

Or, R_n étant de l'ordre du premier terme négligé, c'est-à-dire de $\frac{1}{10^{p+2}}$, ε sera de l'ordre de l'unité; on peut admettre, par exemple, que ε sera toujours inférieur à 10. Alors il suffit que N soit plus petit que 90, ce qui sera toujours largement vérifié, car on ne perdra jamais son temps à calculer 90 termes d'une série, à moins qu'on ne poursuive un but tout à fait particulier.

En tout cas, quand on a terminé le calcul, il faut toujours bien vérifier que l'erreur totale est inférieure à $\frac{1}{10^p}$. D'ailleurs, on s'apercevra, la plupart du temps, qu'on a obtenu une approximation plus grande que l'approximation demandée⁽¹⁾.

VI. — CONSEILS PRATIQUES POUR L'ÉTUDE D'UNE SÉRIE.

§§. Nous terminerons ce Chapitre en donnant au lecteur quelques conseils pratiques qui, nous l'espérons, lui permettront, quand il se trouvera en présence d'une série de difficulté moyenne, d'en reconnaître rapidement la nature et d'éviter les tâtonnements inutiles et maladroits qui sont habituels aux commençants. La marche qui nous semble la plus rationnelle est la suivante :

1^o *Chercher la limite de u_n pour n infini.* — Dans ce but, il sera souvent commode de poser $\frac{1}{n} = h$, car les infiniment petits sont plus faciles à manier que les infiniment grands. Si u_n ne tend pas vers zéro, la série est divergente. Si u_n tend vers zéro, *considérer h comme l'infiniment petit principal et chercher, si possible, la*

---

(1) Il peut arriver qu'il suffise de calculer les termes successifs avec $p-1$ décimales, en s'arrêtant encore quand on n'obtient plus que des zéros. Mais alors, il faut que $N-\varepsilon$ soit plus petit que 10. Si cette condition n'est pas satisfaite, on doit reprendre tous les calculs avec une décimale de plus. Cf. *Leçons*, n° 193.

partie principale de l'infiniment petit u_n . Si Ah^p désigne cette dernière, la règle $n^2 u_n$ nous montre que la série converge ou diverge suivant que $p > 1$ ou $p \leq 1$: il n'y aura jamais de cas douteux.

2° L'étude de u_n au voisinage de $h = 0$ est impraticable (1). — Il faut alors rechercher si la série est à termes positifs. Si oui, on regardera rapidement s'il ne se présente pas une série (v_n) très connue telle que le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tende vers une limite finie et différente de zéro, pour n infini. On appliquera alors le théorème I du n° 42. Si l'on ne voit rien dans ce sens, on essaiera les règles de Cauchy, de D'Alembert, ou $n^2 u_n$, en commençant par celle qui semble devoir donner les calculs les plus simples. A ce propos, observons qu'il est nécessaire de bien connaître les énoncés exacts de ces critères et qu'il ne faut pas toujours les abandonner sous le prétexte qu'on n'a pu trouver une limite pour $\sqrt[n]{u_n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou $n^2 u_n$.

Si ces règles courantes ne donnent rien, on essaiera, le cas échéant, la règle de Duhamel, ou celle de Gauss, ou encore le théorème III du n° 42.

3° La série est à termes quelconques. — Voir d'abord si elle est alternée et si l'on peut lui appliquer le théorème du n° 48, ce qu'il est souvent très facile de reconnaître. S'il n'en est rien, étudier la série des valeurs absolues. Si l'on ne peut établir la convergence de celle-ci, il n'y a plus qu'à essayer le théorème d'Abel ou à chercher un artifice quelconque.

Remarque. — La marche que nous venons d'indiquer n'a évidemment rien d'absolu et il peut arriver souvent que la règle à appliquer saute aux yeux dès le premier examen du terme général. Mais, toutes les fois qu'il n'en sera pas ainsi, nous conseillons au lecteur de procéder méthodiquement comme il vient d'être indiqué.

---

(1) On trouvera au Chapitre VIII les divers types de fonctions de h pour lesquelles cette étude est possible pratiquement.

CHAPITRE V.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE.

I. — NOTION DE FONCTION: CONTINUITÉ.

36. Notion de fonction ⁽¹⁾. — On désigne sous le nom général de *variable* une lettre susceptible de représenter n'importe quel nombre relatif. Donner à cette variable une *valeur numérique*, c'est la remplacer par un nombre relatif déterminé. Une variable x est dite *variable indépendante* quand on peut lui donner arbitrairement pour valeur numérique n'importe quel nombre compris entre deux nombres fixes a et b ⁽²⁾, qui délimitent *l'intervalle de variation* (a, b) . Si x peut prendre toutes les valeurs supérieures à a , l'intervalle de variation est $(a, +\infty)$. Si x peut prendre toutes les valeurs inférieures à a , il est $(-\infty, a)$. Si x peut prendre n'importe quelle valeur, il est $(-\infty, +\infty)$.

Une variable y est dite fonction de la variable indépendante x si les valeurs numériques de y correspondent à celles de x d'une manière univoque. Autrement dit, à toute valeur de l'intervalle (a, b) attribuée à x , on fait correspondre, par un procédé quelconque, une valeur déterminée pour y . On dit alors que *la fonction y est parfaitement déterminée dans l'intervalle (a, b)* .

Grâce à l'indétermination du procédé qui sert à établir la correspondance entre x et y , on voit que *la notion de fonction est très générale*. Par exemple, on peut définir y comme fonction de x en assujettissant les valeurs numériques correspondantes de ces deux variables à annuler un certain polynôme en x et y (n° 136). On obtient

---

⁽¹⁾ Cf. *Leçons*, n°s 194, 195, 196.

⁽²⁾ Les bornes a et b de l'intervalle font aussi partie des valeurs numériques attribuables à x . Nous supposons dans la suite, sauf avis contraire, $a < b$.

alors une *fonction algébrique*. Les fonctions non algébriques sont dites *transcendantes*. Nous en verrons quelques exemples, se ramenant tous à ce qu'on appelle les *transcendantes élémentaires* (n° 78). Mais, on en peut imaginer bien d'autres, soit par des procédés d'ordre analytique, soit par des procédés d'ordre géométrique, soit même par des procédés d'ordre physique ⁽¹⁾.

Quel que soit le mode de définition des fonctions dont nous étudierons les propriétés, il nous sera commode de les représenter par un symbole déterminé tel que $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $z(x)$, $\psi(x)$, etc. (Prononcez : f de x , g de x , etc.).

§1. Représentation graphique. — Il est commode, pour se rendre compte de *l'allure d'une fonction*, de construire sa *représentation graphique*. Dans ce but, on choisit deux *axes de coordonnées* Oxy , généralement rectangulaires (Tome II); on imagine ensuite tous les points obtenus en portant en *abscisses* toutes les valeurs de x de l'intervalle (a, b) et en *ordonnées* les valeurs correspondantes de y . L'ensemble de tous ces points constitue *la courbe représentative de la fonction*.

Pour toutes les fonctions que nous rencontrerons, la courbe représentative sera toujours une ligne, au sens élémentaire et intuitif du mot. Néanmoins, on peut construire des fonctions pour lesquelles cette notion disparaît complètement; mais nous ne nous en occuperons pas.

Réciproquement, si l'on trace dans le plan xOy une ligne quelconque C , dont un arc AB (*fig. 9*) soit rencontré en un seul point par chaque parallèle à Oy d'abscisse comprise dans l'intervalle (a, b) , il est clair que cet arc peut servir de courbe représentative à une certaine fonction $f(x)$. Mais celle-ci ne serait exactement déterminée que si le trait de la courbe était infiniment fin. Comme ceci est irréalisable, *la fonction $f(x)$ n'est connue que d'une manière approchée*. Au point de vue pratique, cela n'a aucune importance, et c'est ce procédé graphique qu'emploient généralement les physiciens pour

---

(1) C'est ainsi que, pour ne citer qu'un exemple classique, la longueur d'une barre est fonction de sa température. L'étude des fonctions de cette nature constitue le but principal de la Physique, dont les *lois* ne sont autres que les procédés de correspondance servant à les définir.

découvrir la fonction qui représente la marche d'un phénomène. Ayant construit la courbe, ils cherchent ensuite une fonction aussi

Fig. 11.

simple que possible, algébrique ou transcendante, qui soit représentée par cette courbe avec une approximation de l'ordre des erreurs d'expérience et de graphique.

§8. Continuité. — Soit une fonction $y = f(x)$ définie dans l'intervalle (a, b) . Si x_0 désigne une valeur de cet intervalle, on dit que *la fonction est continue pour $x = x_0$ si à tout nombre positif ε choisi à l'avance, aussi petit qu'on veut, on peut faire correspondre un nombre positif η tel que l'inégalité $|x - x_0| \leq \eta$ entraîne la suivante*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit aussi, dans ces conditions, que $f(x)$ *tend vers $f(x_0)$* , ou bien *a pour limite $f(x_0)$* , quand x tend vers x_0 ⁽¹⁾.

Il peut arriver qu'une fonction $f(x)$ soit définie dans tout l'intervalle (a, b) , sauf pour une valeur particulière x_0 de cet intervalle ⁽²⁾. Mais s'il existe un nombre λ tel qu'à tout nombre ε on puisse faire correspondre η de manière que l'inégalité $|x - x_0| \leq \eta$, avec la restriction $x \neq x_0$, entraîne la suivante

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon,$$

⁽¹⁾ Le lecteur n'est pas sans remarquer l'analogie de cette définition avec celle de la convergence d'une suite infinie (n° 37). La seule différence est que l'inégalité $n \in \mathbb{N}$ est ici remplacée par $|x - x_0| \leq \eta$.

⁽²⁾ Telle est, par exemple, la fonction $\frac{\sin x}{x}$, qui est définie pour toutes les valeurs de x sauf pour $x = 0$. Sa vraie valeur est d'ailleurs 1.

on dit encore que $f(x)$ tend vers λ lorsque x tend vers x_0 , et cette limite λ est appelée la vraie valeur de la fonction pour $x = x_0$.

Si à tout nombre positif A on peut faire correspondre τ_1 tel que $|x - x_0| < \tau_1$, avec la restriction $x \neq x_0$, entraîne $f(x) > A$, on dit que $f(x)$ augmente indéfiniment, ou tend vers $+\infty$, pour $x = x_0$, et l'on écrit symboliquement $f(x_0) = +\infty$.

On définit de même le symbole $f(x_0) = -\infty$.

Il peut arriver aussi que $f(x)$ tende vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures ⁽¹⁾ (ou inférieures), et vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures (ou supérieures). On écrit alors $f(x_0 + 0) = +\infty$ [ou $f(x_0 - 0) = -\infty$] et $f(x_0 - 0) = -\infty$ [ou $f(x_0 + 0) = +\infty$].

S'il existe un nombre λ tel qu'à tout nombre ε on puisse faire correspondre X de manière que $x > X$ entraîne $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$, on dit que $f(x)$ tend vers λ , pour $x = +\infty$ et l'on écrit $f(+\infty) = \lambda$.

On définit de même $f(-\infty)$.

Si à tout nombre A on peut faire correspondre X de manière que $x > X$ entraîne $f(x) > A$, on écrit $f(+\infty) = +\infty$.

On définit de même les symboles $f(+\infty) = -\infty$, $f(-\infty) = +\infty$, $f(-\infty) = -\infty$.

Une fonction est dite *bornée supérieurement* (ou inférieurement) dans un intervalle si les valeurs qu'elle prend pour les valeurs de x de cet intervalle sont toutes inférieures (ou supérieures) à un nombre fixe.

Elle reste *finie* pour $x = x_0$ s'il existe deux nombres positifs A et τ_1 tels que $|x - x_0| < \tau_1$ entraîne $|f(x)| < A$.

§9. Une fonction est dite *continue* dans l'intervalle (a, b) si elle est continue pour chacune des valeurs de cet intervalle.

THÉORÈME I. — Pour qu'une fonction $f(x)$ soit continue dans un intervalle (a, b) , il faut et suffit qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un nombre τ_1 tel que l'inégalité $|x_2 - x_1| < \tau_1$ entraîne la suivante

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon,$$

quels que soient x_1 et x_2 choisis dans l'intervalle (a, b) .

⁽¹⁾ L'inégalité $|x - x_0| < \tau_1$ doit alors être remplacée par $0 < x - x_0 < \tau_1$.

Cette condition est évidemment suffisante. Mais il est assez difficile de démontrer rigoureusement qu'elle est nécessaire, bien que cela paraisse intuitif. Nous admettrons cette démonstration ⁽¹⁾.

THÉORÈME II. — *La fonction $f(x)$ étant supposée continue dans l'intervalle (a, b) , si le produit $f(a) \cdot f(b)$ est négatif, la fonction s'annule au moins une fois dans cet intervalle.*

C'est ce que montre d'une façon claire la courbe représentative (fig. 10), car celle-ci est constituée par un *trait continu* joignant deux points A et B situés de part et d'autre de Ox et rencontre

Fig. 10.

nécessairement cette droite. Il ne faudrait pas néanmoins regarder ceci comme une démonstration rigoureuse, car la courbe représentative d'une fonction, même continue, peut présenter des singularités tout à fait inattendues et ne pas pouvoir être tracée sur le papier ⁽²⁾. La véritable démonstration doit, comme toutes les démonstrations d'Analyse, être purement abstraite et reposer sur la seule notion de nombre. Nous l'admettrons encore ⁽³⁾.

COROLLAIRE. — *Si une fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) , elle atteint au moins une fois chacune des valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Car, si A désigne une telle valeur, la fonction continue $f(x) - A$ prend des valeurs de signes différents pour $x = a$ et $x = b$ et s'annule par conséquent dans l'intervalle.

⁽¹⁾ Voir, par exemple, J. TANNERY, *Introduction*, etc., n° 162.

⁽²⁾ C'est ainsi qu'il existe des exemples de fonction continue dans un intervalle (a, b) , n'admettant de dérivée pour aucune valeur de cet intervalle et dont la courbe représentative ne possède par suite de tangente en aucun de ses points.

⁽³⁾ Voir J. TANNERY, *loc. cit.*, n° 166.

Géométriquement, cela veut dire que l'arc AB est rencontré au moins une fois par toute parallèle à Ox passant entre A et B (fig. 10).

THÉORÈME III. — *Si une fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) , elle atteint, dans cet intervalle, une limite supérieure M et une limite inférieure m.*

Cela veut dire que sur l'arc AB (fig. 11), il y a un point M plus haut que tous les autres et un point m plus bas que tous les autres. Nous admettrons toujours la démonstration abstraite ⁽¹⁾.

Fig. 11.

Les nombres M et m sont appelées *maximum* et *minimum absolus* ⁽²⁾; leur différence $M - m$ est l'*oscillation* de la fonction dans l'intervalle (a, b) .

THÉORÈME IV. — *Étant donnée une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) , à tout nombre positif ε , on peut faire correspondre un nombre η tel que l'oscillation de la fonction soit moindre que ε dans tout intervalle plus petit que η et intérieur à (a, b) .*

Cela résulte du théorème I.

II. — DÉRIVÉES; VARIATION DES FONCTIONS.

60. **Dérivées.** — Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle (a, b) . Désignant par x et x_0 deux valeurs de cet intervalle, considérons le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Si nous regardons x_0 comme

⁽¹⁾ Cf. J. TANNERY, *loc. cit.*, n° 161.

⁽²⁾ On verra plus loin la différence avec les *maxima* et *minima relatifs* (n° 63)

fixe et x comme variable, ce rapport est une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b) , sauf pour $x = x_0$. Il peut arriver néanmoins (n° 58) qu'elle possède une vraie valeur pour cette valeur de x ⁽¹⁾, c'est-à-dire que le rapport en question ait une limite déterminée quand x tend vers x_0 . S'il en est ainsi, on dit que *la fonction admet une dérivée pour $x = x_0$ et cette dérivée est*, par définition, la limite précédente, c'est-à-dire, en somme, *la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable quand ce dernier tend vers zéro* ⁽²⁾.

S'il existe une dérivée pour chaque valeur de l'intervalle (a, b) , cette dérivée constitue une fonction de x parfaitement déterminée dans cet intervalle; on l'appelle la *fonction dérivée*, ou simplement la *dérivée* de $f(x)$ et on la représente indifféremment par l'une des trois notations $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$ ⁽³⁾.

Si la fonction $f''(x)$ admet elle-même une dérivée dans l'intervalle (a, b) , celle-ci est appelée la *dérivée seconde* de $f(x)$ et se représente par $f''(x)$, y'' ou $\frac{d^2y}{dx^2}$. De même, la dérivée de la dérivée seconde est dite *dérivée troisième* et s'écrit $f'''(x)$, y''' ou $\frac{d^3y}{dx^3}$. De proche en proche, on définit ainsi les *dérivées d'ordres successifs*, la *dérivée $p^{\text{ième}}$* (ou d'ordre p) se représentant par $f^{(p)}(x)$, $y^{(p)}$ ou $\frac{d^p y}{dx^p}$.

Interprétation géométrique de la dérivée. — Reprenons la définition de la dérivée de la fonction $f(x)$ et interprétons-la sur la courbe représentative. Aux valeurs x_0 et x de la variable indépen-

(1) Ceci n'est possible toutefois que si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 . Donc, *une fonction ne peut admettre de dérivée qu'autant qu'elle est continue*. Mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante; par exemple, la fonction $y = x \sin \frac{1}{x}$ est continue pour $x = 0$ (si l'on convient de lui donner la valeur 0 pour cette valeur de x); mais elle n'a pas de dérivée, car le rapport $\frac{y}{x} = \sin \frac{1}{x}$ oscille indéfiniment entre $+1$ et -1 quand x tend vers zéro.

(2) Il nous arrivera souvent, dans la suite, de désigner ces accroissements par Δy et Δx . D'une façon générale, l'accroissement d'une quantité quelconque se représente par la lettre Δ (ou δ) suivie de celle qui représente la valeur à partir de laquelle on prend l'accroissement.

(3) Jusqu'à nouvel ordre, le symbole $\frac{dy}{dx}$ doit être considéré comme formant un tout inséparable et non pas une fraction.

dante correspondent sur cette courbe deux points M_0 et M (fig. 12). Le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est, comme on sait, égal au *coefficient angulaire* ou *pente* de la droite M_0M . Si maintenant x tend vers x_0 ,

Fig. 12.

M tend, sur la courbe, vers M_0 ; s'il y a une dérivée, et dans ce cas seulement, la sécante M_0M tend vers une position limite déterminée, de coefficient angulaire $f'(x_0)$, qui est, par définition, la tangente en M_0 à la courbe. Donc, *dire qu'une fonction admet une dérivée pour $x = x_0$ équivaut à dire que sa courbe représentative admet une tangente au point M_0* ⁽¹⁾; la dérivée mesure le coefficient angulaire de cette tangente, ou, comme on dit encore, la *pente* de la courbe en M_0 .

61. Théorème de Rolle; formule des accroissements finis. — De la définition de la dérivée résulte immédiatement le théorème suivant, connu sous le nom de *théorème de Rolle*, et qui a une certaine importance par les conséquences que nous en tirerons dans la suite :

THÉORÈME (de Rolle). — *Soit une fonction $f(x)$ définie et continue dans l'intervalle (a, b) et admettant, dans tout cet inter-*

(1) Pour que ceci soit complètement exact, il faut toutefois convenir de l'existence de la dérivée dans le cas où le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ augmente indéfiniment en valeur absolue; on dira alors que *la dérivée est infinie*; la tangente sera parallèle à Ox . Les choses se passent d'une tout autre manière lorsque le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oscille constamment entre certaines limites; la sécante M_0M pivote indéfiniment autour de M_0 dans un sens ou dans l'autre. Par exemple, pour la fonction $y = x \sin \frac{1}{x}$ mentionnée plus haut, la sécante OM ne cesse de balayer l'angle des bissectrices des axes qui comprend Ox quand M tend vers O .

valle, une dérivée finie et bien déterminée. Si l'on a $f(a) = f(b)$, la dérivée s'annule au moins une fois dans l'intervalle (a, b) .

Géométriquement, cela veut dire que sur l'arc AB (fig. 13), il y a au moins un point M où la tangente est parallèle à Ox, ou, ce qui revient au même, à la corde AB. Or, cette propriété est évidente

Fig. 13.

sur le premier cas de figure; mais elle est manifestement fautive dans les trois autres. Ceci ne doit pas nous étonner, car la fonction représentée par la première courbe est la seule à satisfaire exactement à toutes les conditions du théorème. La seconde est en effet discontinue pour $x = b$, car pour cette valeur elle est égale à l'ordonnée $f(b)$ du point B, tandis qu'elle tend vers $f(b) + BP$ quand x tend vers b . Pour la troisième, c'est la dérivée qui devient infinie au point P, où la tangente est parallèle à Oy. Pour la quatrième, la dérivée cesse d'être déterminée au point P. Il y a en effet deux tangentes en ce point; donc le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'a pas la même limite suivant que Δx tend vers zéro par valeurs positives ou par valeurs négatives⁽¹⁾.

Ceci nous montre la *nécessité d'une démonstration analytique rigoureuse*, laquelle est d'ailleurs très simple.

Si la fonction ne garde pas la même valeur dans tout l'intervalle (a, b) , auquel cas la dérivée est évidemment constamment nulle, elle doit prendre soit des valeurs plus grandes, soit des valeurs plus petites que $f(a) = f(b)$. Supposons, par exemple, qu'elle prenne des valeurs plus grandes⁽²⁾. Soit alors c la valeur pour laquelle, en

(1) On dit quelquefois qu'il y a une *dérivée à droite* et une *dérivée à gauche*; ce sont respectivement les limites de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque Δx tend vers 0 et vers 0 . Le point P est dit *point anguleux*. Cette particularité ne peut se présenter que pour des fonctions transcendentes.

(2) Cela ne l'empêche d'ailleurs pas de prendre, le cas échéant, des valeurs plus petites.

vertu du théorème III du n° 59, la fonction atteint son maximum ⁽¹⁾. Je dis que $f'(c) = 0$. En effet, d'abord c est nécessairement compris entre a et b , puisque la fonction prend, par hypothèse, des valeurs plus grandes que $f(a) = f(b)$. Soit alors η un nombre positif tel que $c - \eta$ et $c + \eta$ soient tous deux dans l'intervalle (a, b) . Si l'on suppose $|h| < \eta$, on a, quel que soit le signe de h ,

$$f(c+h) - f(c) \geq 0.$$

Le rapport $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ est donc de signe contraire à h . D'autre part, quelle que soit la manière dont h tend vers zéro, ce rapport tend vers une limite bien déterminée $f'(c)$. Dès lors, si l'on imagine que h tende vers $+0$, comme $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ demeure constamment négatif ou nul, on a nécessairement $f'(c) \leq 0$. Si, au contraire, h tend vers -0 , on en conclut que $f'(c) \geq 0$. Ces deux conclusions ne sont compatibles que si $f'(c) = 0$.

C. Q. F. D.

62. Formule des accroissements finis. — Soit une fonction $f(x)$ définie et continue dans l'intervalle $(a, a+h)$ et admettant, dans tout cet intervalle, une dérivée finie et bien déterminée. On a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h),$$

θ désignant un certain nombre compris entre 0 et 1.

Telle est la *formule des accroissements finis*.

Géométriquement, elle se ramène immédiatement au théorème de Rolle. Elle s'écrit, en effet,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a+\theta h).$$

Or, le premier membre n'est autre que le coefficient angulaire de la droite AB (fig. 14); et alors la formule signifie simplement que sur l'arc AB il y a au moins un point M_θ où la tangente est parallèle à AB, ce qui équivaut bien au théorème de Rolle.

On se ramène d'ailleurs analytiquement à ce théorème par la

⁽¹⁾ On peut remarquer que ce théorème est en défaut dans le deuxième cas de la figure 13. La limite supérieure $f(b) + BP$ n'est pas atteinte par la fonction dans l'intervalle (a, b) .

considération de la fonction $Y = \overline{PM}$. Si m désigne, pour abrégé, le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, on a

$$Y = \overline{QM} - \overline{QP} = y - mx = f(x) - mx = g(x).$$

Or $g(a) = g(b)$; c'est évident sur la figure et la vérification analytique est immédiate. D'autre part, la fonction $g(x)$ satisfait à toutes

Fig. 14.

les conditions du théorème de Rolle. Donc $g'(x)$ s'annule pour au moins une valeur c de l'intervalle $(a, a+h)$. Comme $g'(x) = f'(x) - m$ (n° 67), on a $f'(c) = m$. Si l'on remarque enfin que tout nombre c compris entre a et $a+h$ peut se mettre sous la forme $a + \theta h$, θ étant compris entre 0 et 1, on voit que la formule est établie rigoureusement.

63. Variation des fonctions. — Une application très importante et immédiate de la théorie des dérivées consiste en l'étude de la *variation des fonctions*.

Étant donnée une fonction $y = f(x)$ définie dans l'intervalle (a, b) , étudier ses variations, c'est imaginer que x prenne, en croissant, toutes les valeurs possibles depuis a jusqu'à b et se rendre compte, aussi exactement qu'on le peut, des valeurs successives que prend y dans ces conditions. La manière la plus frappante d'arriver à ce résultat consiste d'ailleurs à *construire la courbe représentative*; c'est ce but que nous allons viser.

On dit que la fonction $f(x)$ est *croissante*, *décroissante* ou *constante* dans l'intervalle (α, β) suivant qu'on a

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} > 0, \quad \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} < 0, \quad f(x'') - f(x') = 0,$$

en appelant x' et x'' deux valeurs quelconques de l'intervalle.

Cela concorde bien avec la notion vulgaire qu'on possède de la croissance d'une quantité, car, dans le premier cas par exemple, si x prend des valeurs de plus en plus grandes, il en est évidemment de même de $f(x)$.

La fonction $f(x)$ étant supposée définie dans l'intervalle (a, b) , soit x_0 une valeur intérieure à cet intervalle. On dit que *la fonction est croissante, décroissante, maximum ou minimum pour $x = x_0$, si l'on peut déterminer τ_1 tel que $|x - x_0| < \tau_1$ entraîne, suivant le cas, l'une des inégalités*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0, \quad f(x_0) - f(x) > 0, \quad f(x_0) - f(x) < 0.$$

Dans le premier cas, ceci veut dire que la fonction prend, pour les valeurs de x voisines de x_0 , des valeurs supérieures ou inférieures à $f(x_0)$ suivant que x est lui-même supérieur ou inférieur à x_0 . Dans le deuxième cas, conclusion inverse.

Dans le troisième cas, $f(x)$ est plus grand pour x_0 que pour les valeurs voisines ⁽¹⁾. Dans le quatrième cas, $f(x)$ est plus petit pour x_0 que pour les valeurs voisines ⁽¹⁾.

64. THÉORÈME I. — *Si une fonction est constante dans un intervalle, elle y admet une dérivée constamment nulle.*

C'est une conséquence manifeste de la définition de la dérivée.

THÉORÈME II (*réci-proque du précédent*). — *Si, dans un intervalle (α, β) , la fonction $f(x)$ admet une dérivée nulle, elle y est constante.*

En effet, on a, en conservant les notations du numéro précédent et appliquant la formule des accroissements finis ⁽²⁾ (n° 62),

$$f(x'') - f(x') = (x'' - x')f'(x'''),$$

où x''' désigne un certain nombre compris entre x' et x'' et, par suite,

⁽¹⁾ Cela ne veut pas dire que $f(x_0)$ soit nécessairement la plus grande ou la plus petite valeur que puisse prendre $f(x)$, quand x décrit l'intervalle (a, b) , contrairement à ce qui passait au théorème III du n° 59. C'est pourquoi le maximum et le minimum actuels sont appelés quelquefois *maximum et minimum relatifs*.

⁽²⁾ On en a le droit, car $f(x)$ est finie dans l'intervalle (x', x'') , puisque nulle.

entre α et β . Mais, $f'(x'')$ est nul, d'après l'hypothèse; donc aussi $f(x'') = f(x')$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME III. — *Si la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (α, β) , pour aucune valeur de cet intervalle elle ne peut avoir une dérivée négative et elle ne peut avoir une dérivée nulle que pour des valeurs séparées de x .*

Soit x_0 une valeur quelconque de l'intervalle. Le rapport

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

est positif, dès que $x_0 + h$ appartient à l'intervalle (α, β) . Comme cela finit toujours par arriver quand h tend vers zéro ⁽¹⁾, la limite de ce rapport, si elle existe, c'est-à-dire $f'(x_0)$, ne peut être que ≥ 0 .

En second lieu, les valeurs qui annulent $f'(x)$ sont séparées, car si $f'(x)$ était nulle dans tout un intervalle intérieur à (α, β) , $f(x)$ y serait constante (théorème II).

THÉORÈME IV (réciproque du précédent). — *Si, dans l'intervalle (α, β) , $f(x)$ admet une dérivée finie et positive, elle est croissante dans cet intervalle.*

En effet, si x' et x'' sont deux valeurs quelconques de l'intervalle, le rapport $\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$ est positif, parce qu'il est égal à la valeur de $f'(x)$ pour une valeur intermédiaire (théorème des accroissements finis).

Remarque importante. — Ce théorème repose sur la formule des accroissements finis. On ne peut donc en affirmer l'exactitude qu'autant que les conditions requises pour cette formule sont remplies. Autrement dit, la fonction $f(x)$ doit être finie et continue dans l'intervalle (α, β) et y admettre une dérivée finie. C'est bien ce qui est supposé dans l'énoncé, car la seule existence de $f'(x)$ entraîne, comme on sait, la continuité de $f(x)$ (note de la page 71).

Néanmoins, on peut étendre un peu la portée du théorème de la

⁽¹⁾ Si x_0 est à l'une des bornes de l'intervalle; par exemple, si $x_0 = \alpha$, il faut supposer $h > 0$. Mais, la limite étant indépendante du signe de h , la conclusion subsiste.

manière suivante : Pour que le théorème IV soit applicable, *il suffit que $f(x)$ soit finie et continue dans l'intervalle (α, β) et qu'elle y admette une dérivée finie et positive, sauf peut-être pour des valeurs séparées de x .*

En effet, si $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont ces valeurs séparées, dans chaque intervalle tel que (x_p, x_{p+1}) , on se trouve dans les conditions restreintes de l'énoncé; donc $f(x)$ croît. Mais, d'après la continuité de $f(x)$, la valeur de la fonction est la même à l'extrémité d'un intervalle partiel et au commencement de l'intervalle suivant. Il en résulte, d'une manière évidente, que $f(x)$ croît dans tout l'intervalle (α, β) ⁽¹⁾.

THÉORÈMES V et VI. — Énoncés et démonstrations analogues pour une fonction décroissante.

65. THÉORÈME VII. — *Si une fonction est croissante pour $x = x_0$ et admet une dérivée pour cette valeur, cette dérivée est positive ou nulle.*

Démonstration du théorème III.

THÉORÈME VIII. — Énoncé analogue pour une fonction décroissante.

THÉORÈME IX. — *Si une fonction est maximum ou minimum pour $x = x_0$ et admet une dérivée pour cette valeur, cette dérivée est nulle.*

Même démonstration que pour le théorème de Rolle (n° 61).

Il y aurait lieu d'énoncer maintenant des réciproques de ces trois théorèmes. Mais, elles peuvent donner lieu à quelques complications et seront envisagées seulement au Chapitre IX (n° 124), à propos de l'étude d'une fonction au voisinage d'une valeur de la variable.

Nous ferons seulement observer ici que, dans la pratique, *on reconnaît un maximum à ce que la dérivée change de signe en passant du signe + au signe -*, lorsque la variable indépendante traverse, en croissant, la valeur x_0 correspondante. *Pour un mini-*

(1) Ceci pourrait être en défaut s'il y avait des discontinuités. Il pourrait arriver, par exemple, que $f(x_p - 0)$ fût plus grand que $f(x_p + 0)$. Les valeurs de $f(x)$ seraient alors plus grandes un peu avant x_p qu'un peu après. On trouvera des exemples de cette particularité dans les exercices correspondant à ce Chapitre.

mun, au contraire, *la dérivée passe du signe — au signe —*. Cela résulte en effet des théorèmes du numéro précédent et de ce que, pour un maximum par exemple, la fonction cesse de croître pour décroître.

Si la dérivée existe pour $x = x_0$, le changement de signe de $f'(x)$ ne peut se faire qu'en passant par la valeur zéro, d'après le théorème IX. Mais, si la dérivée est infinie, $f'(x)$ peut passer brusquement de $\pm \infty$ à $\mp \infty$ (fig. 13, troisième cas). S'il y a une dérivée à droite et une dérivée à gauche (page 73, note 1), $f'(x)$ peut passer brusquement d'une valeur finie positive (ou négative) à une valeur finie négative (ou positive).

66. Marche à suivre pour étudier les variations d'une fonction. — Elle résulte des théorèmes précédents :

1° *On détermine l'intervalle de variation de x .* — Pour cela, on cherche les valeurs de x pour lesquelles la fonction a un sens, ce qui donne naissance à un ou plusieurs intervalles. On essaie ensuite, quand c'est possible, de *réduire ce ou ces intervalles* par des considérations de périodicité ou de symétrie.

La fonction $f(x)$ est dite *périodique* et *admet pour période p* , si l'on a $f(x + p) \equiv f(x)$, quel que soit x . Il est clair qu'il *suffit de l'étudier dans un intervalle quelconque de longueur p* . Ayant construit l'arc de courbe correspondant, on aura toute la courbe par les translations $\pm p, \pm 2p, \pm 3p, \dots$, suivant Ox .

La fonction est *paire* par rapport à x , si l'on a $f(x) \equiv f(-x)$; elle est *impaire*, si $f(x) \equiv -f(-x)$. Dans le premier cas, la courbe représentative est symétrique par rapport à Oy ; dans le second cas, par rapport à l'origine. Dans les deux cas, *il suffit d'étudier la fonction pour les valeurs positives de x* ; c'est ainsi qu'on se bornera à construire la portion correspondante de la courbe représentative; le reste de la courbe s'obtiendra ensuite par symétrie.

Au lieu de changer x en $-x$, on peut essayer d'autres changements simples, qui sautent généralement aux yeux par la simple inspection de $f(x)$, tels que x en $\lambda - x$, ou x en $\frac{\lambda}{x}$, etc. Si ces changements ne changent pas y ou ne font que changer son signe, on peut encore réduire l'intervalle de variation.

2° *On marque, dans l'intervalle de variation et par ordre de*

grandeur croissante, les valeurs qui rendent la fonction infinie ou discontinue. — Ces valeurs sont, en général, faciles à apercevoir et, du moins pour les exemples que nous pourrions rencontrer, elles sont toujours séparées.

3° *Si le sens de variation de $f(x)$ ne saute pas aux yeux, on prend la dérivée et l'on étudie son signe.* — Dans ce but, il est généralement nécessaire de résoudre l'équation $f'(x) = 0$ ⁽¹⁾. Mais il ne faut néanmoins pas perdre de vue que *le signe seul de la dérivée importe*; et si, par exemple, celle-ci se présente sous la forme du produit de plusieurs facteurs dont certains sont essentiellement positifs ou négatifs, on pourra faire abstraction de ces derniers (en marquant leur signe), quand bien même ils s'annuleraient ou deviendraient infinis pour certaines valeurs séparées de x (remarque du théorème IV, n° 64); à moins qu'on ne tienne à avoir tous les points de la courbe où la tangente est parallèle à Ox ou à Oy .

Rappelons en outre qu'il peut arriver que la dérivée change de signe en devenant infinie ou discontinue (remarque du théorème IX, n° 65).

Quoi qu'il en soit, on obtiendra, par cette étude, de nouvelles valeurs remarquables de x , qu'on intercalera à leur tour dans l'intervalle de variation.

4° *Dans chacun des intervalles partiels obtenus, la fonction est continue et sa dérivée garde un signe constant. En s'appuyant sur les théorèmes IV et VI, on indique le sens de variation, par les mots croît ou décroît, ou par les signes $\nearrow$ ou $\searrow$.*

5° *On calcule les valeurs de $f(x)$ aux extrémités des intervalles.* — On a maintenant construit le *tableau des variations* et cela suffirait à la rigueur pour répondre au but proposé. Néanmoins, il vaut mieux compléter cette étude par la construction de la courbe représentative.

6° *On construit les points remarquables avec leurs tangentes.* — Les points remarquables sont ceux qui correspondent aux valeurs

---

⁽¹⁾ Voir, à ce propos, le Chapitre XXII.

remarquables de x inscrites dans le tableau (1). Les tangentes sont données par la dérivée (n° 60).

7° On joint les points remarquables par un trait continu, en tenant compte des tangentes construites et s'aidant du tableau, qui indique à chaque instant si la courbe monte ou descend vers la droite ou vers la gauche.

III. — OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS.

67. **Addition.** — THÉORÈME I. — *La somme de plusieurs fonctions continues est une fonction continue, ou encore la limite d'une somme est la somme des limites de chacun de ses termes.*

La démonstration est identique à celle du théorème I du n° 38, avec cette seule différence que l'inégalité $n \geq N$ doit être remplacée par $|x - x_0| \leq \eta$.

THÉORÈME II. — *La dérivée d'une somme est la somme des dérivées de ses termes.*

Soient, par exemple, les trois fonctions u , v , w , qui, pour une certaine valeur de x , admettent les dérivées u' , v' , w' . À l'accroissement Δx correspondent les accroissements Δu , Δv , Δw , $\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w$. On a

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Si Δx tend vers zéro, les termes du second membre tendent respectivement, par hypothèse, vers u' , v' , w' . Donc, le second membre lui-même a, d'après le théorème précédent, une limite égale à

$$u' + v' + w'. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. — *Si deux fonctions diffèrent par une constante, elles ont même dérivée et réciproquement.*

Car toute fonction constante a une dérivée nulle et réciproquement (n° 64).

(1) Parmi ces points, il peut y en avoir qui soient rejetés à l'infini, c'est-à-dire dont l'abscisse ou l'ordonnée, ou les deux coordonnées soient infinies. Il convient alors de rechercher les *asymptotes* correspondantes, question qui sera traitée au Tome II.

68. Multiplication. — THÉORÈME III. — *Le produit de plusieurs fonctions continues est une fonction continue, ou encore la limite d'un produit est égale au produit des limites de ses facteurs* ⁽¹⁾.

Même démonstration que pour le théorème II du n° 38.

THÉORÈME IV. — *Si les fonctions u et v admettent chacune une dérivée, leur produit y admet aussi une dérivée donnée par la formule*

$$(2) \quad y' = u'v + uv'.$$

En conservant les mêmes notations que plus haut, on a

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + \Delta u.v + u.\Delta v + \Delta u.\Delta v;$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Si Δx tend vers zéro, il en est de même de Δu , Δv , Δy ; de plus, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent respectivement vers les limites finies u' et v' ; donc $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers $u'v + uv' + u'.0 = u'v + uv'$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *La fonction $\Lambda f(x)$, où Λ désigne une constante, a pour dérivée $\Lambda f'(x)$.*

Le théorème IV prend une forme plus simple si l'on introduit les dérivées logarithmiques. On appelle *dérivée logarithmique* ⁽²⁾ de la fonction y le quotient $\frac{y'}{y}$. Cela posé, si l'on divise les deux membres de (2) par $y = uv$, on a

$$(3) \quad \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v};$$

done, *la dérivée logarithmique du produit de deux facteurs est la somme des dérivées logarithmiques de chacun de ceux-ci.*

Comme le produit de n facteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ peut toujours

(1) Lorsqu'un des facteurs tend vers zéro, pour $x = x_0$, et que les autres facteurs restent finis (n° 58), sans admettre nécessairement une limite, le produit tend encore vers zéro, comme le prouvera aisément le lecteur.

(2) Nous verrons plus loin l'origine de cette dénomination (n° 95).

s'écrire $(u_1 u_2 \dots u_{n-1}) u_n$, on voit sans peine que ce théorème s'étend par récurrence au produit d'un nombre quelconque de fonctions : donc :

THÉORÈME V. — *La dérivée logarithmique d'un produit de plusieurs facteurs est la somme des dérivées logarithmiques de chacun de ceux-ci.*

On en déduit la formule qui donne la dérivée du produit

$$y = u_1 u_2 \dots u_n.$$

On a, en effet,

$$(4) \quad \frac{y'}{y} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \dots + \frac{u'_n}{u_n}.$$

Multipliant par $y = u_1 u_2 \dots u_n$, il vient

$$(5) \quad y' = u'_1 u_2 u_3 \dots u_n + u_1 u'_2 u_3 \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1} u'_n.$$

En particulier, si $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$, on a la formule

$$(6) \quad (u^n)' = n u^{n-1} u',$$

qui sera étendue plus tard au cas où n a une valeur quelconque (n° 94).

69. Formule de Leibniz. — *Revenons à la fonction $y = uv$ et proposons-nous de calculer ses dérivées successives.* L'application du théorème II nous donne successivement

$$y' = u'v + uv', \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv'', \quad y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin pour remarquer l'apparition des coefficients de la formule du binôme (n° 25). On peut induire la formule générale suivante

$$(7) \quad y^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + C_n^p u^{(n-p)}v^{(p)} + \dots + uv^{(n)},$$

qui est déjà vraie pour $n = 1, 2, 3$. Pour la justifier en toute rigueur, la méthode de récurrence est tout indiquée. Formons donc $y^{(n+1)}$ en dérivant la formule (7) supposée exacte. Pour faire élégamment le calcul, nous remarquons que le second membre est une somme de produits de deux facteurs. Nous allons alors appliquer, pour chacun de ceux-ci, la formule (2); mais, nous écrirons sur une première ligne les termes obtenus en dérivant d'abord les premiers facteurs

[terme $u'v$ de la formule (2)]; puis, sur une seconde ligne, les termes obtenus en dérivant les seconds facteurs [terme uv' de la formule (2)]. De plus, comme ceux-ci sont, aux coefficients près, les mêmes que les précédents, nous écrirons l'un au-dessous de l'autre les termes analogues. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} = & u^{(n+1)}v + C_n^1 u^{(n)}v' + \dots + C_n^p u^{(n-p+1)}v^{(p)} + \dots + u'v^{(n)} \\ & + u^{(n)}v' + \dots + C_n^{p-1} u^{(n-p+1)}v^{(p)} + \dots + C_n^1 u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Réunissons les termes semblables, en nous rappelant la formule (12) du n° 24 :

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + C_{n+1}^1 u^{(n)}v' + \dots + C_{n+1}^p u^{(n+1-p)}v^{(p)} + \dots + uv^{(n+1)},$$

c'est-à-dire la formule (7), où l'on aurait remplacé n par $n+1$. Celle-ci est donc générale. Elle porte le nom de *formule de Leibniz*. Pour la retenir facilement, on l'écrit sous la forme symbolique

$$(8) \quad y^{(n)} = (u+v)^{(n)} \quad (\text{énoncez } u+v \text{ puissance symbolique } n),$$

qui indique qu'on doit développer $(u+v)^n$ par la formule du binôme, mais considérer ensuite, dans le résultat, tous les exposants comme des indices de dérivation, les termes extrêmes u^n et v^n étant en outre remplacés par $u^{(n)}v$ et $uv^{(n)}$.

70. Division. — THÉORÈME VI. — *Si une fonction y , continue pour $x = x_0$, ne s'annule pas pour cette valeur, la fonction $\frac{1}{y}$ est également continue pour $x = x_0$.*

Même démonstration que pour le théorème III du n° 38.

Si y s'annule, $\frac{1}{y}$ tend vers $\pm \infty$ quand x tend vers x_0 .

THÉORÈME VII. — *Si u et v sont deux fonctions continues pour $x = x_0$, la seconde ne s'annulant pas, le quotient $\frac{u}{v}$ est également une fonction continue pour $x = x_0$, ou encore la limite d'une fraction dont le dénominateur ne tend pas vers zéro est égale au quotient des limites de ses termes.*

Cela résulte des théorèmes III et VI.

THÉORÈME VIII. — *Si, pour une certaine valeur de x , les fonc-*

tions u et v admettent chacune une dérivée et si $v \neq 0$, le quotient $y = \frac{u}{v}$ admet aussi une dérivée donnée par la formule

$$(9) \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

En effet, nous avons

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Si Δx tend vers zéro, Δu et Δv tendent aussi vers zéro, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers u' et v' ; le numérateur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend donc vers $vu' - uv'$, et son dénominateur vers v^2 . Par conséquent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a bien une limite égale à $\frac{vu' - uv'}{v^2}$ (théorème VII).

THÉORÈME IX. — *La dérivée logarithmique d'un quotient est égale à la dérivée logarithmique du numérateur moins celle du dénominateur.*

Cela résulte de la formule (9), ou bien, si l'on admet l'existence de y' , du théorème V appliqué au produit $u = vy$.

71. Fonctions de fonctions. — Soit la fonction $y = f(u)$ de la variable u . Supposons maintenant que u soit fonction de x ; il est clair que y est aussi fonction de x ; on dit que c'est une *fonction de fonction*.

THÉORÈME I. — *Si u est fonction continue de x et y fonction continue de u , y est fonction continue de x .*

En effet, si l'on donne à x un accroissement Δx , il en résulte l'accroissement Δu pour u et, par suite, l'accroissement Δy pour y . Or, si Δx tend vers zéro, il en est de même de Δu , à cause de la continuité de u par rapport à x , et par suite aussi de Δy , à cause de la continuité de y par rapport à u . Donc, y est bien continue par rapport à x .

THEOREME II. — *Si u possède une dérivée par rapport à x et y une dérivée par rapport à u , y possède aussi une dérivée par rapport à x , donnée par*

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Cela résulte manifestement de l'identité

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Généralisation. — On peut imaginer que y dépende de x par l'intermédiaire de plusieurs fonctions $u_1, u_2, \dots, u_n$. Par exemple, on supposera y fonction de u_1 ; u_1 fonction de $u_2, \dots, u_n$ fonction de x . Les deux théorèmes précédents s'étendent sans difficulté et l'on a

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du_1} \frac{du_1}{du_2} \dots \frac{du_n}{dx}.$$

72. Fonctions inverses. — Soit $y = f(x)$ une fonction définie et continue dans un certain intervalle (a, a') . Supposons en outre que, dans cet intervalle, elle varie toujours dans le même sens; admettons par exemple qu'elle soit croissante. Soit PP' l'arc de courbe correspondant (fig. 15). On voit, sur la figure, que toute parallèle

Fig. 15.

à Ox , dont l'ordonnée y est comprise entre $b = f(a)$ et $b' = f(a')$, coupe cet arc en un point M et un seul. L'abscisse x de ce point est donc une fonction bien déterminée de y , dans l'intervalle (b, b') , soit $x = F(y)$. C'est évidemment une fonction croissante. De plus, si $f(x)$ admet une dérivée pour une certaine valeur de x , la courbe admet une tangente au point M correspondant; donc $F(y)$ admet aussi une dérivée pour la valeur correspondante de y . Si l'on remarque

enfin que, par l'échange des deux axes de coordonnées, le coefficient angulaire d'une droite se transforme en son inverse, on voit que

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ces diverses propriétés, évidentes sur la figure, se démontrent rigoureusement par les raisonnements suivants :

1° *A toute valeur de y comprise entre b et b' correspond une valeur bien déterminée pour x .* — En effet, il en correspond au moins une, d'après le corollaire du théorème II du n° 59. Il ne peut en correspondre plus d'une, car si l'on avait $f(x) = f(x')$, la fonction proposée ne serait pas croissante dans tout l'intervalle (a, a') .

2° *La fonction $F(y)$ est croissante.* — En effet, si $y > y'$, on ne saurait avoir $x \leq x'$, car, d'après la croissance de $f(x)$, ceci entraînerait $f(x) < f(x')$, c'est-à-dire $y < y'$.

3° *La fonction $F(y)$ est continue.* — En effet, soient y_0 une valeur quelconque de l'intervalle (b, b') et x_0 la valeur correspondante de x . Il faut montrer qu'étant donné ε positif aussi petit qu'on veut, on peut trouver τ_1 tel que l'inégalité $|y - y_0| < \tau_1$ entraîne $|x - x_0| < \varepsilon$, ce qui revient à dire que si y reste compris entre $y_0 - \tau_1$ et $y_0 + \tau_1$, x doit varier entre $x_0 - \varepsilon$ et $x_0 + \varepsilon$. Or, soit

$$y_0 - \tau_1 = f(x_0 - \varepsilon) \quad \text{et} \quad y_0 + \tau_2 = f(x_0 + \varepsilon).$$

A l'intervalle $(y_0 - \tau_1, y_0 + \tau_2)$ pour y , correspond exactement l'intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ pour x . Si donc on prend τ_1 égal au plus petit des deux nombres positifs τ_1 et τ_2 , on est assuré que tant que y restera compris entre $y_0 - \tau_1$ et $y_0 + \tau_1$, x sera intérieur à l'intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

C. Q. F. D.

4° *Si $f(x)$ admet une dérivée pour $x = x_0$, $F(y)$ admet aussi une dérivée pour $y = y_0$.* — En effet, donnons à y l'accroissement k ; il lui correspond l'accroissement h pour x . Il nous faut chercher la limite de $\frac{h}{k}$ quand k tend vers zéro. Or ce rapport s'écrit $\frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$. D'autre part, si k tend vers zéro, il en est de même de h , d'après 3°. Dans ces conditions, $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ tend, par

hypothèse, vers $f'(x_0)$. Donc, le rapport inverse tend vers $\frac{1}{f''(x_0)}$ (théorème VI du n° 70). La fonction $F(y)$ admet donc bien une dérivée pour $y = y_0$: *de plus, on a* ⁽¹⁾

$$(12) \quad F'(y_0) = \frac{1}{f''(x_0)},$$

ou encore

$$(13) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

La fonction $y = F(x)$ est dite *la fonction inverse* de $y = f(x)$. Ajoutons aux propriétés précédentes que, si l'on rapporte les deux fonctions aux mêmes axes de coordonnées, *leurs courbes représentatives* (Γ) *et* (γ) *sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice de l'angle des axes*. En effet, au point $m(x, y)$ de (γ) , on peut faire correspondre le point $M(X, Y)$ de (Γ) tel qu'on ait

$$X = y, \quad Y = x,$$

puisque

$$X = f(Y) \quad \text{et} \quad y = f(x).$$

Or, ces deux points sont bien symétriques par rapport à la bissectrice de $\angle XOY$.

73. Tout ce que nous venons de dire peut se répéter, avec des modifications évidentes, en partant d'une fonction $f(x)$ constamment décroissante dans l'intervalle (a, a') . Au contraire, *les choses se compliquent si $f(x)$ varie tantôt dans un sens tantôt dans l'autre*. Par exemple, si $f(x)$ présente un maximum, on voit, sur la figure 16, que tant que y reste compris entre b et b' , il lui correspond une valeur déterminée pour x , comprise entre a et a'' . Mais si y se trouve entre b' et β , il lui correspond deux valeurs de x comprises : l'une x_1 entre a'' et z , l'autre x_2 entre z et a' . On dit alors que x *est une fonction non uniforme de y* dans l'intervalle (b', β) ; x_1 et x_2 sont

---

(1) Dans le cas où $f''(x_0) = 0$, $F'(y_0)$ est infini et n'existe, par conséquent, qu'autant qu'on admet l'extension dont il a été convenu un peu plus haut (p. 72, note 1).

les deux branches de cette fonction : elles correspondent respectivement aux deux arcs RQ et QP'.

Pour éviter toute difficulté, chaque fois que nous voudrions définir

Fig. 16.

une fonction inverse, nous choisirons l'intervalle de variation (α, α') de telle manière que la fonction $f(x)$ qui sert de point de départ y varie constamment dans le même sens.

IV. — FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

74. Dans les n^{os} 67 à 73, nous avons décrit des procédés permettant d'obtenir des fonctions nouvelles et leurs dérivées en partant d'autres fonctions connues et à dérivées connues. Nous trouverons d'autres procédés analogues dans le Chapitre X. Il ne nous reste plus qu'à indiquer les fonctions simples qui servent de point de départ et qu'on doit étudier directement. Ces fonctions que nous appellerons *les fonctions élémentaires*, sont en nombre très restreint. On peut y ramener néanmoins, à quelques rares exceptions près, toutes les fonctions qu'on pourra rencontrer dans cet Ouvrage. Par contre, lorsqu'on fait une étude plus approfondie de l'Analyse, en particulier des équations différentielles, on rencontre fréquemment des *transcendantes nouvelles irréductibles*, c'est-à-dire qui ne peuvent se déduire des fonctions élémentaires. Mais, comme cela ne nous arrivera pour ainsi dire jamais, nous pouvons considérer les *fonctions élémentaires* comme la base de toutes les applications dont nous aurons à nous occuper.

75. **Fonction x^m .** — La plus simple est $y = x^m$, où l'on suppose m entier et positif. Elle est définie pour toutes les valeurs de x . Si

on la considère comme le produit de m fonctions égales à x , on en conclut (n° 68) qu'elle est continue et a une dérivée ⁽¹⁾ égale à $m x^{m-1}$, ce qui peut aussi s'établir directement en développant $(x + \Delta x)^m$ par la formule du binôme. La dérivée $p^{\text{ième}}$ s'en déduit de proche en proche: elle est égale à

$$m(m-1)\dots(m-p+1)x^{m-p};$$

elle est nulle dès que $p > m$.

La fonction x^m est paire ou impaire (n° 66) en même temps que m . Ses variations sont évidentes et sont représentées par l'une ou l'autre des deux courbes suivantes (fig. 17), qui sont symétriques, la pre-

Fig. 17.

mière par rapport à Oy , la seconde par rapport à O . Pour $m = 2$, on a une *parabole*. Pour les valeurs plus grandes, on dit qu'on a une *parabole de degré m* ; en particulier, pour $m = 3$, on a une *parabole cubique*.

À la fonction x^m se rattachent, en première ligne, les *polynomes*, qui sont de la forme

$$y = \Lambda_0 x^m + \Lambda_1 x^{m-1} + \dots + \Lambda_m,$$

où les Λ désignent des coefficients constants. D'après ce qui précède et d'après le théorème I du n° 67 on voit qu'un *polynome est une fonction définie et continue pour toutes les valeurs de x* . Ses dérivées successives se déduisent de celles de x^m et du théorème II du

---

⁽¹⁾ Il faut toutefois admettre que la fonction $y = x$ a pour dérivée 1, ce qui résulte directement de la définition de la dérivée.

n° 67; la dérivée $p^{\text{ième}}$ est un polynôme de degré $m - p$; dès que p dépasse m , elle est nulle.

Le quotient de deux polynômes porte le nom de *fraction* ou *fonction rationnelle*. C'est une *fonction définie et continue pour toutes les valeurs de x , sauf pour les racines du dénominateur*, qui portent le nom de *pôles* et qui rendent la fraction infinie ⁽¹⁾. La dérivée se calcule par la formule (9); c'est encore une fraction rationnelle.

On peut enfin considérer la fonction x^m , où l'on suppose que m est un nombre fixe quelconque, rationnel ou non, positif ou négatif. Mais elle n'est alors définie que pour les valeurs positives de x (Chap. I).

Tant que m est commensurable, on peut aisément la rattacher au cas où m est entier et montrer qu'elle est continue. En effet, soit $m = \frac{p}{q}$, p et q étant deux entiers positifs. Posons

$$x^{\frac{1}{q}} = u;$$

on a

$$(14) \quad y = x^{\frac{p}{q}} = u^p.$$

D'autre part,

$$(15) \quad x = u^q.$$

Si l'on fait varier u de 0 à $+\infty$, x est une fonction continue de u et croissant de 0 à $+\infty$. Donc, inversement, u est une fonction continue de x dans l'intervalle $(0, +\infty)$ (n° 72); et par suite aussi y , qui est fonction continue de u (n° 71).

Si maintenant m est rationnel, mais négatif, la fonction x^{-m} est continue dans l'intervalle $(0, +\infty)$, mais s'annule pour $x = 0$. Donc, la fonction $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$ est continue dans l'intervalle $(0, +\infty)$, sauf pour la valeur zéro, qui la rend infinie.

On pourrait, grâce aux remarques précédentes, calculer la dérivée de $x^{\frac{p}{q}}$. Mais nous indiquerons plus loin (n° 94) un moyen plus rapide et qui conviendra au cas où m est incommensurable.

---

(1) On suppose, bien entendu, la *fraction irréductible*, c'est-à-dire que le numérateur et le dénominateur n'ont aucun facteur commun, ce qui équivaut (n° 303) à supposer qu'ils ne peuvent s'annuler en même temps.

76. Fonctions circulaires. — Ce sont les fonctions $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, où le nombre x représente un arc quelconque *évalué en radians*. On les appelle aussi *fonctions trigonométriques*. Elles sont *périodiques* et admettent respectivement pour périodes 2π , 2π , π , π . Elles se déduisent de la première d'entre elles par les formules bien connues

$$(16) \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Étude de $\sin x$ et $\cos x$. — Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont définies et continues pour toutes les valeurs de x . Montrons, par exemple, la continuité de $\sin x$. On a

$$(17) \quad \sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Comme $|\cos x| \leq 1$ quel que soit x , on a

$$|\sin(x+h) - \sin x| \leq 2 \left| \sin \frac{h}{2} \right| < 2 \left| \frac{h}{2} \right| = |h|.$$

Donc, si h tend vers zéro, il en est de même de

$$\sin(x+h) - \sin x, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La continuité de $\cos x$ peut s'établir de manière analogue: on peut aussi la déduire de celle de $\sin x$ par l'application du théorème I du n° 71, en se servant de la première formule (16).

Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ admettent respectivement $\cos x$ et $-\sin x$ pour dérivées, quel que soit x . Calculons, par exemple, la dérivée de $\sin x$. On a, en se servant de (17),

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Lorsque h tend vers zéro, $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ tend vers $\cos x$, d'après ce

qui précède. D'autre part, $\frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend, comme on sait, vers

l'unité. Donc, le rapport $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ a bien pour limite $\cos x$, pour $h = 0$.

La dérivée de $\cos x$ se calcule pareillement. On peut aussi appliquer le théorème II du n° 71, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos x)}{dx} &= \frac{d\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]}{dx} \\ &= \frac{d\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]}{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x. \end{aligned}$$

Les dérivées *n*^{èmes} se calculent aisément si l'on remarque que

$$(18) \quad (\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

En dérivant une nouvelle fois, on a (théorème II, n° 71)

$$(\sin x)'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin(x + \pi);$$

de même

$$(\cos x)'' = \cos(x + \pi).$$

En continuant ainsi, on arrive évidemment aux formules

$$(19) \quad \frac{d^n(\sin x)}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{d^n(\cos x)}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Les variations de la fonction $y = \sin x$ s'étudient très simplement. D'abord, il suffit de les connaître pour un intervalle de longueur 2π , et même de longueur π , parce que le changement de x en $x + \pi$ ne fait que changer le signe de y ⁽¹⁾. Prenons, par exemple, l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Nous remarquons maintenant que la fonction est impaire; cela réduit encore notre intervalle de moitié, par exemple à $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dans cet intervalle, la fonction est croissante; cela se voit géométriquement et aussi sur la dérivée $\cos x$, qui est positive. Si x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, y croît de 0 à 1.

On peut alors tracer l'arc de courbe OA (fig. 18). Une symétrie par rapport à O nous donne ensuite l'arc OA'. Une translation de π

---

(1) Quand une fonction jouit d'une telle propriété, on dit qu'elle est *semi-périodique*.

suivant Ox , suivie d'une symétrie par rapport à cette droite, nous donne l'arc ABC , d'ailleurs symétrique de AOA' par rapport à Aa . Le reste de la courbe s'obtient enfin par des translations successives, parallèles à Ox et d'amplitudes $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, ... (n° 66).

Fig. 18.

Cette courbe s'appelle la *sinusoïde*. La tangente en O est la première bissectrice, car la dérivée $\cos x$ est égale à 1 pour $x = 0$.

Les variations de $\cos x$ peuvent s'étudier directement ou bien se ramener à celles de $\sin x$, par l'une ou l'autre des formules

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

qui montrent que la courbe représentative se déduit de la sinusoïde par une symétrie relativement à la parallèle à Ox qui a pour abscisse $\frac{\pi}{2}$, ou bien par une translation de $\frac{\pi}{2}$ suivant Ox , ce qui donne la courbe tracée en pointillé sur la figure 18. Remarquons que la fonction $\cos x$ est une fonction paire.

71. *Étude de $\tan x$ et $\cot x$.* — La formule $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ montre (théorème VII, n° 70) que la fonction $y = \tan x$ est définie et continue pour toutes les valeurs de x , sauf pour les valeurs

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2},$$

qui annulent $\cos x$ et rendent, par suite, y infini. La formule (9) nous donne ensuite

$$(20) \quad y' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Cette dérivée étant essentiellement positive, la fonction $\tan x$ est

croissante dans tout intervalle où elle est continue, par exemple entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, intervalle dans lequel elle est représentée par la courbe suivante (fig. 19). L'origine est centre de symétrie, car la

Fig. 19.

fonction est impaire; la tangente en ce point est encore la première bissectrice; les droites parallèles à Oy , qui ont pour abscisses $\pm \frac{\pi}{2}$, sont des asymptotes de la courbe. Le reste de la courbe s'obtient par les translations $\pm \pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ..., suivant Ox .

La fonction $\cot x$ est définie et continue pour toutes les valeurs de x , sauf pour les valeurs $x = n\pi$, qui la rendent infinie. Sa dérivée peut se déduire de la formule

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

elle est égale à

$$-\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$$

Done, la fonction est décroissante dans tout intervalle où elle est continue, par exemple entre 0 et π . Sa courbe représentative (tracée en pointillé sur la figure 19) se déduit de la précédente par une symétrie relativement à la parallèle à Oy qui a pour abscisse $\frac{\pi}{2}$.

78. Fonctions circulaires inverses. — 1^{re} Fonction $y = \arcsin x$.

La fonction de y , $x = \sin y$, est définie, continue et croissante dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, aux limites duquel elle prend les valeurs -1 et $+1$. Donc (n° 72), on peut en déduire une fonction inverse, *définie, continue et croissante dans l'intervalle $(-1, +1)$* . Cette fonction se désigne par la notation $y = \arcsin x$ (*énoncé* : *arc sinus x*). On peut la définir comme étant *l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, dont le sinus est x* . Elle est impaire. Sa dérivée est donnée par la formule (13); on a

$$(21) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(\sin y)}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il faut d'ailleurs prendre le signe $+$ devant le radical, car $\cos y$ est positif tant que y reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

2° *Fonction $y = \arccos x$.* — La fonction $x = \cos y$ est définie, continue et décroissante dans l'intervalle $(0, \pi)$. On en déduit la fonction inverse $y = \arccos x$, *définie, continue et décroissante dans l'intervalle $(-1, +1)$* . C'est *l'arc compris entre 0 et π , dont le cosinus est x* . Sa dérivée est

$$(22) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{d(\cos y)}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

le radical étant encore pris avec sa valeur arithmétique.

3° *Fonction $y = \arctan x$.* — La fonction $x = \tan y$ est définie, continue et croissante dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, aux extrémités duquel elle prend les valeurs $-\infty$, $+\infty$. On en déduit la fonction inverse $y = \arctan x$, *définie, continue et croissante dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$* . C'est *l'arc, compris entre 0 et π , dont la tangente est x* . C'est une fonction impaire. Sa dérivée est

$$(23) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{d(\tan y)}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4° *Fonction* $y = \operatorname{arc} \cot x$. — La fonction $x = \cot y$ est définie, continue et décroissante dans l'intervalle $(0, \pi)$. On en déduit la fonction inverse $y = \operatorname{arc} \cot x$, *définie, continue et décroissante dans l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$, *qui est l'arc, compris entre 0 et π , dont la cotangente est x* . Sa dérivée est

$$(24) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{d(\cot y)}{dy}} = \frac{1}{-(1 + \cot^2 y)} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Les courbes représentatives de ces quatre fonctions se déduisent de celles des nos 76 et 77 par symétrie par rapport à la première bissectrice (n° 72).

Les fonctions circulaires et leurs inverses sont des *transcendantes élémentaires*. Il en existe encore deux autres : les *fonctions exponentielle* et *logarithmique*, qui seront définies et étudiées au Chapitre suivant. Ces transcendentes et la fonction x^m constituent toute la catégorie des fonctions que nous avons appelées fonctions élémentaires.

79. Fonctions imaginaires. — Dans tout ce qui précède, la variable x et les fonctions y qui en dépendaient ont été supposées ne pouvoir prendre que des valeurs essentiellement réelles. Cependant, il est possible d'étendre aux quantités imaginaires la notion de fonction. Cette extension, qui a été faite depuis longtemps, a conduit à la belle théorie des *fonctions de variable complexe*, qui s'est révélée si féconde à divers points de vue.

Il ne rentre pas dans le cadre de cet Ouvrage d'aborder, en quoi que ce soit, cet intéressant sujet. Néanmoins, il nous sera commode, dans certaines circonstances, d'envisager l'extension suivante de la notion de fonction de variable réelle. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions réelles de la *variable réelle* x , l'expression

$$(25) \quad \varphi(x) = f(x) + i g(x)$$

sera dite *fonction imaginaire* de cette variable.

Par définition, $\varphi(x)$ sera *continue*, pour une valeur donnée de x ou dans un intervalle déterminé, si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ le sont séparément. De même, si ces dernières admettent chacune une dérivée, soient $f'(x)$ et $g'(x)$, nous conviendrons de dire que $\varphi(x)$

admet aussi une dérivée, donnée par la formule

$$(26) \quad z'(x) = f'(x) + i g'(x).$$

Le lecteur vérifiera aisément que les règles établies pour le calcul des dérivées des fonctions réelles s'appliquent aussi pour le cas des fonctions imaginaires de la nature précédente.

En particulier, si u et v sont des fonctions réelles de x , admettant des dérivées u' et v' , la dérivée de $(u + iv)^m$, en supposant m entier, positif ou négatif, est $m(u + iv)^{m-1}(u' + iv')$. Autrement dit, si l'on pose $z = u + iv$, la dérivée de z^m est $mz^{m-1}z'$, comme si z était une fonction réelle.

Nous reviendrons sur les fonctions imaginaires aux Chapitres VII et XII.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHMIQUE. — NOMBRE e .

I. — FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHMIQUE.

80. **Fonction exponentielle.** — Soit a un nombre positif quelconque différent de l'unité. Nous savons (Chap. I) ce que représente le symbole a^x , pour toute valeur de x , positive ou négative, commensurable ou non. La fonction $y = a^x$ est donc une fonction parfaitement déterminée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On l'appelle *fonction exponentielle*. Le nombre a sera appelé *la base de la fonction*.

Des définitions successives que nous avons données pour a^x (Chap. I), il résulte que *la fonction exponentielle est toujours positive*.

THÉORÈME I. — *La fonction a^x est croissante si $a > 1$, décroissante si $a < 1$.*

En effet, soit d'abord $a > 1$. Je dis que si $x > x'$, on a $a^x > a^{x'}$. Cela a été démontré dans le cas où x et x' sont rationnels et positifs (n° 13, théorème II). Si x et x' sont irrationnels et positifs, on peut toujours trouver deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q}$, tels que $x > \frac{p}{q} > \frac{p'}{q} > x'$.

D'après la définition de a^x et $a^{x'}$ (n° 14), on a $a^x > a^{\frac{p}{q}}$, $a^{x'} < a^{\frac{p'}{q}}$.

D'après le théorème II du n° 13, on a $a^{\frac{p}{q}} > a^{\frac{p'}{q}}$. En comparant ces trois inégalités, on voit bien que $a^x > a^{x'}$.

Si x et x' ne sont pas tous deux positifs, on peut trouver un nombre positif h tel que $x + h > x' + h > 0$, et, par suite, $a^{x+h} > a^{x'+h}$. En divisant cette inégalité par le nombre positif a^h , et s'appuyant sur l'identité (10) du n° 13, on obtient $a^x > a^{x'}$.

Pour $a < 1$, démonstration analogue.

THÉORÈME II. — La fonction a^x est continue pour toutes les valeurs de x .

Soit d'abord $x_0 > 0$. Étant donné ε , il faut trouver η tel que $|h| < \eta$ entraîne

$$(1) \quad |a^{x_0+h} - a^{x_0}| < \varepsilon.$$

Nous savons (théorème IV, n° 13) qu'on peut trouver deux nombres rationnels positifs $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, comprenant x_0 et assez voisins pour qu'on ait $\left| a^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p'}{q'}} \right| < \varepsilon$. Prenons alors pour η le plus petit des nombres $\left| \frac{p}{q} - x_0 \right|$ et $\left| \frac{p'}{q'} - x_0 \right|$. Si $|h| < \eta$, x_0 et $x_0 + h$ sont compris entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$; donc, a^{x_0} et a^{x_0+h} sont compris entre $a^{\frac{p}{q}}$ et $a^{\frac{p'}{q'}}$, puisque la fonction a^x varie toujours dans le même sens quand x croît (théorème précédent). Mais alors, l'inégalité (1) est certainement vérifiée.

Soit maintenant $x_0 < 0$. On peut trouver k tel que $x_0 + k = x_1 > 0$.

La fonction étant continue pour $x = x_1$, on peut trouver η tel que $|h| < \eta$ entraîne $|a^{x_1+h} - a^{x_1}| < \varepsilon$, ou, en divisant par le nombre positif a^k , $|a^{x_0+h} - a^{x_0}| < \frac{\varepsilon}{a^k}$. Comme ε peut être pris aussi petit qu'on veut, il en est de même de $\frac{\varepsilon}{a^k}$ et la fonction est encore continue pour $x = x_0$.

81. Identités fonctionnelles. — On a les identités suivantes :

$$1^o \quad (2) \quad a^x a^y = a^{x+y}.$$

Elle a été démontrée, quels que soient x , y , a , au Chapitre I.

$$2^o \quad (3) \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Elle a été établie, au Chapitre I, pour x et y rationnels. Voici comment on peut en faire l'extension.

Supposons d'abord y rationnel et x irrationnel. Si x' est un nombre rationnel quelconque, nous pouvons écrire

$$(4) \quad (a^{x'})^y = a^{x'y}.$$

Supposons maintenant que x' tende vers x , tout en restant rationnel.

ce qui est possible (n° 55). L'égalité ne cessera pas d'être vraie; donc elle le sera encore à la limite. Or, $a^{x'}$ tend vers a^x , grâce à la continuité de la fonction exponentielle. Si maintenant l'on pose $a^{x'} = u'$ et $a^x = u$, lorsque u' tend vers u , u'^y tend vers u^y , grâce à la continuité de la fonction x^m , établie pour m rationnel (n° 75). Donc, la limite du premier membre de (4) est $(a^x)^y$. D'autre part, $x'y$ tend vers xy ; donc $a^{x'y}$ vers a^{xy} . Finalement, on a bien $(a^x)^y = a^{xy}$.

Supposons maintenant x et y *irrationnels*. Si y' est un nombre rationnel quelconque, nous pouvons écrire $(a^x)^{y'} = a^{xy'}$, d'après ce qu'on vient de voir. Faisons tendre y' vers y , par valeurs rationnelles : $(a^x)^{y'}$ tend vers $(a^x)^y$ et $a^{xy'}$ vers a^{xy} . Donc, on a encore l'identité (3) qui, maintenant, est tout à fait générale.

$$3^\circ \quad (5) \quad a_1^x a_2^x \dots a_p^x = (a_1 a_2 \dots a_p)^x.$$

Nous connaissons cette identité pour x commensurable (Chap. I). Supposons maintenant x incommensurable. Si x' est un nombre rationnel quelconque, nous pouvons écrire

$$a_1^{x'} a_2^{x'} \dots a_p^{x'} = (a_1 a_2 \dots a_p)^{x'}.$$

Faisons tendre x' vers x par valeurs rationnelles : $a_1^{x'}$, $a_2^{x'}$, ..., $a_p^{x'}$ tendent respectivement vers a_1^x , a_2^x , ..., a_p^x ; donc, leur produit tend vers $a_1^x a_2^x \dots a_p^x$ (n° 68, théorème III). D'autre part $(a_1 a_2 \dots a_p)^{x'}$ tend vers $(a_1 a_2 \dots a_p)^x$. L'égalité (5) est donc générale.

$$4^\circ \quad (6) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

En effet, multiplions les deux membres par b^x . Le second devient a^x . Le premier devient, en tenant compte de (5), $\left(b \frac{a}{b}\right)^x = a^x$.

En particulier, on a

$$(7) \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1^x}{a^x} = \frac{1}{a^x}.$$

82. THÉORÈME III. — Si $a > 1$, a^x augmente indéfiniment pour $x = +\infty$ et tend vers zéro pour $x = -\infty$. Si $a < 1$, conclusions inverses.

Soit d'abord $a > 1$. Posons $a = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Soit n la partie entière de x , supposé positif. On a

$$a^x > a^n = (1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon \quad (\text{n° 13}). \quad -$$

Quand x tend vers $+\infty$, il en est de même de n , donc de $1 + n\varepsilon$, donc de a^n , donc de a^x .

Si x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, a^{-x} également; donc $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ tend vers zéro.

Si l'on suppose maintenant $a < 1$, il suffit de poser $a = \frac{1}{b}$, d'où $a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x}$, pour se ramener au premier cas.

83. **Variations.** — Les variations de la fonction exponentielle sont évidentes, après tout ce qui précède. Lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, y croît de 0 à $+\infty$, si $a > 1$, et décroît de $+\infty$ à 0, si $a < 1$. La courbe représentative a la forme ci-après, dans le premier cas (fig. 20). Dans le second cas, elle est symétrique par rapport à $Oy^{(1)}$

de la courbe $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, puisque $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$. Quel que soit a , elle coupe Oy au point d'ordonnée $+1$, puisqu'on a toujours $a^0 = 1$.

Lorsque a est plus grand que 1, sans en être très voisin, la fonction a^x *croît très rapidement*. Pour s'en rendre compte, il suffit de prendre un exemple numérique. Soit, par exemple, $a = 3$. On a le Tableau suivant :

x	$-\infty$	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	$+\infty$
y	0	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81	243	$+\infty$

⁽¹⁾ Plus généralement, la courbe $y = b^x$ se déduit de la courbe $y = a^x$ en multipliant les abscisses par le nombre constant $\log_b a$ (n° 86), sans changer les ordonnées.

On voit que l'ordre de grandeur de y cesse rapidement d'être comparable à celui de x . La courbe représentative s'élève très vite à droite de Oy et se rapproche immédiatement de Ox à gauche de Oy .

84. Fonction logarithmique. — La fonction exponentielle de base a est définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. De plus, elle varie constamment dans le même sens. Elle peut donc servir à définir une fonction inverse (n° 72), qu'on appelle la *fonction logarithmique* de base a et qu'on désigne par la notation $y = \log_a x$ (énoncez : logarithme base a de x). On dit aussi que y est *le logarithme du nombre x dans le système de base a* . Il est défini par l'équation

$$(8) \quad x = a^y.$$

La fonction exponentielle variant entre 0 et $+\infty$ (n° 83), la fonction logarithmique est définie (1) dans l'intervalle $(0, +\infty)$. *Les nombres positifs ont donc seuls des logarithmes.*

La fonction logarithmique est continue (n° 72). Quand x croît de 0 à $+\infty$, y croît de $-\infty$ à $+\infty$, si $a > 1$; y décroît de $+\infty$ à $-\infty$, si $a < 1$ (n° 83).

Quel que soit a , on a $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$. Si $a > 1$, les logarithmes des nombres > 1 sont > 0 , les logarithmes des nombres < 1 sont < 0 . Si $a < 1$, conclusions inverses.

La courbe représentative de la fonction logarithmique se déduit de la courbe exponentielle de même base par une symétrie par rapport à la première bissectrice (n° 72) (*fig. 20*, en pointillé). Si a n'est pas très voisin de 1, la fonction $\log_a x$ est *très lentement croissante ou décroissante*.

85. Identités fonctionnelles. — Voyons ce que deviennent les identités (2) et (3) quand on les transforme au moyen de la fonction logarithmique de base a .

1° Partons d'abord de l'égalité

$$(9) \quad a^x a^y = a^{x+y}.$$

---

(1) Elle est uniforme (n° 73), c'est-à-dire que tout nombre x a un seul logarithme dans un système donné. Inversement, si deux nombres ont même logarithme dans un même système, ils sont égaux.

Si l'on pose

$$ax = x, \quad ay = x', \quad ax+y = X,$$

on a

$$y = \log_a x, \quad y' = \log_a x', \quad y + y' = \log_a X.$$

D'autre part, (9) s'écrit

$$X = xx';$$

donc

$$(10) \quad \log_a (xx') = \log_a x + \log_a x'.$$

Autrement dit, *le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes de ses facteurs*. De même que l'identité (9), cette propriété s'étend à un produit d'un nombre quelconque de facteurs. On en déduit aussi que *le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur*, ce qui résulte d'ailleurs directement de l'identité

$$\frac{ax}{a^y} = ax-y,$$

2° Partons maintenant de l'égalité

$$(11) \quad (ax)^m = a^{my},$$

qui est vraie quels que soient m et y . Posons

$$ax = x, \quad a^{my} = X;$$

d'où

$$y = \log_a x, \quad my = \log_a X.$$

L'égalité (11) s'écrit

$$x^m = X;$$

donc, on a

$$(12) \quad \log_a (x^m) = m \log_a x.$$

Autrement dit, *le logarithme de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre (m quelconque) est égal à m fois le logarithme de ce nombre*.

86. Comparaison des systèmes. — Une application immédiate de la formule (12) consiste en la comparaison des logarithmes d'un même nombre dans deux systèmes de bases différentes. Soit à comparer

$$y = \log_a x, \quad z = \log_b x.$$

On a

$$x = a^y.$$

Prenons les logarithmes des deux membres dans le système b :

$$(13) \quad \log_b x = y \log_b a = \log_a x \log_b a.$$

Donc, *pour avoir le nouveau logarithme, on multiplie l'ancien par le nouveau logarithme de l'ancienne base.*

Si, dans (13), on fait $x = b$, on a

$$(14) \quad 1 = \log_a b \log_b a.$$

La formule (13) peut donc aussi s'écrire

$$(15) \quad \log_b x = \log_a x \frac{1}{\log_a b}.$$

Le facteur constant $M = \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ par lequel il faut multiplier les anciens logarithmes pour avoir les nouveaux s'appelle le *module du système b par rapport au système a* .

87. Logarithmes arithmétiques. — Une façon élémentaire de définir les logarithmes consiste, comme on sait, à considérer deux progressions, l'une géométrique (de raison positive et différente de 1), l'autre arithmétique, qu'on écrit l'une au-dessous de l'autre, de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \frac{1}{q^3} & \frac{1}{q^2} & \frac{1}{q} & 1 & q & q^2 & q^3 & \dots \\ \dots & -3r & -2r & -r & 0 & r & 2r & 3r & \dots \end{array}$$

Les nombres de la seconde ligne sont dits les *logarithmes* des nombres correspondants de la première ligne. On étend cette définition, d'une manière plus ou moins pénible, aux nombres qui ne sont pas compris dans les progressions. Enfin, on appelle *base* le nombre qui a pour logarithme l'unité.

Les logarithmes ainsi définis prennent quelquefois le nom de *logarithmes arithmétiques*. Par opposition, ceux que nous avons déduits de la fonction exponentielle sont alors appelés *logarithmes algébriques*.

Il est possible de démontrer l'identité de ces deux espèces de logarithmes, quand la base est la même. Mais nous ne le ferons pas, car les logarithmes arithmétiques ne présentent plus guère, à notre avis, qu'un intérêt historique ⁽¹⁾.

88. Systèmes usités. — Les logarithmes possèdent deux sortes d'applications. Les unes sont purement théoriques et proviennent de l'introduction en Analyse de la fonction logarithmique. Quand on se place à ce point de vue, on prend ordinairement pour base un certain nombre qu'on désigne par la lettre e et qui sera défini un peu plus loin. Ce choix simplifie certaines formules relatives à la fonction logarithmique et présente un intérêt théorique considérable. Les logarithmes correspondants ont été imaginés par Néper, et, pour cette raison, sont appelés *logarithmes népériens*. On les appelle aussi *logarithmes naturels* ou *hyperboliques* ⁽²⁾. Nous les désignerons par le symbole $\log x$ sans indice. On les représente aussi par la notation Lx ou $\lg x$.

Une autre catégorie d'applications des logarithmes a pour origine les théorèmes relatifs aux logarithmes de produits, quotients et puissances. On conçoit en effet que, si l'on possède une Table donnant le logarithme de n'importe quel nombre et donnant réciproquement le nombre qui admet pour logarithme tout nombre donné, les multiplications, divisions et élévations à une puissance sont remplacées par des additions, soustractions et multiplications, c'est-à-dire par des opérations plus simples. De là résulte que les logarithmes sont un auxiliaire puissant du calcul numérique. La base la plus avantageuse à ce point de vue est la base 10. Elle donne naissance aux *logarithmes*

(1) C'est, en effet, sous cette forme que Néper a introduit les logarithmes dans la Science. Mais l'introduction par la fonction exponentielle est actuellement beaucoup plus commode et élégante. On pourra objecter que bien des personnes se servent des logarithmes dans les calculs numériques sans connaître pour cela la fonction exponentielle. Mais, à ce point de vue, il suffit d'admettre que les Tables ont pu être construites de telle manière que les règles relatives aux logarithmes de produits, quotients et puissances soient exactes; lesquelles pourraient d'ailleurs faire partie des instructions générales données pour l'usage des Tables.

(2) La raison de cette dernière dénomination provient de ce que $\log x$ mesure l'aire comprise entre O, x , l'ordonnée $+1$, l'ordonnée x et l'hyperbole équilatère d'équation $y = \frac{1}{x}$ (EXERC. : Chap. XIV; exercice résolu n° 4.)

vulgaires ou décimaux, dont les propriétés et l'usage sont bien connus du lecteur ⁽¹⁾.

Le module d'un système de base a par rapport au système népérien, soit $M = \frac{1}{\log a}$, s'appelle son *module absolu*. Le module absolu des logarithmes vulgaires a pour valeur approchée 0,43429448...

89. Fonction x^m . — Cette fonction, où m désigne un nombre fixe quelconque, se rattache très simplement aux fonctions exponentielle et logarithmique. En prenant par exemple pour base le nombre e , on peut écrire, en supposant $x > 0$,

$$(16) \quad y = e^{m \log x},$$

car $\log y = \log(x^m) = m \log x$ [n° 85, formule (12)].

Nous avons démontré la *continuité* de x^m pour m rationnel (n° 75). Nous pouvons maintenant l'établir *quel que soit* m . Si l'on pose en effet $m \log x = u$, d'où $y = e^u$, on sait que y est fonction continue de u et u fonction continue de x ; donc, y est fonction continue de x (n° 71).

On peut aussi très simplement connaître le sens de variation de y . Les fonctions $\log x$ et e^u sont croissantes, car nous verrons que $e > 1$ (n° 91). D'autre part, $u = m \log x$ varie dans le même

(1) Il est aisé de retrouver ces propriétés : Le nombre 10^n a pour logarithme n . — Tout nombre N supérieur à 1 a un logarithme positif, dont la partie entière ou *caractéristique*, s'obtient en retranchant 1 du nombre de chiffres de la partie entière de N . En effet, si p désigne ce nombre de chiffres, on a

$$10^{p-1} \leq N < 10^p,$$

donc

$$p-1 \leq \log N < p.$$

Tout nombre N plus petit que 1 a un logarithme négatif, que l'on écrit au moyen d'une caractéristique négative, suivie d'une *mantisse* positive. Cette caractéristique est égale au rang p du premier chiffre décimal non nul de N . En effet, on a

$$10^{1-p} > N \geq 10^{-p},$$

d'où

$$1-p > \log N \geq -p, \quad \log N = -p + b,$$

b étant compris entre 0 et 1. Deux nombres décimaux qui ne diffèrent que par la position de la virgule ont même mantisse, car leur rapport est une puissance entière de 10 et par suite leurs logarithmes diffèrent par un nombre entier (n° 85, 1°).

sens que $\log x$ ou dans le sens opposé, suivant que m est > 0 ou < 0 . Donc, la fonction x^m est croissante pour $m > 0$ et décroissante pour $m < 0$.

II. — NOMBRE e .

90. Limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$. — A l'étude de la fonction exponentielle se rattache étroitement la question suivante : *Trouver la limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = y_m$ lorsque, x restant fixe, m augmente indéfiniment en valeur absolue.*

Observons d'abord que cette limite n'est pas évidente et donne lieu à une indétermination. Nous avons en effet, en nous bornant au cas de m entier > 0 , le produit d'un nombre de plus en plus grand de facteurs qui deviennent de plus en plus voisins de 1. On ne peut rien dire *a priori* d'un tel produit. D'ailleurs $\log y_m = m \log \left(1 + \frac{x}{m}\right)$ se présente à la limite sous la forme indéterminée $\infty \times 0$ (n° 126, III).

Il s'agit alors de lever cette indétermination.

1° *m augmente indéfiniment par valeurs entières et positives.* — Nous pouvons développer y_m par la formule du binôme, soit

$$(17) \quad y_m = 1 + \frac{m}{1} \frac{x}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{m^2} + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} \frac{x^p}{m^p} \\ + \frac{m(m-1) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots m} \frac{x^m}{m^m}.$$

Le terme général de ce développement peut s'écrire, en divisant par m chacun des p facteurs du produit $m(m-1) \dots (m-p+1)$,

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{m}\right) \frac{x^p}{p!}.$$

Si, laissant p fixe, on fait croître m indéfiniment, il tend évidemment vers $\frac{x^p}{p!}$. Comme, d'autre part, le nombre des termes augmente indéfiniment, le développement (17) se présente à la limite sous la forme de la série

$$(18) \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^p}{p!} + \dots$$

La règle de d'Alembert nous apprend que cette série est

absolument convergente quel que soit x , car le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$ tend vers zéro. On est donc conduit à penser que la limite cherchée est la somme x de la série (18). Mais, il ne faudrait pas considérer ce qui précède comme une démonstration suffisante, car, si deux sommes variables sont composées de termes tendant deux à deux vers les mêmes limites, on ne peut affirmer que les deux sommes ont même limite que si le nombre des termes reste fini, ce qui n'est pas le cas pour la somme y_m et pour la somme S_m des $(m+1)$ premiers termes de la série (18).

Néanmoins, la propriété annoncée est exacte et nous allons en donner une démonstration rigoureuse. Je dis qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre entier M tel que l'inégalité $m > M$ entraîne la suivante

$$(19) \quad |y_m - x| < \varepsilon.$$

Le nombre entier p étant au plus égal à m , considérons les sommes S_p et Σ_p^m des $(p+1)$ premiers termes de y et de y_m . Nous pouvons écrire

$$(20) \quad y_m - x = (y_m - \Sigma_p^m) + (\Sigma_p^m - S_p) + (S_p - x).$$

Nous allons tâcher de rendre chacune des parenthèses inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$ en valeur absolue : nous serons alors assurés de l'inégalité (19).

La série (18) étant convergente et ayant pour somme x , nous pouvons déterminer un nombre naturel P tel que $p > P$ entraîne

$$(21) \quad |S_p - x| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Considérons maintenant la différence $(y_m - \Sigma_p^m)$. Chacun de ses termes est le produit du terme correspondant de (18) par des facteurs plus petits que 1. Donc, la valeur absolue de $(y_m - \Sigma_p^m)$ est inférieure à la somme des valeurs absolues des $m - p$ termes de (18) qui suivent le $(p+1)^{\text{ième}}$ et, *a fortiori*, inférieure au reste ε_p de la série $\left| \frac{x^p}{p!} \right|$. Comme cette dernière est convergente, on peut trouver P' tel que $p > P'$ entraîne $\varepsilon_p < \frac{\varepsilon}{3}$ et, par suite (en supposant, bien entendu, $m > p$),

$$(22) \quad |y_m - \Sigma_p^m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Choisissons alors le nombre p supérieur à la fois à P et P' et *u'y touchons plus*. La différence $(\Sigma_p^m - S_p)$ est un polynôme en $\frac{1}{m}$, qui est nul pour $\frac{1}{m} = 0$. Comme tout polynôme est une fonction continue (n° 75), on peut déterminer η tel que $\frac{1}{m} < \eta$ entraîne

$$(23) \quad |\Sigma_p^m - S_p| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dès lors, si nous prenons M supérieur au plus grand des deux nombres p et $\frac{1}{\eta}$, nous serons certains que $m > M$ entraîne (23) et (22). Comme nous avons déjà (21), nous aurons (19). c. q. r. d.

2° *m augmente indéfiniment par valeurs positives quelconques.* — Soit μ la partie entière de m . Suivant que x est positif ou négatif, on a les inégalités de gauche ou de droite écrites ci-dessous (1) :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x}{\mu} \leq 1 + \frac{x}{m} &> 1 + \frac{x}{\mu+1}, & 1 + \frac{x}{\mu} = 1 + \frac{x}{m} < 1 + \frac{x}{\mu+1}, \\ \left(1 + \frac{x}{\mu}\right)^{\mu+1} &\geq \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m & \left(1 + \frac{x}{\mu}\right)^{\mu+1} < \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \\ &> \left(1 + \frac{x}{\mu+1}\right)^{\mu}, & < \left(1 + \frac{x}{\mu+1}\right)^{\mu}. \end{aligned}$$

Supposons que m augmente indéfiniment; il en est de même de μ . D'après (1°), $\left(1 + \frac{x}{\mu}\right)^{\mu}$ et $\left(1 + \frac{x}{\mu+1}\right)^{\mu+1}$ tendent vers e^x . Quant à $\left(1 + \frac{x}{\mu}\right)^{\mu+1}$ et $\left(1 + \frac{x}{\mu+1}\right)^{\mu}$, ils s'écrivent respectivement $\left(1 + \frac{x}{\mu}\right)^{\mu} \cdot \left(1 + \frac{x}{\mu}\right)$ et $\left(1 + \frac{x}{\mu+1}\right)^{\mu+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{\mu+1}}$. Comme $1 + \frac{x}{\mu}$ et $1 + \frac{x}{\mu+1}$ ont pour limite 1, ils tendent encore vers e^x . Quel que soit le signe de x , $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ reste compris entre deux nombres qui tendent vers e^x ; il tend donc lui-même vers e^x .

(1) À droite, on suppose m assez grand pour que $1 + \frac{x}{\mu}$ soit positif, afin qu'on puisse passer de la première ligne à la seconde. Pour faire ce passage on s'appuie, d'ailleurs, sur la variation de la fonction exponentielle (n° 83) et sur celle de la fonction x^m (n° 89).

3^o m tend vers $-\infty$. — Soit $m = -p$. On a

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m &= \left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{p}\right)^p} = \left(\frac{p}{p-x}\right)^p = \left(1 + \frac{x}{p-x}\right)^p \\ &= \left(1 + \frac{x}{p-x}\right)^{p-x} \left(1 + \frac{x}{p-x}\right)^x. \end{aligned}$$

Si m tend vers $-\infty$, p tend vers $+\infty$, ainsi que $p-x$. Donc $\left(1 + \frac{x}{p-x}\right)^{p-x}$ tend vers y . En outre, $\left(1 + \frac{x}{p-x}\right)^x$ tend vers 1^x (n^o 89), c'est-à-dire vers 1. Par conséquent, $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ tend encore vers y .

Finalement, *quelle que soit la manière dont m augmente indéfiniment, y_m tend vers la somme y de la série* (18).

91. **Nombre e .** — Le nombre e , base des logarithmes népériens, est la valeur que prend y pour $x=1$. C'est donc la limite, pour m infini, de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, ou encore la somme de la série

$$(24) \quad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Cette dernière expression du nombre e permet d'en avoir aisément des valeurs approchées. Si on limite le développement à ses $n+1$ premiers termes, on commet une erreur

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right] \\ &< \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right] = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}, \\ (25) \quad R_n &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{\theta}{n} \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

Pour calculer e avec une approximation donnée, il suffit alors d'appliquer les principes généraux du calcul numérique des séries (Chap. IV). On trouve ainsi

$$e = 2,718281828, \dots$$

Le nombre e est incommensurable. En effet, si une fraction $\frac{p}{q}$

était égale à e , on aurait

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q!} \frac{\theta}{q} \quad (0 < \theta < 1).$$

En multipliant par $q!$ et résolvant par rapport à $\frac{\theta}{q}$, on voit que $\frac{\theta}{q}$ serait un nombre entier, ce qui est impossible puisque θ est compris entre 0 et 1.

Hermite a démontré que *le nombre e est transcendant*, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers.

92. De la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, on peut déduire la *limite de toute expression de la forme* $(1 + x)^{\beta}$, lorsque x tend vers zéro et β vers l'infini positif ou négatif. En effet, posons $x = \frac{1}{m}$; nous avons

$$(1 + x)^{\beta} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^{\frac{\beta}{m}} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^{x\beta}.$$

Lorsque x tend vers zéro, m augmente indéfiniment, $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ tend vers e . D'autre part, supposons que le produit $x\beta$ tende vers une limite déterminée λ . Je dis que l'expression proposée tend vers e^{λ} . En effet, si l'on pose $u = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ et $v = x\beta$, on a

$$(1 + x)^{\beta} = u^v = e^{v \log u}.$$

Quand x tend vers zéro, u tend vers e , donc $\log u$ tend vers $\log e = 1$, puisque la fonction logarithmique est continue. D'autre part, v tend vers λ ; donc $v \log u$ tend aussi vers λ (n° 68), et par suite $e^{v \log u}$ tend vers e^{λ} , puisque la fonction exponentielle est continue.

Comme on le voit, la recherche de la limite en question se ramène à celle de la limite du produit $x\beta$, c'est-à-dire à un problème, en général, beaucoup plus simple et pour la résolution duquel on possède des méthodes précises (n° 126, III). En particulier, on peut calculer de cette manière la limite y de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$. Ici, le produit $x\beta$ est constamment égal à x ; donc $y = e^x$. Nous avons donc l'identité très im-

portante

$$(26) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

qui nous donne le *développement de la fonction e^x en série entière* (Chap. VII).

On peut en déduire le développement de a^x en remarquant que l'on a

$$(27) \quad a^x = e^{x \log a};$$

donc

$$(28) \quad a^x = 1 + x \frac{\log a}{1} + x^2 \frac{(\log a)^2}{2!} + \dots + x^n \frac{(\log a)^n}{n!} + \dots$$

93. Dérivées des fonctions exponentielle et logarithmique. — Une autre application des considérations qui précèdent consiste dans le *calcul de la dérivée de la fonction exponentielle*. Il nous faut la limite pour $h = 0$, du rapport $\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$. Tout revient donc à calculer la limite de $\frac{a^h - 1}{h}$. On peut l'obtenir immédiatement par le développement (28), qui donne

$$\frac{a^h - 1}{h} = \log a + h\zeta,$$

ζ désignant une quantité qui reste finie quand h tend vers zéro ⁽¹⁾. Quand h tend vers zéro, le second membre tend vers $\log a$.

On peut aussi se passer du développement (28), en raisonnant comme il suit. Posons $a^h - 1 = z$; d'où $h = \log_a(1 + z)$. Notre rapport s'écrit $\frac{z}{\log_a(1+z)} = \frac{1}{\log_a \left[(1+z)^{\frac{1}{z}} \right]}$. Or, le crochet tend vers e (n° 92); donc $\frac{a^h - 1}{h}$ tend vers $\frac{1}{\log_a e} = \log a$ (n° 86).

Finalement, on a

$$(29) \quad (a^x)' = a^x \log a.$$

(1) Si l'on suppose, par exemple, $|h| < 1$, $|\zeta|$ est plus petit que la somme de la série convergente $\frac{|\log a|^2}{2!} + \frac{|\log a|^3}{3!} + \dots$.

En particulier

$$(30) \quad (e^x)' = e^x.$$

La théorie des fonctions inverses nous donne maintenant *la dérivée de la fonction logarithmique*. Soit $y = \log_a x$. On a (n° 72)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \text{ Or, } x = a^y; \text{ donc}$$

$$(31) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a}.$$

En particulier, si $a = e$, on a

$$(32) \quad (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

94. *Dérivée de x^m* . — En utilisant la formule (16), nous avons

$$(33) \quad (x^m)' = (e^{m \log x})' = e^{m \log x} (m \log x)' = x^m \frac{m}{x} = m x^{m-1},$$

c'est-à-dire la même formule que pour m entier positif (n° 73). On en déduit, toujours comme pour m entier positif,

$$(34) \quad \frac{d^p (x^m)}{dx^p} = m(m-1) \dots (m-p+1) x^{m-p}.$$

Mais, si m n'est pas entier positif, cette dérivée $p^{\text{ème}}$ n'est jamais nulle, si grand que soit p .

95. *Dérivée logarithmique*. — Si u est une fonction continue de x , possédant une dérivée u' , la fonction $y = \log |u|$ est aussi continue et possède une dérivée (n° 71). Suivant que u est > 0 ou < 0 , on a

$$y = \log u, \quad y' = \frac{u'}{u}; \quad y = \log(-u), \quad y' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}.$$

Donc, *la dérivée de $\log |u|$ est la dérivée logarithmique de u* (n° 68). On s'explique maintenant la dénomination employée pour désigner le rapport $\frac{u'}{u}$, ainsi que les propriétés établies au Chapitre V pour la dérivée logarithmique d'un produit ou d'un quotient. Ces dernières sont, en effet, des conséquences manifestes des théorèmes du n° 85.

96. **Limites se rattachant à la fonction exponentielle.** — Il existe toute une catégorie d'expressions, fonctions de x , se présentant, pour certaines valeurs de cette variable, sous une forme indéterminée et dont on peut trouver aisément la limite grâce aux propriétés de la fonction exponentielle. *Elles se ramènent toutes à la suivante :*

La limite de $\frac{e^x}{x}$, pour $x = +\infty$, est infinie.

En effet, si x est positif, on a évidemment, grâce à la formule (26),

$$e^x > \frac{x^2}{2}, \quad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2};$$

d'où résulte manifestement la propriété annoncée.

On déduit de là les limites suivantes :

1° *Limite de $y = \frac{e^x}{x^m}$, pour $x = \pm\infty$.* — On peut écrire

$$y = \left(\frac{\frac{x}{e^m}}{x} \right)^m.$$

Si $m > 0$ (commensurable ou non), il n'y a indétermination que pour $x = +\infty$. On pose alors $\frac{x}{e^m} = z$, d'où

$$y = \frac{1}{m^m} \left(\frac{e^z}{z} \right)^m.$$

Pour $x = +\infty$, on a $z = +\infty$, $\frac{e^z}{z} = +\infty$, $\left(\frac{e^z}{z} \right)^m = +\infty$, $y = +\infty$.

Si $m < 0$, il n'y a indétermination que pour $x = -\infty$. (L'expression n'a alors un sens que si m est commensurable et de la forme $\frac{-p}{2q+1}$). En posant toujours $\frac{x}{e^m} = z$, on a, pour $x = -\infty$: $z = +\infty$, $\frac{e^z}{z} = +\infty$, $\left(\frac{e^z}{z} \right)^m = 0$, $y = 0$.

2° *Limite de $y = \frac{e^x}{P(x)}$, pour $x = +\infty$, $P(x)$ étant un polynôme.*

— Si m est le degré de ce polynôme ⁽¹⁾, on peut écrire

$$y = \frac{e^x}{x^m} \cdot \frac{x^m}{P(x)}.$$

(1) On peut très bien supposer que m n'est pas entier et que $P(x)$ est une expression de la forme $\sum \lambda x^p$, les exposants p étant quelconques : m sera alors le plus grand de ceux-ci.

Le premier facteur tend vers $+\infty$, le second vers l'inverse du premier coefficient de $P(x)$ (n° 126, II), donc y vers $+\infty$.

3° *Limite de $y = e^x P(x)$, pour $x = -\infty$.* — On peut écrire

$$y = \frac{e^x}{x^{-m}} \frac{P(x)}{x^m}.$$

Le premier facteur tend vers zéro, le second vers le premier coefficient de $P(x)$, donc y vers zéro.

4° *Limite de $y = \frac{a^x}{x^m}$, pour $x = \pm \infty$.* — On pose $x \log a = z$; d'où

$$y = \frac{e^z}{z^m} (\log a)^m.$$

Si $a > 1$, $\log a > 0$, z tend vers $\pm \infty$ en même temps que x ; la limite est donc la même que celle de $\frac{e^z}{z^m}$. Si $a < 1$, $\log a < 0$, z tend vers $\mp \infty$; la limite est zéro ou $+\infty$, suivant que $x = +\infty$ ou $x = -\infty$.

On peut déduire de là les limites de $\frac{a^x}{P(x)}$ ou de $a^x P(x)$.

Remarque. — On peut constater que, dans chacun des cas précédents, la quantité étudiée a même limite que l'exponentielle qui y figure. On peut alors résumer tout ceci en disant que *toutes les fois qu'une exponentielle est contrariée par un polynôme* ⁽¹⁾, *c'est l'exponentielle qui l'emporte*. C'est là un moyen commode d'apercevoir tout de suite la limite cherchée. Ceci s'explique d'ailleurs par le fait que *l'exponentielle est une fonction à croissance très rapide, plus rapide que celle de n'importe quel polynôme*.

5° *Limite de $y = \frac{\log x}{x^m}$, pour $x = +\infty$ et $m > 0$.* — Posons $x^m = e^z$, d'où $z = m \log x$, puis

$$y = \frac{1}{m} \frac{z}{e^z}.$$

Pour $x = +\infty$, on a $\log x = +\infty$, $z = +\infty$, $\frac{z}{e^z} = 0$, donc $y = 0$.

⁽¹⁾ Le mot *polynôme* peut être pris au sens plus large expliqué dans la note de la page précédente.

6^o *Limite de $y = x^m \log x$, pour $x = 0$ et $m > 0$.* — Posons $x^m = e^{-z}$, d'où $z = -m \log x$, puis

$$y = -\frac{1}{m} \frac{z}{e^z}.$$

Pour $x = 0$, on a $\log x = -\infty$, $z = +\infty$, $\frac{z}{e^z} = 0$, donc $y = 0$.

Comme plus haut, on peut déduire de là les limites d'expressions de la forme $\frac{\log x}{P(x)}$ ou $P(x) \log x$.

Remarque. — On peut constater cette fois que la limite de y est toujours inverse de celle de $\log x$. Autrement dit, *toutes les fois qu'un logarithme est contrarié par un polynôme, c'est le polynôme qui l'emporte*. Ceci s'explique par le fait que *la fonction logarithmique est une fonction à croissance très lente, plus lente que celle de n'importe quel polynôme*.

CHAPITRE VII.

SÉRIES ENTIÈRES.

---

97. Imaginons une série dont chaque terme soit une fonction de x . Supposons qu'elle soit convergente tant que x reste intérieur à un certain intervalle (a, b) , qu'on peut appeler *intervalle de convergence*. Il est clair que la somme de la série est une fonction bien déterminée de x dans cet intervalle. Voilà donc un moyen commode de construire un nombre illimité de fonctions. Ce procédé est très usité en Analyse et a donné lieu à des recherches savantes qui ne sauraient trouver place dans cet Ouvrage. Nous nous bornerons à examiner un cas très simple et d'ailleurs fondamental; c'est celui des *séries entières*. On appelle ainsi toute série de la forme

$$(1) \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

où les a_i sont des constantes, qu'on appelle *les coefficients de la série*.

98. **Intervalle de convergence.** — La première chose à faire est de s'occuper de la convergence. Suivant la nature des coefficients, il peut arriver que la série soit convergente quel que soit x (Ex. : $\frac{x^n}{n!}$), ou bien divergente quel que soit x (Ex. : $n!x^n$; le rapport $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ tend vers $+\infty$, donc le terme général ne peut tendre vers zéro), ou tantôt convergente, tantôt divergente (Ex. : $1 + x + x^2 + \dots$, qui converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| \geq 1$). La classification des valeurs qui font converger la série repose sur le théorème suivant :

THÉOREME 1. — *Si la série converge pour $x = x_0$, elle est absolument convergente pour toutes les valeurs de x dont la valeur absolue est inférieure à $|x_0|$.*

En effet, la série $a_n x_0^n$ étant convergente, son terme général tend vers zéro. Par suite, on peut trouver un nombre positif fixe Λ tel qu'on ait, pour toutes les valeurs de n ,

$$|a_n x_0^n| < \Lambda,$$

d'où

$$|a_n| < \frac{\Lambda}{|x_0|^n}, \quad |a_n x^n| < \Lambda \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Or, si $|x| < |x_0|$, on a $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$; la série $\Lambda \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ est une progression convergente; donc $|a_n x^n|$ est aussi convergente (n° 42) et la série (1) est absolument convergente (n° 47).

Remarque. — Il n'est pas nécessaire que la série converge pour x_0 ; il suffit que son terme général soit borné supérieurement en valeur absolue.

COROLLAIRE. — *Si la série diverge pour $x = x_0$, elle diverge pour $|x| > |x_0|$.* Car si elle convergerait pour une valeur x_1 de module $> x_0$, elle convergerait pour $|x| < x_1$, donc pour $x = x_0$.

Remarque. — Pour $|x| > |x_0|$, on peut même dire que le terme général croît indéfiniment en valeur absolue; cela résulte de la remarque faite plus haut.

Cela posé, rien n'est plus facile (du moins théoriquement) que de trouver l'intervalle de convergence de la série. Rangeons dans une première classe tous les nombres positifs qui rendent la série convergente et, dans une seconde classe, ceux qui la rendent divergente. Je dis que nous faisons une coupure (au sens du n° 10). En effet, aucun nombre positif n'échappe à la classification car, quel que soit x , la série est soit convergente, soit divergente. En second lieu, tout nombre x_1 de la première classe est inférieur à tout nombre x_2 de la seconde classe, car si x_1 était plus grand que x_2 , il ferait diverger la série, en vertu du corollaire ci-dessus. *Cette coupure définit un nombre R.* Je dis que *l'intervalle de convergence est $(-R, +R)$.*

En effet, si x est compris dans cet intervalle, on peut trouver un nombre x_1 de la première classe de R qui soit supérieur à $|x|$. Comme la série converge pour x_1 , elle est absolument convergente pour x (théorème I).

Au contraire, supposons x extérieur à l'intervalle précédent. S'il faisait converger la série, on pourrait trouver un nombre x_2 de la seconde classe de R qui serait inférieur à $|x|$ et rendrait par suite la série convergente, ce qui est contradictoire avec la définition de R .

Finalement, nous avons prouvé que *la série converge absolument pour toute valeur comprise entre $-R$ et $+R$ et qu'elle diverge pour toute valeur extérieure. Mais, nous ne pouvons rien affirmer pour les limites $-R$ et $+R$ de l'intervalle* ⁽¹⁾. Le nombre R sera appelé *rayon de convergence*.

Remarque. — Il peut arriver évidemment que le nombre R soit nul ou infini. Dans le premier cas, la série est toujours divergente (sauf pour $x = 0$, ce qui est sans intérêt); dans le second cas, elle est toujours convergente (*voir* les exemples cités plus haut).

99. Calcul du rayon de convergence. — Pour calculer R , il suffit, la plupart du temps, d'appliquer à la série des modules les règles ordinaires de convergence des séries à termes positifs. Posons

$$|x| = \xi, \quad |a_n| = z_n, \quad z_n \xi^n = u_n.$$

Appliquons la règle de d'Alembert, nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z_{n+1}}{z_n} \xi.$$

Si $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ tend vers une certaine limite λ , $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\lambda \xi$; d'où il résulte manifestement que *le rayon de convergence est $\frac{1}{\lambda}$* .

On peut aussi appliquer la règle de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \xi \sqrt[n]{z_n}.$$

Si $\sqrt[n]{z_n}$ tend vers une limite μ , *le rayon de convergence est $\frac{1}{\mu}$* .

(1) On peut trouver des exemples pour lesquels la série converge aux deux extrémités de l'intervalle, par exemple $u_n = \frac{x^n}{n^2}$; d'autres pour lesquels elle diverge aux deux extrémités, par exemple $u_n = x^n$; d'autres enfin pour lesquels il y a convergence à une extrémité et divergence à l'autre, par exemple $u_n = \frac{x^n}{n}$.

Ceci nous prouve en passant que si ces deux limites existent simultanément, elles sont nécessairement égales (*cf.* n° 43).

Si aucune d'elles n'existe, on a le théorème suivant, dû à M. Hadamard :

THÉORÈME II (Hadamard). — *Le rayon de convergence est l'inverse de la plus grande des limites de la suite $x_1, \sqrt{x_2}, \sqrt[3]{x_3}, \dots, \sqrt[n]{x_n}, \dots$*

En effet, soit λ cette plus grande des limites (n° 39).

1°. Si $\xi < \frac{1}{\lambda}$, la série u_n est convergente. — En effet, si petit que soit ε , nous savons qu'à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{x_n}$ reste plus petit que $\lambda + \varepsilon$; donc $\sqrt[n]{u_n} < \xi(\lambda + \varepsilon)$. Or, on peut choisir ε assez petit pour que $\xi(\lambda + \varepsilon) < 1$, car cela revient à $\varepsilon < \frac{1}{\xi} - \lambda$, inégalité possible pour une valeur positive de ε , grâce à l'hypothèse $\frac{1}{\xi} > \lambda$. Dans ces conditions, la règle de Cauchy prouve la convergence de la série.

2°. Si $\xi > \frac{1}{\lambda}$, la série u_n est divergente. — En effet, si petit que soit ε et si grand que soit N , on peut trouver $n > N$ tel que $\sqrt[n]{x_n} > \lambda - \varepsilon$, d'où $\sqrt[n]{u_n} > \xi(\lambda - \varepsilon)$. Or, on peut choisir ε assez petit pour que $\xi(\lambda - \varepsilon) > 1$. On aura alors, pour des valeurs de n aussi grandes qu'on le voudra, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, d'où $u_n > 1$. Le terme général ne peut donc pas tendre vers zéro; la série est divergente.

100. Convergence uniforme. — Imaginons une série dont tous les termes soient des fonctions de x telles que la série soit convergente dans un certain intervalle (a, b) . Appelons $R_n(x)$ le reste $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$. Étant donné un nombre positif ε et une valeur x de l'intervalle (a, b) , on peut toujours trouver un nombre naturel N_x tel que $n > N_x$ entraîne

$$(2) \quad |R_n(x)| < \varepsilon.$$

Cela résulte simplement de ce que la série est convergente pour la valeur de x considérée. Si nous donnons maintenant à x une autre valeur de l'intervalle (a, b) et si nous gardons la même valeur pour ε , on pourra encore satisfaire à l'inégalité (2), mais à partir d'un rang qui pourra très bien ne plus être N_x . Autrement dit, le nombre N_x dépend non seulement de ε , mais encore de la valeur attribuée à x . Il est clair, d'ailleurs, qu'on peut toujours le remplacer par un nombre supérieur quelconque. On peut alors se demander si, pour

une valeur donnée de ε , il n'est pas possible de trouver un nombre fixe N supérieur à tous les nombres N_x , c'est-à-dire tel que $n > N$ entraîne (2), mais quelle que soit la valeur attribuée à x dans l'intervalle (a, b) . S'il en est ainsi, on dit que la série est *uniformément convergente* dans l'intervalle (a, b) .

THÉORÈME. — *Toute série entière est uniformément convergente dans tout intervalle intérieur à l'intervalle de convergence.*

En effet, on peut trouver un nombre r plus petit que R et supérieur au plus grand des deux nombres $|a|$ et $|b|$. Quel que soit x dans l'intervalle (a, b) , on a alors $|x| < r$; d'où

$$|R_n(x)| < x_{n+1}r^{n+1} + x_{n+2}r^{n+2} + \dots$$

Or, le second membre est le reste de la série convergente $(x_n r^n)$. On peut donc trouver N tel que, si $n > N$, ce reste soit plus petit que ε ; l'inégalité (2) sera alors, *a fortiori*, vérifiée, quelle que soit la valeur attribuée à x dans l'intervalle (a, b) .

Remarque. — On voit que la démonstration ne serait pas valable si l'un des nombres a et b était $+R$ ou $-R$ (1). Il faut bien remarquer que l'intervalle (a, b) doit être *tout entier intérieur à l'intervalle de convergence*.

101. Continuité. — **THÉORÈME (2).** — *Une série entière est une fonction continue pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle de convergence.*

En effet, soit $S(x)$ la somme de la série (1). Étant donné ε , il faut trouver η tel que $|h| < \eta$ entraîne

$$(3) \quad |S(x+h) - S(x)| < \varepsilon,$$

le nombre h devant, en outre, être tel que $x+h$ soit dans l'intervalle de convergence.

On a, en appelant $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la

(1) Il faudrait, pour qu'elle le fût, que la série fût absolument convergente pour $x = \pm R$. On prendrait alors $r = R$ et l'on remplacerait les signes $<$ par $\leq$.

(2) Voir un théorème analogue pour une série de fonctions quelconques dans *Leçons* t. II, n° 234).

série,

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

$$(4) \quad S(x+h) - S(x) = [S_n(x+h) - S_n(x)] + [R_n(x+h) - R_n(x)].$$

Nous allons tâcher de rendre chacun des crochets inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$ en valeur absolue. Commençons par imposer au nombre h la condition

$$(5) \quad |h| < h_0,$$

h_0 étant un nombre positif inférieur à $R - |x|$, de telle sorte que $x + h$ soit constamment dans l'intervalle $(x - h_0, x + h_0)$, intérieur lui-même à l'intervalle de convergence. Nous pouvons maintenant déterminer n de manière qu'on ait

$$(6) \quad |R_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

pour toute valeur de h vérifiant (5), puisque la série est uniformément convergente dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$. Le nombre n étant ainsi choisi, nous n'y touchons plus et nous sommes assurés de l'inégalité (6) et par suite de la suivante, obtenue pour $h = 0$,

$$(7) \quad |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Considérons maintenant le premier crochet. $S_n(x)$ est un polynôme en x ; donc (n° 73), on peut trouver h_1 tel que $|h| < h_1$ entraîne

$$(8) \quad |S_n(x+h) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dès lors, si nous prenons pour τ_1 le plus petit des deux nombres h_0 et h_1 , nous serons certains que l'inégalité $|h| < \tau_1$ entraînera (6), (7), (8) et par suite (3) ⁽¹⁾.

Remarque. — La démonstration n'est pas valable pour $x = \pm R$. Et d'ailleurs, on ne sait même pas si, pour ces valeurs, la série est convergente. On démontre néanmoins que, si elle l'est pour $x = R$ par exemple, sa somme est la limite vers laquelle tend $S(x)$ lorsque x tend vers R .

(1) Le lecteur ne manquera pas de remarquer l'analogie entre cette démonstration et celle du n° 90.

COROLLAIRE I. — *Si une série entière est nulle pour toutes les valeurs de x d'un intervalle (a, b) donné et contenant zéro, tous ses coefficients sont nuls.*

En effet, d'abord $S(0) = 0$; donc $a_0 = 0$. Soit a_p le premier coefficient non nul, en admettant qu'il existe. On a

$$S(x) = x^p(a_p + a_{p+1}x + a_{p+2}x^2 + \dots) = x^p \Sigma(x).$$

La série $\Sigma(x)$ est continue pour $x = 0$. On peut donc trouver τ_1 tel que $|x| < \tau_1$ entraîne $|\Sigma(x) - a_p| < \varepsilon$, si petit que soit ε . Si l'on suppose $\varepsilon < |a_p|$, on voit que $\Sigma(x)$ ne peut être nulle pour aucune des valeurs de l'intervalle $(-\tau_1, +\tau_1)$. Il en est donc de même de $S(x)$, si l'on excepte la valeur zéro pour x . On met ainsi en évidence une infinité de valeurs de l'intervalle (a, b) qui n'annuleraient pas $S(x)$. Il n'y a donc pas de premier coefficient non nul dans la série: autrement dit, tous les coefficients sont nuls. c. q. f. d.

COROLLAIRE II. — *Si deux séries entières prennent les mêmes valeurs dans un intervalle contenant zéro, elles ont les mêmes coefficients.*

Car leur différence s'annule dans cet intervalle.

Il revient au même de dire qu'une fonction ne peut être développée en série entière que d'une seule manière.

102. Intégration des séries entières. — La fonction $S(x)$ étant continue dans l'intervalle $(-R, +R)$, on peut l'intégrer entre deux valeurs quelconques de cet intervalle ⁽¹⁾. Proposons-nous de calculer par exemple $\int_0^r S(x) dx$. Il est tout naturel de se demander si, comme pour les polynômes, on ne peut pas *intégrer terme à terme*. Essayons donc de démontrer l'identité

$$(9) \quad \int_0^r S(x) dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots,$$

en supposant $|x| < R$.

⁽¹⁾ Nous anticipons ici sur le Chapitre XII. Le lecteur pourra, dans une première lecture, passer ce numéro, tout en en admettant le résultat pour le numéro suivant.

Appelons $\Sigma_n(x)$ la somme des $n + 1$ premiers termes de la série (9). Si nous prouvons qu'étant donné ε , on peut trouver N tel que $n > N$ entraîne

$$(10) \quad \left| \int_0^x S(x) dx - \Sigma_n(x) \right| < \varepsilon,$$

nous aurons évidemment démontré que la série (9) est convergente et a pour somme $\int_0^x S(x) dx$. Or, quel que soit n , on a

$$\int_0^x S_n(x) dx = \Sigma_n(x);$$

donc

$$\int_0^x S(x) dx - \Sigma_n(x) = \int_0^x R_n(x) dx.$$

Mais, d'après la formule de la moyenne (n° 145), on a

$$\int_0^x R_n(x) dx = x R_n(\theta x) \quad (0 < \theta < 1).$$

D'autre part, en vertu de la convergence uniforme de $S(x)$, nous pouvons trouver N tel que $n > N$ entraîne

$$|R_n(x')| < \frac{\varepsilon}{|x'|},$$

quel que soit x' compris entre $-x$ et $+x$. Comme θx satisfait à cette dernière condition, on aura certainement

$$|R_n(\theta x)| < \frac{\varepsilon}{|\theta x|},$$

d'où

$$|x R_n(\theta x)| < \varepsilon,$$

d'où l'inégalité (10).

Finalement, nous voyons que toute série entière peut être intégrée terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence.

Remarques. — I. Pour avoir une primitive quelconque de $S(x)$, il suffit d'ajouter un terme constant quelconque à la série (9).

II. La série des primitives admet un intervalle de convergence au moins égal à celui de la série proposée.

103. Différentiation des séries entières. — Posons-nous mainte-

nant le problème inverse du précédent. Cherchons la dérivée $S'(x)$ de $S(x)$, si elle existe ⁽¹⁾.

Considérons, cette fois, la série des dérivées

$$(11) \quad a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

Je dis que cette série est absolument convergente pour toute valeur x de l'intervalle $(-R, +R)$. En effet, soit r un nombre positif plus petit que R et plus grand que $\xi = |x|$. La série (1) est absolument convergente pour $x = r$; donc, en répétant un raisonnement déjà fait (n° 98), on peut trouver un nombre fixe Λ tel qu'on ait, quel que soit n ,

$$x_n < \frac{\Lambda}{r^n};$$

d'où

$$n x_n \xi^{n-1} < n \Lambda \frac{\xi^{n-1}}{r^n}.$$

Or, la série à termes positifs $\frac{n \Lambda \xi^{n-1}}{r^n}$ est convergente, comme le montre la règle de d'Alembert. Donc aussi la série $n x_n \xi^{n-1}$ (n° 42); et, par suite, *la série (11) est bien convergente dans l'intervalle $(-R, +R)$* . Mais alors, d'après le numéro précédent, on peut l'intégrer terme à terme, ce qui redonne la série (1), mais aussi une primitive de la somme $\tau(x)$ de la série (11). On a donc $\tau(x) = S'(x)$.

Finalement, nous voyons que *toute série entière peut être différenciée terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence*.

Remarque. — Nous avons vu que la série des primitives a un rayon de convergence ρ au moins égal à R . Il en est de même pour la série des dérivées. Mais la série des dérivées de la série des primitives est la série proposée; donc $R \leq \rho$. En comparant, on voit que $\rho = R$. Donc, *la série des primitives et la série des dérivées ont exactement le même intervalle de convergence que la série proposée*.

104. *Série de Mac-Laurin.* — De ce qui précède résulte évidemment qu'on peut, en différenciant terme à terme, calculer de

---

⁽¹⁾ On ne peut encore l'affirmer, car une fonction continue n'admet pas forcément une dérivée.

proche en proche toutes les dérivées de $S(x)$, jusqu'à un ordre quelconque. *Nous sommes certains que toutes ces dérivées existent à l'intérieur de l'intervalle de convergence.* Calculons en particulier leurs valeurs pour $x = 0$, on a

$$S(0) = a_0, \quad S'(0) = a_1, \quad S''(0) = 2a_2, \quad \dots, \quad S^{(n)}(0) = n! a_n, \quad \dots$$

Il suit de là que, si une fonction $f(x)$ est développable en série entière dans un certain intervalle, ce développement est nécessairement

$$(12) \quad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Ceci nous montre de nouveau que le développement n'est possible que d'une seule manière. La série (12), que nous retrouverons plus loin, porte le nom de *série de Mac-Laurin*.

105. Addition, multiplication et division des séries entières. — Étant données plusieurs séries entières, si on les additionne en réunissant les termes de même rang (c'est-à-dire renfermant la même puissance de x), on obtient évidemment une série entière, dont l'intervalle de convergence est au moins égal au plus petit des intervalles de convergence des séries proposées.

De même, si l'on multiplie deux séries entières, suivant la règle de Cauchy (n° 52), on obtient encore une série entière dont l'intervalle de convergence est au moins égal au plus petit des intervalles de convergence des séries proposées, car, à l'intérieur de cet intervalle, celles-ci sont absolument convergentes.

Enfin, soit à développer en série entière, si possible, le quotient

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots} \quad (b_0 \neq 0).$$

On emploie la méthode des coefficients indéterminés, c'est-à-dire qu'on désigne le quotient par $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$; on le multiplie par le diviseur, suivant la règle de Cauchy; puis on identifie le résultat obtenu avec le dividende. En égalant les coefficients des puissances successives de x (n° 101, corollaire II), on obtient des équations qui permettent de déterminer de proche en proche tous les coefficients inconnus $c_0, c_1, c_2, \dots$. Le lecteur apercevra aisément

ment qu'il revient au même de considérer les deux séries proposées comme des polynômes illimités ordonnés suivant les puissances croissantes de x et de diviser l'un par l'autre ces polynômes, suivant la règle ordinaire (n° 202).

Quelle que soit la façon de procéder, il faut bien remarquer que le résultat obtenu est purement formel. Pour qu'il ait une valeur effective, il faut prouver que la série obtenue est convergente dans un certain intervalle. Celle-ci représente alors le quotient cherché dans le plus petit de cet intervalle et de l'intervalle de convergence du diviseur.

106. Méthodes diverses de développement en série entière. — Étant donnée une fonction $f(x)$, on peut se proposer de trouver une série entière, convergente dans un certain intervalle $(-R, +R)$, et ayant pour somme $f(x)$ pour toutes les valeurs de cet intervalle. C'est ce qu'on appelle *développer la fonction en série entière*.

A priori, pour que ce développement soit possible, *il faut que, dans le voisinage de $x = 0$, la fonction soit continue et admette des dérivées de tous les ordres*, car toute série entière jouit de ces propriétés à l'intérieur de son intervalle de convergence. Ce n'est pas ici le lieu de rechercher si ces conditions sont suffisantes. Nous voulons seulement indiquer quelques méthodes de développement en série applicables à certaines catégories de fonctions.

I. Méthode par dérivation. — On calcule la dérivée $f'(x)$. Si la fonction obtenue a un développement connu ou calculable par une méthode quelconque, il suffit d'intégrer terme à terme ce développement pour avoir celui de $f(x)$, à une constante près qu'on détermine en faisant $x = 0$. Il peut arriver qu'on n'obtienne une fonction développable qu'après plusieurs dérivations successives. On remonte alors à $f(x)$ par un nombre égal d'intégrations successives.

II. Méthode par intégration. — On calcule une primitive de $f(x)$. Si la fonction obtenue peut être développée par un procédé quelconque, on aura le développement de $f(x)$ par une différentiation terme à terme. Comme plus haut, il peut se faire que la méthode ne réussisse qu'après plusieurs intégrations successives de $f(x)$.

III. Méthode par équation différentielle. — On tâche de trouver

une équation différentielle simple, linéaire autant que possible (Chap. XV), à laquelle satisfait y . On écrit alors le développement cherché avec des coefficients indéterminés et on le substitue dans l'équation. On écrit que celle-ci est vérifiée, c'est-à-dire qu'on annule les coefficients de toutes les puissances de x dans le résultat de substitution supposé écrit tout entier dans un même membre. On obtient ainsi des relations entre les coefficients inconnus, qui permettent de déterminer ceux-ci de proche en proche en fonction du ou des premiers, lesquels se calculent au moyen des valeurs de y et, s'il y a lieu, de ses dérivées, pour $x = 0$ ⁽¹⁾. Il faut ensuite s'assurer que la série est convergente dans un certain intervalle non nul, à l'intérieur duquel le développement est seul valable.

IV. *Méthode par la formule de Mac-Laurin.* — Nous démontrerons, au Chapitre suivant, que si $f(x)$ admet, dans l'intervalle $(0, x)$, des dérivées finies jusqu'à l'ordre $n + 1$, on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta, x) \\ (0 < \theta < 1).$$

Supposons alors que les dérivées existent jusqu'à un ordre illimité; nous pourrions prolonger la formule indéfiniment, ce qui nous conduira à la série de Mac-Laurin

$$(13) \quad f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Mais, pour que cette série représente bien $f(x)$, il faut d'abord qu'elle soit convergente et ensuite que le *reste* $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta, x)$ tende vers zéro pour n infini. Cette dernière condition est d'ailleurs suffisante à elle seule, car si elle est remplie, la somme S_n des $n + 1$ premiers termes de (13) tend vers $f(x)$ pour n infini, puisqu'elle est égale à $f(x) + R_n$.

Ceci a toujours lieu *lorsque les dérivées successives de $f(x)$ sont toutes bornées supérieurement en valeur absolue dans l'inter-*

⁽¹⁾ On est certain que le développement obtenu représente bien la fonction proposée, en vertu du théorème fondamental des équations différentielles (n° 186).

valle (0, x). On a, en effet, dans cette hypothèse,

$$|f^{(n+1)}(b, x)| < A,$$

A étant un certain nombre fixe. Donc

$$|R_n| < A \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or, quel que soit x , la quantité $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ tend vers zéro pour n infini, car elle est le terme général d'une série convergente. Par conséquent, R_n tend aussi vers zéro.

Cette méthode n'est pratique que si l'on peut avoir aisément l'expression générale de $f^{(n)}(x)$; et, même dans ce cas, elle peut encore présenter de grandes difficultés à cause des questions de convergence de la série et de limite du reste.

107. Développements classiques. — Nous allons indiquer maintenant quelques développements classiques qu'il est indispensable sinon de connaître par cœur, du moins de savoir retrouver rapidement.

I. $\frac{1}{1-x}$. — Tant que $|x| < 1$, on peut considérer cette fonction comme la somme d'une progression géométrique de raison x . On a donc

$$(14) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots;$$

développement valable entre -1 et $+1$.

On en déduit le développement suivant

$$(15) \quad \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = -\frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots + \frac{x^n}{a^n} + \dots \right),$$

valable entre $-a$ et $+a$.

Par différentiations successives, on a les développements de $\frac{1}{(x-a)^2}$, $\frac{1}{(x-a)^3}$, ..., $\frac{1}{(x-a)^p}$, ...

On peut déduire de là le développement de n'importe quelle fraction rationnelle. Il suffit de décomposer celle-ci en éléments

simples (Chap. XVII) : on a alors une expression de la forme

$$f(x) = E(x) + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_z}{(x-a)^z} + \frac{B_1}{x-b} + \dots + \frac{L_l}{(x-l)^l},$$

où $E(x)$ désigne un polynome. On développe, par la méthode ci-dessus, chacun des termes du second membre; puis, on ajoute terme à terme. La série obtenue a pour rayon de convergence le module du pôle le plus voisin de zéro (1).

II. $\log(1+x)$. — En changeant x en $-x$ dans (14), intégrant et se rappelant que $\log 1 = 0$, on a

$$(16) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

développement valable entre -1 et $+1$.

Pour $x = -1$, on obtient, au second membre et au signe près, la série harmonique (n° 44). Le premier membre devenant égal à $-\infty$, on peut encore considérer la formule comme valable. Pour $x = 1$, on a, au second membre, la série harmonique alternée. Comme celle-ci est convergente, elle a pour somme $\log 2$, en vertu d'un théorème admis au n° 101.

III. $\arctan x$. — La dérivée de $\arctan x$ est $\frac{1}{1-x^2}$. Or, d'après (14), on a

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots;$$

d'où

$$(17) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

développement valable entre -1 et $+1$, comme celui de $\frac{1}{1+x^2}$.

IV. e^x . — Ce développement a déjà été obtenu au Chapitre VI (n° 92). On peut le retrouver par la série de Mac-Laurin. Toutes les

(1) Ceci s'applique quand bien même certains des pôles $a, b, \dots, l$ seraient imaginaires. Mais, dans l'addition, toute trace d'imaginaires doit disparaître, si toutefois la fraction rationnelle proposée a ses coefficients réels.

Observons encore qu'on peut se borner à développer l'inverse du dénominateur, quitte à multiplier ensuite par le numérateur; car il est toujours facile de multiplier une série entière par un polynome.

dérivées de e^x sont égales à e^x et par suite elles sont bornées. Comme elles sont égales à 1 pour $x = 0$, on peut écrire immédiatement

$$(18) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

et cela quel que soit x .

Enfin, on peut encore remarquer que $y' = y$ (1). Si l'on pose

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots,$$

on a

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$

D'où la formule de récurrence

$$na_n = a_{n-1}.$$

Si l'on remarque que $a_0 = e^0 = 1$, on voit que $a_n = \frac{1}{n!}$ (n° 314).

V. $\sin x$ et $\cos x$. — Prenons la série de Mac-Laurin, car toutes les dérivées sont plus petites que 1, donc bornées. On a (n° 76)

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

d'où l'on déduit la formule

$$(19) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

On trouverait de même, en dérivant $\sin x$,

$$(20) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Ces deux développements peuvent aussi s'obtenir en remarquant que $\sin x$ et $\cos x$ satisfont à l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

On peut en déduire le développement de toute fonction se présentant sous la forme d'un *polynôme par rapport aux sinus et cosinus de multiples quelconques de x* (entiers, fractionnaires ou incommensurables). Nous verrons en effet (n° 109) qu'une telle expression

(1) Les seules fonctions qui vérifient cette équation sont, ainsi qu'on le verra au Chapitre XV, $y = ce^x$, où c est une constante quelconque. Si, pour $x = 0$, on a $y = 1$, il faut que c soit égal à 1 et y se réduit à e^x .

peut toujours se mettre sous la forme

$$y = \Sigma (\Lambda \cos z.x + \Lambda' \sin z.x),$$

les Λ , Λ' , z désignant des constantes. Il suffit alors de développer chaque terme de la somme et d'ajouter ensuite terme à terme.

VI. $(1+x)^m$. — Nous connaissons le développement pour m entier, positif ou négatif. Supposons maintenant m absolument quelconque. On peut appliquer la formule de Mac-Laurin, mais on rencontre des difficultés à propos du reste. Aussi, préférons-nous la méthode suivante :

On a (n° 94)

$$y' = m(1+x)^{m-1} = \frac{my'}{x+1},$$

ou

$$(21) \quad y'(x+1) - my = 0.$$

La fonction la plus générale qui puisse vérifier cette équation est (n° 191) $y = C(1+x)^m$, en appelant C une constante arbitraire. La fonction $(1+x)^m$, que nous voulons développer, est caractérisée par la condition d'être égale à 1 pour $x = 0$.

Soit alors

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots, \\ y' &= a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Portons dans (21); annulant le coefficient de x^n , nous avons

$$na_n + (n+1)a_{n+1} - ma_n = 0,$$

ou

$$a_{n+1} = a_n \frac{m-n}{n+1},$$

formule de récurrence d'où l'on tire (n° 314), en remarquant que $a_0 = 1$,

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} (22) \quad (1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \\ &\quad + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \end{aligned}$$

développement valable dans l'intervalle de convergence de la série

qui est au second membre. Cherchons donc celui-ci. Prenons la règle de D'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m - n + 1}{n} x,$$

rapport qui tend vers $-x$, pour n infini. Donc (n° 99), l'intervalle de convergence est $(-1, +1)$ et la formule (22) n'est exacte que si $|x| < 1$ (1).

Elle constitue, comme on le voit, une généralisation de la formule du binôme; aussi la série (22) est souvent appelée *la série du binôme*. Elle peut servir, si l'on veut, pour le développement en série des fractions rationnelles (1).

On peut encore en déduire le développement de $(a + b)^m$, quels que soient les nombres a et b , pourvu qu'ils ne soient pas égaux, cas qui serait d'ailleurs sans intérêt. Soit en effet, pour fixer les idées, $|a| > |b|$. On a

$$(a + b)^m = a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = a^m \left[1 + \frac{m}{1} \frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{2!} \frac{b^2}{a^2} + \dots\right],$$

puisque $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$. Donc

$$(23) \quad (a + b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2} b^2 + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} a^{m-n} b^n + \dots,$$

sous la seule condition $|a| > |b|$.

VII. arc $\sin x$. — On a (n° 78)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si $|x| < 1$, on peut développer par la série du binôme

$$y' = 1 + \frac{1 \cdot 3}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} x^{2n} + \dots, \\ (24) \quad y = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} x^{2n} + \dots$$

---

(1) C'est du moins tout ce que nous pouvons affirmer. En réalité, elle l'est aussi pour $x = -1$, $m \geq -1$ et pour $x = +1$, $m \geq 0$. Mais la démonstration, qui peut se faire d'après la formule de Mac-Laurin, est trop longue et dénuée d'intérêt pour trouver place ici.

Intégrons et rappelons-nous que $\arcsin 0 = 0$:

$$(25) \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \\ + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

développement valable pour $|x| < 1$.

108. Séries entières à variable complexe. — Dans tout ce qui précède, il n'a été implicitement question que de quantités réelles. Mais, on peut étendre aux imaginaires la théorie des séries entières.

Soit le nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont regardés comme deux variables indépendantes réelles ; c'est ce que nous appellerons une *variable complexe*. On peut la regarder comme l'affixe d'un point (z) susceptible d'occuper n'importe quelle position dans le plan xOy . Soit maintenant une suite infinie de coefficients imaginaires $a_0, a_1, \dots$. Nous appellerons *série entière relativement à la variable complexe* z la série

$$(26) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Cette définition est parfaitement légitime, puisque nous savons ce que c'est qu'une série à termes imaginaires (n° 50).

Considérons la série des modules

$$(27) \quad z_0 + z_1 \zeta + z_2 \zeta^2 + \dots + z_n \zeta^n + \dots$$

C'est une série entière réelle ; elle admet donc un certain rayon de convergence R . Si $\zeta < R$, elle est convergente ; donc (n° 50), la série (26) est absolument convergente. Si $\zeta > R$, son terme généraeroit indéfiniment avec n (n° 98) ; donc, la série (26) est divergente. Si $\zeta = R$, on ne peut rien dire.

Ces résultats sont susceptibles d'une représentation géométrique très simple. Appelons *cercle de convergence* le cercle de centre O et de rayon R . On peut dire alors que *la série proposée est convergente à l'intérieur du cercle de convergence et divergente à l'extérieur ; sur la circonférence il y a doute*.

109. Fonctions de variable complexe. — Soit Z la somme imaginaire de la série (26). A toute valeur de z , de module inférieur à R ,

correspond une valeur bien déterminée de Z . On dit que Z est une fonction de z , définie à l'intérieur du cercle de convergence. On peut étendre à cette fonction toutes les définitions et toutes les propriétés relatives aux fonctions de variable réelle développables en série entière. Mais, cela ne rentre pas dans le cadre de cet Ouvrage et nous nous bornerons à indiquer les exemples classiques suivants :

1. e^z . — Par définition, nous poserons

$$(28) \quad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Cette fonction est définie dans tout le plan. Lorsque z est réel, elle coïncide avec la fonction exponentielle ordinaire.

Comme pour cette dernière, on a l'identité fondamentale

$$(29) \quad e^z e^{z'} = e^{z+z'}.$$

En effet, nous savons que le théorème relatif à la multiplication des séries est encore vrai quand il s'agit de séries imaginaires. Or, les séries e^z et $e^{z'}$ étant absolument convergentes, quels que soient z et z' , on peut les multiplier suivant la règle de Cauchy. Le terme général du produit est

$$(30) \quad \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \frac{z'}{1} + \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} \frac{z'^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n-p}}{(n-p)!} \frac{z'^p}{p!} + \dots + \frac{z'^n}{n!}.$$

Or, on sait que (n° 24)

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!},$$

de sorte que l'expression (30) peut s'écrire

$$\frac{1}{n!} (z^n + C_n^1 z^{n-1} z' + C_n^2 z^{n-2} z'^2 + \dots + C_n^p z^{n-p} z'^p + \dots + z'^n) = \frac{(z + z')^n}{n!}.$$

Le produit $e^z e^{z'}$ est donc bien égal à $e^{z+z'}$.

COROLLAIRE. — $(e^z)^m = e^{mz}$, pour m entier et positif. Car il suffit de multiplier m facteurs égaux à e^z .

Formule d'Euler. — Calculons e^{ix} , en supposant x réel. On a

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} + \dots$$

La partie réelle est le développement en série de $\cos x$; le coefficient de i est le développement de $\sin x$; donc

$$(31) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Cette formule très importante est connue sous le nom de *formule d'Euler*. On peut en tirer bien des conséquences.

D'abord, elle permet de séparer simplement la partie réelle et la partie imaginaire de e^{x+iy} . On a, en effet ⁽¹⁾,

$$(32) \quad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i (e^x \sin y).$$

Au n° 79, nous avons dit qu'il était quelquefois utile de considérer les dérivées de certaines fonctions imaginaires d'une variable réelle. Supposons alors que x et y soient deux fonctions réelles de la variable réelle t et cherchons la dérivée de e^{x+iy} par rapport à t . La formule (32) nous permet d'écrire, conformément à la définition du n° 79,

$$\begin{aligned} (e^{x+iy})' &= e^x \cos y \cdot x' - e^x \sin y \cdot y' + i (e^x \sin y \cdot x' + e^x \cos y \cdot y') \\ &= e^x (\cos y - i \sin y) (x' + i y') \\ &= e^{x+iy} (x' + i y'). \end{aligned}$$

Autrement dit, *que z soit une fonction réelle ou imaginaire de la variable réelle t , on a toujours*

$$(33) \quad (e^z)' = e^z \cdot z'.$$

Si, dans la formule d'Euler, on change x en $-x$, il vient

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

D'où l'on tire, par addition et soustraction avec (31),

$$(34) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En partant de ces formules, qu'on appelle aussi les *formules d'Euler*, on pourrait établir toutes les formules de la Trigonométrie. Nous conseillons au lecteur d'en vérifier quelques-unes à titre d'exercice. Nous nous bornerons à signaler l'importante application suivante :

---

(1) On obtient e^{x+iy} sous la forme trigonométrique, de sorte que e^x est le module et y est l'argument.

Imaginons une fonction y qui se présente sous la forme d'un polynôme quelconque par rapport à des quantités telles que $\cos ax$ et $\sin ax$, a désignant une constante quelconque, commensurable ou non. Remplaçons-y ces quantités par leurs valeurs tirées de (34). Nous obtiendrons évidemment un polynôme relativement à des exponentielles de la forme e^{iax} et e^{-iax} . Développons-le et ordonnons-le. Un terme quelconque s'écrira (1)

$$\begin{aligned} A(e^{iax})^\alpha (e^{ifx})^\beta \dots (e^{ilx})^\lambda &= A e^{i(\alpha a + \beta f + \dots + l) x} \\ &= A e^{imx} \\ &= A(\cos mx + i \sin mx). \end{aligned}$$

On voit finalement que la fonction y sera mise sous la forme d'une somme de cosinus et sinus de multiples (commensurables ou non) de l'arc x . Nous avons déjà indiqué une application de cette propriété (n° 107, théorème V). Nous en verrons encore une autre plus loin (n° 169).

En particulier, on a

$$(\cos x + i \sin x)^m = (e^{ix})^m = e^{imx} = \cos mx + i \sin mx.$$

On retrouve la *formule de Moivre* (n° 35).

II. $\cos z$ et $\sin z$. — Par définition, on a, pour z complexe,

$$(35) \quad \begin{cases} \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \\ \sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont définies dans tout le plan. Lorsque z est réel, elles coïncident avec les fonctions circulaires ordinaires.

Avec cette définition, la formule d'Euler et, par suite, les formules (34) sont valables quand bien même x serait imaginaire. Ceci donne un moyen commode pour étendre au cas d'un arc complexe toutes les formules de la Trigonométrie, telles que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, etc. Nous laissons au lecteur le soin de faire toutes ces vérifications, qui ne nécessitent que des calculs très élémentaires. Il pourra aussi, à titre d'exercice, en faire

(1) Dans cette expression, $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont des entiers positifs.

quelques-unes directement en s'appuyant uniquement sur les développements (35) et sur la règle de multiplication des séries.

En s'appuyant sur la formule (33), on vérifiera que

$$(\cos z)' = -\sin z, z' \quad \text{et} \quad (\sin z)' = \cos z, z'.$$

Quant aux fonctions $\tanh z$ et $\coth z$, elles sont égales respectivement et par définition à $\frac{\sin z}{\cos z}$ et $\frac{\cos z}{\sin z}$. Les formules qui les concernent quand z est réel sont encore vraies quand z est imaginaire.

III. *Fonctions hyperboliques.* — On appelle *cosinus et sinus hyperboliques* de la variable complexe z les fonctions

$$(36) \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

ou encore

$$(37) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \\ \operatorname{sh} z = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, \end{cases}$$

définies dans tout le plan. Elles offrent, grâce aux formules (33), la plus grande analogie avec les fonctions circulaires. Au reste, elles s'y ramènent très aisément. On a, en effet,

$$(38) \quad \begin{cases} \cos iz = \frac{e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \operatorname{ch} z, \\ \sin iz = \frac{e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}}{2i} = i \frac{e^{-z} - e^z}{2} = i \operatorname{sh} z. \end{cases}$$

Ceci montre que les fonctions hyperboliques n'ont aucun intérêt propre quand on admet des variables complexes, puisqu'au fond elles ne diffèrent pas des fonctions circulaires. *Elles n'ont une raison d'être que pour les valeurs réelles de z .* Dans ce cas, elles sont elles-mêmes réelles et constituent des fonctions de x dont l'allure diffère entièrement de celle des fonctions $\cos x$ et $\sin x$. En particulier, elles ne sont plus périodiques ⁽¹⁾.

Elles sont évidemment, comme la fonction exponentielle, définies

(1) Au point de vue des variables complexes, elles admettent, comme e^z , la période imaginaire $2\pi i$.

et continues quel que soit x . Leurs dérivées se déduisent des formules (36) :

$$(39) \quad \begin{cases} (\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \\ (\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x. \end{cases}$$

La fonction $\operatorname{ch} x$ est une fonction paire et toujours positive. La fonction $\operatorname{sh} x$ est impaire et possède le signe de x . Pour $x = 0$, elles sont respectivement égales à 1 et à 0. Pour $x = +\infty$, elles deviennent infinies comme l'exponentielle $\frac{e^x}{2}$, car e^{-x} tend vers zéro. Les variations des deux fonctions sont dès lors évidentes et sont représentées par les deux courbes ci-contre (fig. 21).

Fig. 21.

Les fonctions hyperboliques donnent lieu à des formules analogues à celles qui existent pour les fonctions circulaires. On peut d'ailleurs les en déduire très rapidement par l'emploi des formules (38). Par exemple, la relation

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

devient, en y remplaçant x par ix ,

$$\operatorname{ch}^2 x + (i \operatorname{sh} x)^2 = 1,$$

ou

$$(40) \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (1).$$

De même, les formules qui donnent $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$

(1) C'est à cette relation que les fonctions hyperboliques doivent leur nom. Elles permettent en effet, d'exprimer les coordonnées d'un point quelconque M de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$ (I, II) par les formules $x = \operatorname{ch} \varphi$, $y = \operatorname{sh} \varphi$, tout à fait analogues aux formules $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, qui expriment les coordonnées d'un

deviennent

$$(41) \quad \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + i \operatorname{sh} a, i \operatorname{sh} b = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$

$$i \operatorname{sh}(a+b) = i \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + i \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a,$$

$$(42) \quad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a.$$

Le lecteur découvrira sans peine, de cette manière, toutes les formules de la Trigonométrie hyperbolique. Mais, il convient d'observer que le procédé que nous venons d'indiquer ne peut être considéré comme une démonstration que si l'on a, au préalable, étendu aux arcs imaginaires les formules établies pour des arcs réels. Comme cette extension s'opère au moyen des formules (33), on voit que la véritable démonstration des identités de la Trigonométrie hyperbolique consiste simplement à les vérifier en partant des formules de la définition (36). Néanmoins, le procédé indiqué ci-dessus est un moyen mnémorique commode pour retrouver les formules quand on les a oubliées ⁽¹⁾, ou pour les découvrir quand on les ignore.

Signalons enfin les *tangente et cotangente hyperboliques*, définies par

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}},$$

et dont nous laisserons au lecteur le soin d'étudier les propriétés.

point quelconque du cercle trigonométrique. La variable φ peut d'ailleurs s'inter-

Fig. 23.

préter, dans les deux cas, d'une manière identique: c'est le double de l'aire du secteur OAM (fig. 23).

(1) Nous conseillons même au lecteur de n'essayer de retenir que les formules (40), (41), (42) et aussi les dérivées (39).

CHAPITRE VIII.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

---

110. **Développements d'ordre n .** — Dans le Chapitre précédent, nous avons vu que certaines fonctions peuvent être développées en série entière, tant que x reste compris dans un intervalle de la forme $(-R, +R)$. Mais cela n'est pas toujours possible. D'autres fois, il est impraticable d'arriver à l'expression du terme général de la série. Or, le cas est très fréquent où il n'est pas utile d'avoir le développement tout entier, mais seulement ses premiers termes.

D'une façon précise, nous appellerons *développement d'ordre n* de la fonction $y = f(x)$, au voisinage de $x = 0$, toute expression de la forme

$$(1) \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \lambda \cdot x^{n+1},$$

égale à y pour toutes les valeurs de x d'un certain intervalle $(-r, +r)$ comprenant zéro, et où les a_i désignent des constantes dont certaines peuvent être nulles et λ une fonction de x dont on ne connaît pas la valeur explicite, mais dont on sait seulement qu'elle *reste finie lorsque x tend vers zéro* (n° 58). Le terme $\lambda \cdot x^{n+1}$ sera appelé le *reste*. Il tend vers zéro avec x (n° 68, note de la page 82).

L'utilité de semblables développements apparaîtra à plusieurs reprises dans le cours de cet Ouvrage. Nous ferons seulement observer ici que, si l'on considère x comme un infiniment petit principal ou du premier ordre (n° 120), le développement (1) permet de remplacer y par un polynôme de degré x , avec une erreur $\lambda \cdot x^{n+1}$ d'ordre infinitésimal au moins égal à $n+1$, comme il résulte de ce que λ reste fini pour $x = 0$.

Si un développement d'ordre n existe pour une fonction donnée et une valeur donnée de n , il est unique. En effet, imaginons un

deuxième développement

$$y = a'_0 + a'_1 x + \dots + a'_n x^n + \lambda' x^{n+1}.$$

On aurait identiquement, dans l'intervalle $(-r, +r)$,

$$(2) \quad a''_0 + a''_1 x + \dots + a''_n x^n + \lambda'' x^{n+1} = 0,$$

en posant $a''_i = a'_i - a_i$,

$$\lambda'' = \lambda' - \lambda.$$

Faisons $x = 0$; comme λ'' reste fini, tous les termes s'annulent, sauf le premier; donc, il faut déjà que a''_0 soit nul. Soit alors a''_p le premier coefficient non nul. On a

$$(3) \quad x^p (a''_p + a''_{p+1} x + \dots + \lambda'' x^{n+1-p}) = 0.$$

Or, si x est très voisin de zéro, la parenthèse est très voisine de a''_p ; car c'est la somme d'un nombre fini de termes qui, sauf le premier, tendent vers zéro avec x (n° 67). On peut donc trouver un intervalle $(-\varphi, +\varphi)$, intérieur à $(-r, +r)$, pour lequel elle est comprise entre $a''_p - \varepsilon$ et $a''_p + \varepsilon$, ε étant choisi plus petit que $|a''_p|$. Dans ces conditions, elle ne peut s'annuler et, par suite, si l'on excepte la valeur $x = 0$, l'égalité (3) ne peut avoir lieu, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, $a''_p = 0$, et par conséquent,

$$a''_0 = a''_1 = \dots = a''_n = 0.$$

L'égalité (2) se réduit alors à $\lambda'' = 0$. Finalement, on voit que

$$a''_0 = a_0, \quad a''_1 = a_1, \quad \dots, \quad a''_n = a_n; \quad \lambda' = \lambda. \quad (1).$$

C. Q. F. D.

III. On peut aussi considérer *des développements au voisinage d'une valeur quelconque x_0 de la variable*. On pose $x - x_0 = h$ et l'on appelle encore *développement d'ordre n* une expression de la forme

$$(1) \quad f(x_0 + h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \dots + b_n h^n + \mu h^{n+1},$$

---

(1) Le lecteur comparera cette démonstration avec une démonstration analogue donnée au n° 101.

où les b_i sont des constantes et φ une fonction de h qui reste finie quand h tend vers zéro.

Enfin, on peut considérer des *développements au voisinage de* $x = x_0$. On pose $\frac{1}{x} = h$ et l'on appelle *développement d'ordre* n une expression de la forme (4), ou

$$(5) \quad f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\varphi}{x^{n+1}},$$

φ restant fini pour x infini.

Chacun de ces développements permet de représenter $f(x)$ par un polynôme en x (ou en $\frac{1}{x}$), avec une erreur d'ordre au moins égal à $n+1$, si $x \rightarrow x_0$ (ou $\frac{1}{x}$) est pris pour infiniment petit principal (n° 120).

112. *Les développements précédents ne sont pas toujours possibles.* Ils exigent, en particulier, que la fonction soit finie pour $x=0$, x_0 ou ∞ , suivant qu'on a affaire aux développements (1), (4) ou (5). C'est pourquoi il est utile d'envisager l'*extension suivante* :

Imaginons qu'il existe un nombre α , fractionnaire ou irrationnel s'il est positif, quelconque s'il est négatif, tel que le produit $\gamma x^{-\alpha}$ admette le développement (1) au voisinage de $x=0$. Nous pourrions alors écrire

$$(6) \quad \gamma = a_0 x^{\alpha} + a_1 x^{\alpha+1} + \dots + a_n x^{\alpha+n} + \lambda x^{\alpha+n+1},$$

Ce développement diffère de (1) en ce qu'il *renferme des exposants soit fractionnaires, soit négatifs*. Il ne permet plus de représenter approximativement γ par un polynôme, mais par le produit d'un polynôme par x^{α} . L'erreur $\lambda x^{\alpha+n+1}$ n'est infiniment petite que si $\alpha + n + 1$ est > 0 .

Dans le cas particulier où α est entier négatif, le développement comprend (abstraction faite du reste) un polynôme en $\frac{1}{x}$ et, si n est assez grand, un polynôme en x .

Pour une fonction donnée et une valeur donnée de n , le *développement est unique*. En effet, d'abord le nombre α est caractérisé par la propriété que le produit $\gamma x^{-\alpha}$ tende vers une limite finie et non

nulle pour $x = 0$ ⁽¹⁾. En second lieu, nous savons que $y x^{-\alpha}$ ne peut être développé que d'une seule manière (n° 110).

On peut envisager la même extension au voisinage de x_0 ou de l'infini. Dans ce dernier cas, on a un développement de la forme

$$(7) \quad y = a_0 x^\alpha + a_1 x^{\alpha-1} + \dots + a_n x^{\alpha-n} + \lambda x^{\alpha-n-1},$$

ordonné suivant les puissances décroissantes de x , le nombre α pouvant être soit positif, soit fractionnaire.

Quelle que soit la forme de développement qu'on ait à calculer, on peut toujours, d'après ce qui précède, se ramener à un développement de la forme (1). Nous allons donc voir comment on calcule ceux-ci.

113. Méthodes directes. — Il s'agit de résoudre le problème suivant :

Étant donnés une fonction de x , finie et continue pour $x = 0$, et un nombre naturel n , calculer le développement d'ordre n de cette fonction. C'est-à-dire que nous voulons calculer les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ et nous assurer que λ reste fini quand x tend vers zéro.

La marche à suivre diffère suivant la fonction à laquelle on a affaire. Un premier cas, très simple, est celui où l'on connaît le développement de la fonction en série entière, soit

$$(8) \quad y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

On peut alors écrire

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^{n+1} (a_{n+1} + a_{n+2} x + \dots).$$

La parenthèse λ est une série entière de même intervalle de convergence que la série (8). Elle est donc continue pour $x = 0$ (n° 101); elle tend vers a_{n+1} lorsque x tend vers zéro et, par conséquent, reste finie. Donc, pour avoir le développement d'ordre n de y , il suffit de prendre les premiers termes de la série entière, jusqu'au terme en x^n inclusivement.

(1) Cela le détermine complètement, car si deux nombres α et α' jouissaient de cette propriété, le quotient $\frac{y x^{-\alpha}}{y x^{-\alpha'}} = x^\alpha - \alpha$ devrait tendre vers une limite finie et non nulle, ce qui n'est pas possible pour $\alpha < \alpha'$.

III. En vertu de la formule (12) du Chapitre VII, on peut écrire, si l'on veut,

$$(9) \quad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \lambda x^{n+1}.$$

Nous sommes conduits à nous demander si ce développement n'est pas valable, quand bien même on ne serait pas assuré de la convergence de la série de Mac-Laurin.

Il est clair que, quel que soit x et pourvu que les dérivées $f'(0), \dots, f^{(n)}(0)$ existent, on a toujours le droit d'écrire la formule (9), quitte à déterminer λ par cette équation même. Mais, on ne sait pas si λ restera fini lorsque x tendra vers zéro. Nous allons montrer qu'il en est certainement ainsi si, au voisinage de zéro, la fonction admet des dérivées finies jusqu'à l'ordre $n+1$ inclusivement.

D'une façon précise, admettons l'existence de ces dérivées finies dans l'intervalle $(0, x)$. Je dis qu'on a

$$(10) \quad \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\theta, x)}{(n+1)!},$$

θ étant un certain nombre compris entre 0 et 1.

Pour le prouver, nous emploierons l'artifice suivant (1). Considérons la fonction

$$(11) \quad F(z) = f(z) + (x-z)f'(z) + \frac{(x-z)^2}{2} f''(z) + \dots \\ + \frac{(x-z)^p}{p!} f^{(p)}(z) + \dots + \frac{(x-z)^n}{n!} f^{(n)}(z) + (x-z)^{n+1} \lambda.$$

On a identiquement

$$F(x) = f(x),$$

et, en vertu de (6),

$$F(0) = f(x).$$

D'autre part, la fonction $F(z)$ est finie et continue dans l'intervalle $(0, x)$ et y admet constamment une dérivée finie; cela résulte en effet de l'existence, dans cet intervalle, des dérivées de $f(z)$ jusqu'à l'ordre $n+1$. On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle (n° 61) et écrire que $F'(z)$ s'annule pour une valeur comprise

---

(1) Voir une démonstration un peu différente dans *Leçons* (n° 232). Comparer aussi avec la démonstration du n° 150.

entre 0 et x , c'est-à-dire de la forme θx . Or $F(\varpi)$ se calcule aisément

$$\begin{aligned} F(\varpi) &= f'(\varpi) - (x - \varpi)f''(\varpi) + \dots + \frac{(x - \varpi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\varpi) - \dots - \frac{(x - \varpi)^{n-1}}{n!} f^{(n+1)}(\varpi) \\ &= f'(\varpi) - (x - \varpi)f''(\varpi) + \dots - \frac{(x - \varpi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\varpi) - \dots - (n-1)(x - \varpi)^n, \\ F(\varpi) &= (x - \varpi)^n \left[\frac{f^{(n+1)}(\varpi)}{n!} - (n-1) \right]. \end{aligned}$$

En faisant $\varpi = \theta x$, et remarquant que $(x - \varpi)^n$ ne peut s'annuler, on a la formule (10).

Finalement, si, entre 0 et x , la fonction $f(x)$ admet des dérivées finies jusqu'à l'ordre $n+1$ inclusivement, on a la formule

$$(12) \quad \begin{cases} f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) \\ \quad + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 \leq \theta \leq 1). \end{cases}$$

Cette formule s'appelle *formule de Mac-Laurin*.

Si les $n+1$ premières dérivées existent et sont finies dans l'intervalle $(-r, +r)$, elles constituent, pour cet intervalle, le développement d'ordre n de la fonction, car lorsque x tend vers zéro, $f^{(n+1)}(\theta x)$ reste fini.

115. Si nous supposons maintenant l'existence des $(n+1)$ premières dérivées dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$, nous pouvons appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction $\varphi(\varpi) = f(x_0 + \varpi)$ et pour l'intervalle $(0, h)$, car les dérivées de $\varphi(\varpi)$ sont évidemment $f'(x_0 + \varpi), f''(x_0 + \varpi), \dots$. Nous obtenons alors la *formule de Taylor*

$$(13) \quad \begin{cases} f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \dots \\ \quad + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) \quad (0 \leq \theta \leq 1). \end{cases}$$

Elle donne un développement d'ordre n au voisinage de x_0 .

Remarques. — I. Dans le cas où la fonction $f(x)$ est un polynôme de degré n , la formule de Taylor est évidemment applicable. Seulement le reste est nul, puisque la dérivée $f^{(n+1)}(x)$ est identiquement nulle. La vérification directe n'offre d'ailleurs aucune difficulté et

constitue une application très simple de la formule du binôme (n° 25). Nous laisserons au lecteur le soin de la faire.

II. Pour $n = 0$, on retrouve la formule des accroissements finis (n° 62).

116. Méthodes indirectes. — Nous venons d'indiquer deux procédés directs pour calculer les développements limités. Nous allons montrer maintenant comment on peut en déduire d'autres méthodes, que nous qualifierons de *méthodes indirectes*. Elles consistent toutes à regarder la fonction $f(x)$ comme provenant de fonctions, dont les développements sont connus, par la combinaison des opérations suivantes :

Addition. — Pour avoir le développement d'ordre n de la somme de plusieurs fonctions, il suffit d'ajouter terme à terme les développements d'ordre n de ces fonctions. Cette règle est évidente.

Multiplication. — Soit à multiplier les deux fonctions

$$(11) \quad \begin{cases} y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \lambda x^{n+1}, \\ z = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \mu x^{n+1}. \end{cases}$$

Considérons ces deux développements comme des polynômes et formons leur produit, en l'ordonnant suivant les puissances croissantes de x . Il est évident que, jusqu'au terme en x^n inclusivement, les coefficients de ce produit ne dépendent que de $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$; ce sont des constantes parfaitement connues. Quant aux termes suivants, nous les réunissons pour y mettre x^{n+1} en facteur. Nous obtenons ainsi

$$yz = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \varphi x^{n+1}.$$

Le coefficient φ se présente sous la forme d'un polynôme en x, λ, μ ; donc, lorsque x tend vers zéro, il reste fini, puisqu'il en est ainsi de λ et μ . Finalement, nous avons la règle suivante : *Pour avoir le développement d'ordre n du produit de deux fonctions, on multiplie les développements d'ordre n de ces deux fonctions et l'on fait rentrer dans le reste tous les termes de degré supérieur à n .*

117. *Division.* — Soit maintenant à diviser y par z , en supposant $b_0 \neq 0$. Considérant toujours les développements comme des polynômes, divisons le premier par le second, suivant les puissances croissantes de x (n° 202). Il est manifeste que les coefficients λ et μ ne pourront s'introduire au quotient qu'à partir du terme en x^{n+1} . Dès lors, arrêtons notre division au terme en x^n , et écrivons l'identité de la division. En appelant Q le quotient, on a (n° 202),

$$\frac{y}{z} = Q + x^{n+1} \frac{R}{z},$$

R désignant un polynôme en x , λ , μ , qui reste fini pour $x = 0$, puisqu'il en est ainsi de λ , μ . Cette identité est de la forme

$$\frac{y}{z} = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \varphi x^{n+1};$$

le coefficient $\varphi = \frac{R}{z}$ reste fini pour $x = 0$, puisqu'il en est ainsi de R et que z tend vers $b_0 \neq 0$. D'où la règle suivante : *Pour avoir le développement d'ordre n d'une fraction dont le dénominateur ne s'annule pas pour $x = 0$, on divise le développement d'ordre n du numérateur par le développement d'ordre n du dénominateur, suivant les puissances croissantes de x et en s'arrêtant au terme en x^n .*

118. *Fonction de fonction.* — Soit enfin $y = f(z)$, z étant une fonction de x , nulle pour $x = 0$. Supposons qu'on ait les développements

$$(15) \quad y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \lambda z^{n+1},$$

$$(16) \quad z = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \mu x^{n+1}.$$

Nous voulons le développement d'ordre n de y par rapport à x . Portons (16) dans (15), développons les puissances de z et ordonnons suivant les puissances croissantes de x . Les coefficients λ , μ ne peuvent évidemment s'introduire qu'à partir du terme en x^{n+1} . Nous aurons donc, en groupant tous les termes qui renferment x^{n+1} en facteur,

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \varphi x^{n+1},$$

φ étant un polynôme en x , λ , μ , donc fini pour $x = 0$. D'où la règle :

Pour avoir le développement d'ordre n de y par rapport à x , on substitue le développement d'ordre n de z dans le développement d'ordre n de y par rapport à z , en faisant rentrer dans le reste tous les termes de degré plus grand que n .

Telles sont les opérations qui, dans la pratique, permettent d'obtenir le plus rapidement possible les développements limités de fonctions parfois très compliquées et pour lesquelles la formule de Mac-Laurin serait impraticable, à cause du calcul des dérivées successives.

CHAPITRE IX.

INFINIMENT PETITS. — FORMES INDÉTERMINÉES.

---

119. **Infiniment petits.** — *On appelle infiniment petit une quantité variable qui tend vers zéro.*

Cette quantité variable peut être considérée comme une variable indépendante et, dans ce cas, on entend simplement par ce qui précède que, parmi les valeurs numériques attribuables à x , on ne s'occupe que de celles qui sont voisines de zéro, ou, d'une façon plus précise, inférieures en valeur absolue à tel nombre positif ε qu'on veut bien choisir à l'avance. Mais, la plupart du temps, l'infiniment petit est une fonction d'une variable indépendante, qui a pour limite zéro dans certaines conditions, qui sont généralement que la variable indépendante tende vers une valeur déterminée, finie ou infinie. Ce qu'il faut entendre par là a été expliqué d'une manière précise à propos de la continuité des fonctions (n° 58).

Par exemple, $\sin x$ est un infiniment petit quand x tend vers zéro, ou, comme on dit encore, en même temps que x . De même $\frac{1}{\log(1+x)}$ est un infiniment petit quand x tend vers -1 par valeurs supérieures; e^x est un infiniment petit quand x tend vers $-\infty$; $\frac{1}{x}$ est un infiniment petit quand x tend vers $\pm\infty$.

120. **Comparaison des infiniment petits.** — La fonction y est dite *infiniment petite par rapport* à la fonction z , si le rapport $\frac{y}{z}$ tend vers zéro. La fonction z est alors *infiniment grande par rapport* à y et le rapport $\frac{z}{y}$ tend vers l'infini. Si l'on suppose en outre que y et z soient deux infiniment petits, on dit aussi que y est *d'ordre supérieur* à z et z *d'ordre inférieur* à y . Deux infiniment petits sont

dits *de même ordre* quand leur rapport tend vers une limite finie et non nulle, ou, plus généralement, finit par rester compris, en valeur absolue, entre deux nombres fixes et positifs.

Deux fonctions sont dites *équivalentes* si leur rapport tend vers 1.

THÉORÈME. — *Pour que deux fonctions soient équivalentes, il faut et suffit que leur différence soit infiniment petite par rapport à chacune d'elles.*

En effet, le rapport $\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$, par exemple, est égal à $\frac{x}{\frac{1}{2}} - 1$. Il tend vers zéro si $\frac{x}{\frac{1}{2}}$ tend vers 1 et réciproquement.

Lorsqu'on a à étudier plusieurs infiniment petits dépendant d'une même variable indépendante, il est avantageux d'introduire ce qu'on appelle un *infiniment petit principal*, auquel on comparera tous les autres. Cet infiniment petit principal, que nous désignons par la lettre x , peut être choisi à volonté. On peut prendre indifféremment l'un des infiniment petits proposés ou bien un infiniment petit nouveau quelconque. Mais, bien entendu, on doit toujours, autant que possible, faire son choix de manière à obtenir les calculs les plus simples.

L'*infiniment petit principal* x étant choisi, on peut le prendre comme nouvelle variable indépendante et calculer tous les autres en fonction de x . Un infiniment petit y est dit *infiniment petit d'ordre p* si le rapport $\frac{y}{x^p}$ tend vers une limite Λ finie et non nulle ⁽¹⁾. Le nombre p , qui est dit *l'ordre infinitésimal* de y , doit être évidemment positif; mais il peut être entier, fractionnaire ou incommensurable. *Il n'existe d'ailleurs pas toujours.* Par exemple, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ est *d'ordre infinitésimal infini*, en ce sens que, si grand que soit p , le rapport $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^p}$ tend vers zéro en même temps que x , comme on le voit en posant $\frac{1}{x^2} = z$, et se reportant au n° 96. De même, $y = \frac{1}{\log x}$ est, pour x infiniment petit positif, *d'un ordre infinitésimal infiniment petit*, en ce sens que, si petit que soit le nombre positif p , le

---

⁽¹⁾ Ou, plus généralement, a une valeur absolue qui reste comprise entre deux nombres fixes et positifs.

rapport $\frac{y}{x^p}$ tend vers $-\infty$ pour $x = +0$ (n° 96). Par contre, $\sin x$, par exemple, est du premier ordre; $\sqrt[3]{1 - \cos x}$ est de l'ordre $\frac{2}{3}$, ...

121. Partie principale. — Revenons au cas où y est d'un ordre déterminé p , le rapport $\frac{y}{x^p}$ ayant pour limite Λ . On appelle *partie principale* de y la quantité Λx^p . C'est un infiniment petit équivalent, de la forme Λx^p , Λ et p désignant des constantes convenables.

Il est utile d'admettre l'extension suivante. Imaginons une fonction y dont on ne connaisse pas, *a priori*, la limite pour $x = 0$, cette limite pouvant être nulle, finie ou infinie. Nous conviendrons encore d'appeler *partie principale* de y toute expression de la forme Λx^p telle que $\frac{y}{\Lambda x^p}$ tende vers 1 pour $x = 0$. Mais, cette fois, l'exposant p ne sera pas nécessairement positif. Il pourra être nul, auquel cas y aura pour limite Λ ; ou négatif, auquel cas y deviendra infini pour $x = 0$ et sera dit *un infiniment grand*. Dans tous les cas, p sera encore appelé *l'ordre infinitésimal* de y , cet ordre pouvant donc être positif, négatif ou nul.

Au lieu de prendre comme variable de comparaison un infiniment petit, on peut aussi prendre un infiniment grand, qu'on appelle *infiniment grand principal*. La *partie principale* d'une fonction y se définit toujours comme étant une expression de la forme Λx^p telle que $\frac{y}{\Lambda x^p}$ tende vers 1 pour $x = \infty$. L'exposant p est encore dit *l'ordre infinitésimal* de y . Mais, cette fois, suivant qu'il est > 0 ou < 0 , y est infiniment grand ou infiniment petit.

122. Calcul des parties principales. — Nous nous bornerons au cas où la variable principale x est infiniment petite, le cas où elle est infiniment grande se ramenant à celui-là par le changement de x en $\frac{1}{x}$.

Pour calculer la partie principale de la fonction y , il suffit d'en chercher un développement limité, suivant l'une des méthodes exposées au Chapitre précédent, et de prendre le premier terme non nul de ce développement.

En effet, si Λx^p désigne ce premier terme, on a

$$y = \Lambda x^p + \lambda x^{p+1} = \Lambda x^p \left(1 + \frac{\lambda}{\Lambda} x \right).$$

Comme λ et, par suite, $\frac{\lambda}{\Lambda}$ restent finis quand x tend vers zéro, $\frac{\lambda}{\Lambda} x$ est un infiniment petit et $\frac{y}{\Lambda x^p}$ a bien pour limite l'unité.

Si le développement est calculé par la formule de Mac-Laurin, on voit que *la partie principale de $f(x)$ est $\frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0)$, en supposant que la première dérivée qui ne s'annule pas avec x est d'ordre p ⁽¹⁾.*

Cette règle, très simple en théorie, est, la plupart du temps, peu commode et souvent même impraticable. En outre, elle exige des conditions qui ne sont pas toujours remplies.

La véritable méthode pratique consiste généralement à employer les procédés développés aux nos 116, 117 et 118. Il convient, à ce propos, de faire quelques observations.

Tout d'abord, *la partie principale du produit ou du quotient de plusieurs fonctions est le produit ou le quotient des parties principales de ces fonctions.*

En effet, si y, z, u , par exemple, ont pour parties principales y', z', u' , les rapports $\frac{y}{y'}, \frac{z}{z'}, \frac{u}{u'}$, ont pour limite 1; donc aussi leur produits (n° 68), c'est-à-dire le rapport $\frac{y'z'u'}{y'z'u'}$. En outre, $y'z'u'$ est bien de la forme Λx^p , s'il en est ainsi de y', z', u' .

Pour une somme, les choses se passent d'une façon moins simple. Soit encore, pour fixer les idées, les trois fonctions y, z, u , de somme S . S'il y en a une dont l'ordre est plus petit que celui des autres, soit par exemple y , la partie principale S' de S est manifestement y' . Si les trois fonctions ont même ordre, S' est égale à $y' + z' + u'$, à moins que cette somme ne soit identiquement nulle. Dans ce cas, l'ordre de S dépasse l'ordre commun à y, z, u , et, pour avoir S' , il faut pousser les développements de y, z, u au delà du premier terme non nul. On ne sait d'ailleurs pas *a priori* combien il faudra calculer de termes, car il peut arriver que ceux-ci se détruisent successivement dans S , jusqu'à un rang assez éloigné.

(1) Ceci exige, bien entendu, les conditions relatives à la formule de Mac-Laurin, c'est-à-dire que les $p+1$ premières dérivées existent et soient finies au voisinage de $x=0$. Toutefois, on peut ne rien supposer sur la dérivée $(p+1)^{\text{ème}}$, quand on sait que la dérivée $p^{\text{ème}}$ est finie et continue. On a, en effet, dans cette hypothèse,

$$f(x) = \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^p}{p!} [f^{(p)}(0) + \varepsilon].$$

Pour être sûr de ne pas faire de calculs inutiles, voici comment il convient de procéder.

On met en train tous les calculs auxiliaires, en prenant un seul terme dans chaque développement. Si le résultat n'est pas nul, on a la partie principale cherchée. Sinon, on poursuit tous les calculs, en prenant un terme de plus. Si le résultat n'est pas nul, on a la partie principale cherchée. Sinon, on poursuit tous les calculs, en prenant un terme de plus. Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un résultat non identiquement nul.

Il est à remarquer que *tout ceci s'applique à des fonctions d'ordre quelconque*, positif ou négatif, entier, fractionnaire ou incommensurable.

Si nous avons tant insisté sur le calcul des parties principales, c'est que les applications en sont très nombreuses. Nous en avons déjà rencontré une dans l'étude des séries (n° 55). Nous en verrons d'autres dans la suite de cet Ouvrage, particulièrement en Géométrie.

Pour l'instant, nous signalerons seulement les suivantes.

123. Étude d'une fonction au voisinage d'une valeur déterminée de la variable. — Lorsqu'on veut étudier une fonction au voisinage d'une valeur particulière, finie ou infinie, de la variable, la méthode générale consiste, lorsque cela est possible, à la remplacer par un développement limité (Chap. VIII) d'un ordre d'autant plus élevé qu'on veut une approximation plus grande. Mais, dans bien des cas, la partie principale suffit. C'est ainsi que :

Pour avoir le signe d'une fonction au voisinage d'une valeur de x , il suffit de prendre celui de sa partie principale.

En effet, soit à chercher le signe de $f(x)$ au voisinage de x_0 . Prenant $x - x_0 = h$ pour infiniment petit principal, soit Ah^p la partie principale de $f(x)$. On peut écrire

$$f(x) = Ah^p(1 + \varepsilon),$$

ε étant infiniment petit avec h . En particulier, on peut limiter h à un intervalle assez petit pour que $|\varepsilon| < 1$; dans ces conditions, $1 + \varepsilon$ sera > 0 et $f(x)$ aura le signe de Ah^p .

Nous ferons dans la suite, particulièrement en Géométrie, un usage assez fréquent de cette proposition. Son utilité résulte de la facilité avec laquelle on aperçoit le signe de Ah^p . Si p est irrationnel

ou de la forme $\frac{q}{m}$, h doit être positif; Ah^p a le signe de A . Si p est de la forme $\frac{q}{m-1}$, h peut être positif ou négatif. Si q est pair, Ah^p a toujours le signe de A ; si q est impair, Ah^p a le signe de h ou le signe opposé, suivant que A est > 0 ou < 0 .

Ajoutons que $f(x)$ tend vers zéro, l'infini ou une valeur finie non nulle, suivant que p est > 0 , < 0 ou $= 0$.

124. On peut appliquer ceci à l'étude de la variation de $f(x)$ pour $x = x_0$. Si l'on suppose la fonction continue, $f(x) - f(x_0)$ est un infiniment petit en même temps que h . Soit Ah^p sa partie principale ($p > 0$). Si l'on se trouve dans un des cas où Ah^p a nécessairement le signe de A , la fonction est maximum ou minimum suivant que A est < 0 ou > 0 (n° 63). Dans les autres cas, c'est $\frac{Ah^p}{h}$ et par suite $\frac{f(x) - f(x_0)}{h}$ qui a le signe de A ; donc, la fonction est croissante ou décroissante suivant que A est > 0 ou < 0 (n° 63).

En particulier, si Ah^p a été donné par la formule de Taylor, p est entier et égal à l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas pour $x = x_0$ (n° 122). On peut alors énoncer la proposition suivante :

THÉOREME. — *Étant donnée une fonction qui admet des dérivées successives finies et continues au voisinage de x_0 jusqu'à un certain ordre, si la première de ces dérivées qui ne s'annule pas pour $x = x_0$ est d'ordre impair, la fonction est croissante ou décroissante suivant que cette dérivée est positive ou négative; si elle est d'ordre pair, il y a maximum ou minimum suivant qu'elle est négative ou positive.*

En particulier, on retrouve ici les théorèmes du n° 65.

125. **Formes indéterminées.** — Toutes les fois qu'une fonction $f(x)$ est définie dans un certain intervalle (a, b) , sauf pour une valeur particulière x_0 de cet intervalle, on dit qu'elle se présente, pour cette valeur, sous une forme indéterminée ou illusoire. Lever l'indétermination, ou chercher la vraie valeur de la fonction, c'est calculer la limite vers laquelle tend $f(x)$ quand x tend vers x_0 .

Il peut d'ailleurs arriver que cette limite n'existe pas, ou bien diffère suivant que x tend vers x_0 par valeurs supérieures ou inférieures (cf. n° 58).

L'indétermination peut aussi se présenter pour x infini. On ramène ce cas au précédent en posant $x = \frac{1}{h}$.

RÈGLE GÉNÉRALE. — *Pour trouver la vraie valeur d'une fonction pour $x = x_0$, on choisit un infiniment petit principal nul en même temps que $x - x_0$ (ou $\frac{1}{x}$, si $x_0 = \infty$) ⁽¹⁾. Puis on cherche la partie principale de la fonction.*

Si, en effet, Ah^p désigne cette partie principale, la limite de la fonction, quand x tend vers x_0 et, par suite, h vers zéro, est 0, ∞ ou A , suivant que p est > 0 , < 0 ou $= 0$.

Remarques. — I. *Le choix de l'infiniment petit principal est seulement subordonné à la condition qu'il s'annule pour $x = x_0$ (ou $x = \infty$). On le prend généralement égal à $x - x_0$ (ou $\frac{1}{x}$); mais, quelquefois, il vaut mieux le choisir autrement pour avoir des calculs plus simples.*

II. Dans certains cas, *il suffit d'avoir l'ordre infinitésimal de $f(x)$, ou même seulement le signe de cet ordre.* Si l'on reconnaît en effet que p est > 0 ou < 0 , on saura que la vraie valeur cherchée est 0 ou ∞ .

III. Il arrive qu'on ne peut pas choisir h de manière à obtenir pour $f(x)$ un ordre infinitésimal déterminé. Ceci provient presque toujours de la présence de fonctions exponentielles ou logarithmiques, auquel cas il suffit d'appliquer les principes du n° 96.

IV. Il est assez fréquent que $f(x)$ se trouve compliqué de facteurs ne donnant lieu à aucune indétermination. Il faut alors les mettre de côté, en les remplaçant immédiatement par leurs limites.

(1) Quand x_0 est infini, on peut aussi, si l'on veut, choisir un infiniment grand principal; mais c'est généralement moins commode.

126. Les indications qui précèdent sont suffisantes, croyons-nous, pour permettre au lecteur de lever les indéterminations courantes. Toutefois, il est utile de lui signaler *les différentes formes indéterminées* qu'il pourra rencontrer.

I. *Forme* $\frac{0}{0}$ ⁽¹⁾. — C'est le quotient de deux infiniment petits. La vraie valeur est obtenue en les remplaçant par leurs parties principales (n° 122). Observons à ce propos qu'il convient, si l'on veut éviter des calculs pouvant être inutiles, de mener de front la recherche de ces deux parties principales, comme il a été expliqué au n° 122 au sujet de l'addition des infiniment petits. Dès qu'on obtient un résultat non nul à l'un des termes de la fraction, la question est visiblement résolue : car si, à l'autre terme, on a encore un résultat non nul, cela prouve qu'il est d'un ordre infinitésimal supérieur au premier, et l'on est ramené à la Remarque II du numéro précédent.

Citons encore une règle classique, connue sous le nom de *règle de l'Hospital*, qui est quelquefois commode :

La limite d'un rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ est égale à la limite du rapport $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ des dérivées de ses termes.

On peut donner de cette proposition une démonstration directe basée sur l'exercice proposé n° 3 relatif au Chapitre V. Nous nous contenterons de faire observer qu'elle n'est efficace que si l'une au moins des dérivées, $f'(x)$ par exemple, ne s'annule pas à la limite, auquel cas elle résulte de ce qui précède, car la partie principale de $f(x)$ est $hf'(x_0)$ ⁽²⁾.

II. *Forme* $\frac{\infty}{\infty}$. — C'est le quotient de deux infiniment grands, que

(1) Ce symbole n'a aucune signification par lui-même, puisque n'importe quel nombre multiplié par zéro donne zéro et peut donc être considéré comme étant égal au quotient $\frac{0}{0}$. On peut faire des remarques analogues pour les symboles suivants.

(2) Quand les deux dérivées s'annulent, on prend le rapport des dérivées secondes, et ainsi de suite. Mais, cela revient manifestement à chercher les parties principales par la formule de Taylor, ce qui est loin d'être toujours le moyen le plus simple. Il ne faut donc pas, nous semble-t-il, attacher une importance exagérée à la règle de l'Hospital : d'autant plus que chaque fois qu'elle est d'une application aisée, les autres méthodes sont presque toujours au moins aussi simples.

l'on remplace, comme précédemment, par leurs parties principales. On démontre que, sous certaines conditions, la règle de l'Hospital est encore valable.

Cette forme se ramène, si l'on veut, à la précédente, en vertu de l'identité $\frac{y}{z} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{y}}}{\frac{1}{\frac{1}{z}}}$.

III. *Forme* $0 \times \infty$. — C'est le produit d'un infiniment petit par un infiniment grand, qu'on remplace toujours par leurs parties principales. On peut aussi se ramener à $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, en vertu des identités

$$y z = \frac{y}{\frac{1}{z}} = \frac{z}{\frac{1}{y}}.$$

IV. *Forme* $\infty - \infty$. — C'est la différence de deux infiniment grands. On en cherche la partie principale comme il a été expliqué au n° 122, à propos de l'addition de plusieurs fonctions. On peut aussi écrire $y - z = y \left(1 - \frac{z}{y}\right) = z \left(\frac{y}{z} - 1\right)$; puis chercher la limite de $\frac{y}{z}$, qui est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Si cette limite n'est pas égale à 1, la limite de $y - z$ est infinie. Sinon, elle se présente sous la forme $\infty \times 0$, étudiée précédemment.

V. *Formes déduites de* u^v . — On les reconnaît par leur logarithme $v \log u$ (n° 85), qui doit se présenter sous la forme $0 \times \infty$. D'où les trois cas suivants :

1°	$v = 0,$	$u = \infty,$	forme ∞^0 ;
2°	$v = 0,$	$u = 0,$	forme 0^0 ;
3°	$v = \infty,$	$u = 1,$	forme 1^∞ .

Pour lever l'indétermination, on cherche la limite λ de $\log y$ (III); la limite demandée est alors e^λ , d'après la continuité de la fonction exponentielle.

À propos de la forme 1^∞ , rappelons qu'on peut aussi mettre y sous la forme $(1 + z)^\beta$ et chercher la limite de $z\beta$ (n° 92). Cette règle se ramène immédiatement à la précédente, car $\log y = \beta \log(1 + z)$ a même limite que βz , puisque z et $\log(1 + z)$ sont deux infiniment petits équivalents (n° 107, II).

CHAPITRE X.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

---

127. Généralités. — Soient *deux variables indépendantes* x et y , c'est-à-dire qui peuvent prendre, indépendamment l'une de l'autre, des valeurs numériques arbitraires. On dit que z est une *fonction de ces deux variables* si à tout couple de valeurs numériques attribuées à x et à y correspond une valeur numérique déterminée de z .

Ceci peut d'ailleurs n'avoir lieu que pour les couples qui satisfont à certaines conditions, se traduisant par des inégalités relatives à x et y . Pour plus de clarté, imaginons qu'à chaque couple on fasse correspondre le point M du plan xOy qui a pour coordonnées x et y . Aux couples ci-dessus correspondent alors les points d'une certaine région (R) du plan, de forme et de définition plus ou moins compliquées. Par exemple, cette région pourra être un cercle et sa circonférence, ce qui se traduira par une inégalité de la forme

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0;$$

ou bien un rectangle de côtés parallèles aux axes, ce qui se traduira par les quatre inégalités

$$x_0 \leq x \leq x_1, \quad y_0 \leq y \leq y_1;$$

ou bien la partie du plan située au-dessus de Ox , ce qui se traduira par $y \geq 0$. Sans insister davantage sur cette question de la forme et de la détermination de (R), qui peut donner naissance à de grandes difficultés, nous dirons que *la fonction z est définie dans la région (R) si elle possède une valeur numérique déterminée pour tout couple de valeurs de x et y auquel corresponde un point de cette région*. En particulier, une fonction est *définie dans tout le plan* si elle est définie quels que soient x et y .

Tout ce qui précède peut s'étendre au *cas de trois variables indé-*

pendantes x, y, z . Mais alors la région (R) est une région de l'espace. On peut également définir des *fonctions de 4, 5, ... variables*; mais la représentation géométrique n'existe plus. Il faudrait, pour cela, qu'il existât des espaces à 4, 5, ... dimensions, ce qui n'est pas ⁽¹⁾. On est alors obligé de définir par des inégalités l'ensemble des groupes de valeurs numériques qu'on peut attribuer aux variables indépendantes.

128. Continuité. — Revenons à la fonction z de x et y , que nous désignerons par la notation $f(x, y)$ [*énoncé* : f de x et de y]. On dit qu'elle est continue en un point $M_0(x_0, y_0)$ de (R) si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif η tel que les inégalités $|x - x_0| < \eta$, $|y - y_0| < \eta$ entraînent la suivante

$$(1) \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Il équivaut de dire qu'on doit pouvoir trouver un nombre η tel que, si la distance MM_0 est inférieure à ce nombre, les valeurs de z en M et M_0 diffèrent de moins de ε .

La fonction est continue dans la région (R) si elle est continue pour chacun de ses points. On définit aussi cette continuité par la condition qu'à tout nombre ε on peut faire correspondre η tel que les valeurs de z en M et M' diffèrent de moins de ε , dès que la distance MM' est plus petite que η , quelles que soient d'ailleurs les positions de M et M' à l'intérieur de (R). On démontre que ces deux définitions sont identiques (cf. n° 59).

THÉORÈME I. — Si la fonction z , continue dans la région (R), prend des valeurs différentes z_1 et z_2 en deux points M_1 et M_2 de cette région, elle prend, en un point au moins de (R), n'importe quelle valeur comprise entre z_1 et z_2 .

Nous admettrons ce théorème, comme nous avons admis le théorème analogue pour les fonctions d'une variable (n° 59).

(1) Les mathématiciens ont, il est vrai, inventé ces espaces, ou, comme on dit, ces *hyperespaces*. Mais ce sont là de pures conceptions analytiques; un point de l'espace à quatre dimensions, par exemple, n'est autre chose, par définition, qu'un groupe de valeurs numériques attribuées aux quatre variables indépendantes x, y, z, t . Néanmoins, l'introduction de ces espaces fictifs est utile en ce sens qu'elle facilite le langage dans l'étude des fonctions de plus de trois variables et aussi pour d'autres raisons que nous ne pouvons exposer ici.

THÉORÈME II. — Si la fonction z est continue dans la région (R) , supposée finie, elle y atteint une limite supérieure M et une limite inférieure m .

Nous admettrons aussi ce théorème. La différence $M - m$ s'appelle l'oscillation de la fonction dans la région (R) .

129. **Dérivées partielles.** — Supposons la fonction z continue en M_0 . La fonction $f(x, y_0)$, qui est une fonction de la seule variable x , est évidemment continue pour $x = x_0$. Supposons qu'elle admette une dérivée pour cette valeur. Cette dérivée sera appelée *dérivée partielle de z par rapport à x , pour le point M_0* . On définit de même la dérivée partielle par rapport à y , en considérant y comme seule variable. Si ces deux dérivées existent pour tous les points de (R) , elles constituent deux nouvelles fonctions de x et y , définies dans cette région et qu'on désigne respectivement par les notations f'_x et f'_y , ou bien $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, ou bien $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ (1).

Les dérivées partielles de f'_x sont désignées par f''_{xz} et f''_{xy} , ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, et celles de f'_y par f''_{yx} et f''_{yz} , ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Ce sont les *dérivées partielles du second ordre* de z . Elles sont, en apparence, au nombre de quatre : $f''_{xz}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yz}$. En réalité, il n'y en a que trois distinctes, car nous allons prouver que

$$(2) \quad f''_{xy} = f''_{yx},$$

en admettant du moins certaines conditions de continuité. Nous emploierons, dans ce but, l'artifice suivant :

En appelant h et k deux nombres constants qu'on peut supposer aussi petits qu'on le veut, considérons les deux fonctions

$$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y), \quad \psi(y) = f(x+h, y) - f(x, y).$$

Introduisons les quantités

$$\begin{aligned} \delta &= \varphi(x+h) - \varphi(x) \\ &= f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y), \\ \delta' &= \psi(y+k) - \psi(y) \\ &= f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y). \end{aligned}$$

(1) Il faut ici employer des d ronds; c'est une convention adoptée pour éviter toute confusion entre les dérivées partielles et les dérivées totales, ou dérivées d'une fonction d'une seule variable (cf. n° 130, II), lesquelles s'écrivent avec des d droits.

Comme on le voit, ces deux quantités sont égales. Or, sous certaines conditions de continuité (n° 62), on peut appliquer à δ la formule des accroissements finis, relativement à x ,

$$\delta = h \varphi'(x + \theta h) = h[f'_x(x + \theta h, y + k) - f'_x(x + \theta h, y)].$$

Mais, dans le crochet, on a l'accroissement de la fonction de y , $f'_x(x + \theta h, y)$. On peut encore, sous certaines conditions, lui appliquer la formule des accroissements finis, ce qui donne

$$\delta = hk f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta' k)$$

On trouverait de même

$$\delta' = kh f''_{yx}(x + \theta'' h, y + \theta''' k).$$

En comparant, il vient

$$f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta' k) = f''_{yx}(x + \theta'' h, y + \theta''' k).$$

Comme ceci a lieu si petits que soient h et k et par suite θh , $\theta' k$, $\theta'' h$, $\theta''' k$, il en résulte nécessairement, si les fonctions f''_{xy} et f''_{yx} sont continues au point considéré, que l'on a

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Comme on le voit, *cette démonstration n'est valable que si l'on admet l'existence et la continuité des dérivées f''_{xy} et f''_{yx} au voisinage du point (x, y) .*

Nous n'avons, en définitive, que trois dérivées secondes

$$f''_{xx}, \quad f''_{xy}, \quad f''_{yy} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

l'ordre relatif de x et y étant indifférent pour f''_{xy} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

On peut chercher maintenant les dérivées du troisième ordre.

Nous avons d'abord $\frac{\partial}{\partial x}(f''_{xx})$, ou f'''_{xx} , ou $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, et $\frac{\partial}{\partial y}(f''_{xx})$, ou f'''_{xy} , ou $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$. Je dis maintenant que

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x}(f''_{xy}) = \frac{\partial}{\partial y}(f''_{xx}).$$

En effet, le premier membre est obtenu en dérivant f'_x par rapport à y , puis par rapport à x ; le second est obtenu en dérivant f'_x par

rapport à x , puis par rapport à y . Nous savons que le résultat est le même. Donc, f''_{xy} ne donne qu'une nouvelle dérivée troisième, qui est $\frac{\partial}{\partial y}(f''_{xy})$, ou f'''_{xy} , ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}$. Enfin, on verrait de même que f''_{yx} ne donne comme nouvelle dérivée que $\frac{\partial}{\partial y}(f''_{yx})$, ou f'''_{yx} , ou $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$.

On constatera de même l'existence de cinq dérivées du quatrième ordre

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4};$$

de six dérivées cinquièmes, etc.

Tout ce qui précède s'étend aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. En particulier, on peut montrer, en s'appuyant toujours sur $f''_{xy} = f''_{yx}$, que, quel que soit le nombre des variables, *une dérivée partielle quelconque est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue, pour l'obtenir, les dérivations successives*. C'est pourquoi on peut désigner, par exemple, par $f^{(n)}_{x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}t^{\delta}}$ ou $\frac{\partial^n f}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma} \partial t^{\delta}}$ la fonction obtenue en dérivant $f(x, y, z, t)$ α fois par rapport à x , β fois par rapport à y , γ fois par rapport à z , δ fois par rapport à t .

Les théorèmes relatifs à la continuité et à la dérivation d'une somme, d'un produit ou d'un quotient (nos 67, 68, 70) s'étendent, sans difficulté, au cas où il s'agit de fonctions de plusieurs variables.

130. Fonctions composées. — Soit une fonction $y = f(u, v, w)$ des trois variables indépendantes u, v, w . Supposons qu'on y remplace u, v, w par trois fonctions données de x ; y devient alors également une fonction de x , qui est dite *fonction composée*.

THÉORÈME I. — *Si y est continue par rapport à u, v, w et si u, v, w sont continues par rapport à x , y est continue par rapport à x .*

En effet, à l'accroissement Δx correspondent les accroissements $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ et par suite l'accroissement Δy . Si Δx tend vers zéro, il en est de même de $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, d'après la continuité de u, v, w ; donc aussi de Δy , grâce à la continuité de y par rapport à u, v, w .

THÉORÈME II. — *Si y admet des dérivées partielles continues par rapport à u, v, w et si u, v, w ont des dérivées par rapport*

à x, y admet aussi une dérivée par rapport à x , donnée par la formule

$$(4) \quad y' = \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial v} v' + \frac{\partial f}{\partial w} w'.$$

En effet, gardant les notations du théorème précédent, nous avons l'identité

$$\begin{aligned} \Delta y = & f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) \\ & + f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w + \Delta w) \\ & - f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w). \end{aligned}$$

Appliquons à chaque ligne le théorème des accroissements finis et divisons par Δx , il vient

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} = & \frac{\Delta u}{\Delta x} f'_u(u + \theta \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) \\ & + \frac{\Delta v}{\Delta x} f'_v(u, v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) + \frac{\Delta w}{\Delta x} f'_w(u, v, w + \theta'' \Delta w), \end{aligned}$$

$\theta, \theta', \theta''$ désignant trois nombres compris entre zéro et un. Supposons maintenant que Δx tende vers zéro, il en est de même de $\Delta u, \Delta v, \Delta w$. $\theta \Delta u, \theta' \Delta v, \theta'' \Delta w$: $\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}, \frac{\Delta w}{\Delta x}$ tendent respectivement vers u', v', w' ; quant aux dérivées partielles, elles tendent vers $f'_u(u, v, w), f'_v(u, v, w)$ et $f'_w(u, v, w)$, puisqu'on les suppose continues. Nous avons donc bien, à la limite, la formule (4).

Remarque. — La formule (5) du n° 68 est un cas particulier de la précédente.

131. Formule des accroissements finis. — Soit à calculer l'accroissement $\Delta = f(x + h, y + k, z + l) - f(x, y, z)$ qui résulte des accroissements respectifs h, k, l donnés à x, y, z . Considérons la fonction

$$(5) \quad \varphi(t) = f(x + ht, y + kt, z + lt),$$

où t est regardé comme la seule variable. Nous avons

$$\Delta = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t) \quad (\text{n° 62}).$$

Or, la formule (4) nous donne

$$(6) \quad \varphi'(t) = h f'_x(x + ht, y + kt, z + lt) + k f'_y + l f'_z.$$

Donc

$$(7) \quad f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + hf'_x(x+th, y+tk, z+tl) \\ + kf'_y(x+th, y+tk, z+tl) + lf'_z(x+th, y+tk, z+tl);$$

où $f'_x(x+th, y+tk, z+tl)$, par exemple, représente le résultat obtenu en dérivant $f(x, y, z)$ par rapport à x et remplaçant ensuite x par $x+th$, y par $y+tk$, z par $z+tl$.

Telle est la *formule des accroissements finis* pour une fonction de trois variables.

Elle donne une limite supérieure de l'accroissement Δ , si l'on connaît des limites supérieures A, B, C de f'_x, f'_y, f'_z dans les intervalles $(x, x+h; y, y+k; z, z+l)$. On a, en effet (n° 31),

$$|\Delta| \leq A|h| + B|k| + C|l|.$$

132. **Formule de Taylor.** — On peut aussi étendre aux fonctions de plusieurs variables la *formule de Taylor* (n° 113). Si l'on applique à $\varphi(t)$ la formule de Mac-Laurin (n° 114), on a

$$(8) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Tout revient à calculer $\varphi'(0), \varphi''(0), \dots$

Dérivant la formule (6) par rapport à t , nous avons, en appliquant toujours la formule (4),

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= h(hf''_{xx} + kf''_{xy} + lf''_{xz}) + k(hf''_{yx} + kf''_{yy} + lf''_{yz}) + l(hf''_{zx} + kf''_{zy} + lf''_{zz}) \\ &= h^2 f''_{xx} + k^2 f''_{yy} + l^2 f''_{zz} + 2hkf''_{xy} + 2hlf''_{xz} + 2klf''_{yz}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression rappelle le développement du carré de

$$hf'_x + kf'_y + lf'_z;$$

on la désigne symboliquement par

$$(hf'_x + kf'_y + lf'_z)^2;$$

[on entend : *puissance symbolique* $\circ$]. On peut montrer, par voie de récurrence, que, d'une façon générale,

$$\varphi^{(p)}(t) = (hf'_x + kf'_y + lf'_z)^p,$$

en convenant que cette puissance symbolique représente la quantité obtenue en formant la puissance $p^{\text{ième}}$ ordinaire de la parenthèse et remplaçant ensuite chaque terme de la forme

$$A(hf'_x)^{\alpha}(kf'_y)^{\beta}(lf'_z)^{\gamma} \quad \text{par} \quad Ah^{\alpha}k^{\beta}l^{\gamma}f'_{\alpha\beta\gamma} \quad (\alpha + \beta + \gamma = p),$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire cette vérification, qui est assez longue, mais sans difficulté. Portons les résultats obtenus dans la formule (8), il vient

$$(9) \quad f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{(hf'_x + kf'_y + lf'_z)}{1} + \frac{(hf'_x + kf'_y + lf'_z)^{(2)}}{2!} + \dots + \frac{(hf'_x + kf'_y + lf'_z)^{(n)}}{n!} + R_n.$$

Dans cette formule, on doit remplacer x, y, z par x_0, y_0, z_0 dans les dérivées partielles qui figurent dans les $n + 1$ premiers termes. Quant à R_n , c'est ce que devient $\frac{(hf'_x + kf'_y + lf'_z)^{(n+1)}}{(n+1)!}$ quand on y remplace x, y, z par $x_0 + \theta h, y_0 + \theta k, z_0 + \theta l$.

Il est manifeste que le $(p + 1)^{\text{ième}}$ terme est un polynôme homogène et de degré p (n° 136) par rapport à h, k, l . De même R_n est un polynôme homogène et de degré $n + 1$, mais ses coefficients dépendent encore de h, k, l ; néanmoins, ils restent finis lorsque h, k, l tendent vers zéro. On remarque l'analogie avec les développements d'ordre n des fonctions d'une seule variable (n° 110).

Il est bien entendu que tout ce qui précède n'est valable que sous certaines conditions de continuité, que nous laissons au lecteur le soin d'énoncer, en se reportant aux conditions d'applicabilité de la formule de Taylor pour une seule variable.

133. Fonctions homogènes. — La fonction $f(x, y, z)$ est dite *homogène* si l'on a identiquement, quels que soient x, y, z, λ ,

$$(10) \quad f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^m f(x, y, z),$$

m étant un certain nombre constant, qui est appelé le *degré d'homogénéité* de la fonction, et qui peut être positif, négatif ou nul, commensurable ou incommensurable.

En faisant $\lambda = \frac{1}{x}$, on voit que le quotient de la fonction par x^m ne dépend plus que des rapports $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$. Réciproquement, toute fonction de la forme $x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ est homogène de degré m , car elle vérifie visiblement l'identité (10).

THÉORÈME. — Si une fonction est homogène de degré m , ses dérivées partielles d'ordre p sont homogènes de degré $m - p$.

En effet, dérivons les deux membres de (10) par rapport à x ; il

vient, en remarquant que λ est une constante arbitraire indépendante de x , et en appliquant le théorème des fonctions de fonction (n° 71)

$$f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z)\lambda \equiv \lambda^m f'_x(x, y, z)$$

ou

$$f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{m-1} f'_x(x, y, z).$$

Donc $f'_x(x, y, z)$ est homogène de degré $m - 1$. On démontrerait de même que f'_y et f'_z le sont également. En dérivant de nouveau, il est évident qu'on arrivera, de proche en proche, à prouver que toute dérivée partielle d'ordre p est homogène de degré $m - p$.

134. *Identité d'Euler.* — C'est l'identité suivante

$$(11) \quad x f'_x + y f'_y + z f'_z \equiv m f(x, y, z).$$

Pour la démontrer, dérivons (10) par rapport à λ , considéré comme seule variable indépendante; il vient, en appliquant le théorème des fonctions composées (n° 130),

$$f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z)x + f'_y(\lambda x, \lambda y, \lambda z)y + f'_z(\lambda x, \lambda y, \lambda z)z = m\lambda^{m-1}f(x, y, z).$$

Faisons maintenant $\lambda = 1$, nous obtenons l'identité (11).

L'identité d'Euler est très importante et nous en ferons un fréquent usage en Géométrie analytique. On peut démontrer sa réciproque, c'est-à-dire que si une fonction satisfait à l'identité (11), elle est homogène et de degré m . En effet, remplaçons x, y, z par $\lambda x, \lambda y, \lambda z$; (11) devient

$$\frac{x f'_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + y f'_y(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + z f'_z(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)} \equiv \frac{m}{\lambda},$$

ou

$$\frac{d[f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)]}{d\lambda} \equiv \frac{m}{\lambda}.$$

Les deux membres sont respectivement les dérivées de $\log f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ et de $\log(\lambda^m)$ par rapport à λ ; donc, ces deux logarithmes ont une différence indépendante de λ , que nous pouvons écrire $\log A$. A étant une quantité inconnue dont nous ne savons qu'une chose : c'est qu'elle ne dépend pas de λ . Nous avons alors

$$\log f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \log(\lambda^m) + \log A = \log(A\lambda^m);$$

d'où

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^m f(x, y, z).$$

Pour avoir λ , faisons $\lambda = 1$, ce qui ne change pas sa valeur: il vient

$$\lambda = f(x, y, z);$$

d'où l'identité

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^m f(x, y, z). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

135. Fonctions implicites. — Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables, continue dans un certain domaine D et y admettant des dérivées partielles du premier ordre. Considérons l'équation

$$(12) \quad f(x, y) = 0.$$

Supposons qu'elle soit vérifiée en un point $M_0(x_0, y_0)$ du domaine D pour lequel la dérivée f_y n'est pas nulle. Donnons maintenant à x une valeur voisine de x_0 ; on démontre que l'équation (12) admet alors une racine y et une seule qui soit voisine de y_0 . Cette racine est évidemment une fonction bien déterminée de x , au voisinage de x_0 ; d'une façon précise, dans un certain intervalle contenant x_0 , pourvu que cet intervalle soit choisi assez petit ⁽¹⁾. On dit que c'est une *fonction implicite* de x .

Nous ne pouvons donner ici une démonstration rigoureuse de la proposition que nous venons d'affirmer. Observons néanmoins qu'elle

Fig. 23.

est rendue tout à fait intuitive par les considérations géométriques suivantes. L'équation (12) représente une certaine courbe C (fig. 23)

⁽¹⁾ Il ne faudrait pas croire, pour cela, que cet intervalle est toujours très petit. Par exemple, l'équation $x - 2y + 1 = 0$ détermine une fonction définie quel que soit x .

du plan Oxy (t. II). Cette courbe passe par M_0 et admet en ce point une tangente non parallèle à Oy , en vertu de l'hypothèse $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dès lors, nous pouvons choisir sur C un arc $\alpha\beta$ comprenant M_0 et assez petit pour qu'il ne soit rencontré qu'en un seul point par toute parallèle à Oy passant entre α et β . Cet arc est la courbe représentative d'une fonction de x parfaitement déterminée dans l'intervalle (α, β) , en appelant α et β les abscisses des points α et β .

Dans le cas de la figure ci-dessus, on peut prendre α en A et β en B . On voit que la courbe tout entière se compose des deux arcs AM_0B et AM_0B , qui définissent chacun une fonction de x bien déterminée dans l'intervalle (a, b) , en appelant a et b les abscisses de A et B . On dit que ces deux fonctions sont *les deux branches de la fonction multiforme* définie, dans ce cas, par l'équation (12).

Il est évident géométriquement et l'on démontre rigoureusement que *la fonction implicite* $F(x)$ correspondant à l'arc $\alpha M_0 \beta$, par exemple, *est continue et admet une dérivée* dans tout l'intervalle (α, β) . Il est d'ailleurs facile de calculer cette dérivée, lorsqu'on a établi son existence. En effet, imaginons que, dans $f(x, y)$, on remplace y par $F(x)$; on obtiendra évidemment un résultat identiquement nul et dont la dérivée par rapport à x sera, par suite, également nulle. Or, cette dérivée nous est donnée par le théorème des fonctions composées (n° 130); on a

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = 0;$$

d'où

$$(13) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}},$$

puisque, sur l'arc $\alpha M_0 \beta$, $\frac{df}{dy} \neq 0$.

En dérivant plusieurs fois de suite, on a les dérivées successives de y , en admettant toutefois leur existence.

Dans le cas où l'équation (12) est de la forme $x = f(y) = 0$, on retrouve les fonctions inverses (n° 72).

On peut, de même, définir une fonction implicite z des deux variables x et y par l'équation $f(x, y, z) = 0$, où l'on suppose la fonction f continue et admettant des dérivées au voisinage du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, sa valeur en ce point étant nulle, tandis que $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne l'est

pas. On peut étendre tout cela à un nombre quelconque de variables.

136. Polynomes ⁽¹⁾. — Un polynome en x, y, z , par exemple, provient de x, y, z par des multiplications et additions en nombre fini. Comme ces trois variables, regardées comme des fonctions de x, y, z , sont toujours continues et admettent des dérivées partielles de tous les ordres, on voit que *tout polynome $f(x, y, z)$ est une fonction continue et admettant des dérivées de tous les ordres, quels que soient x, y, z* ; ce qu'il est d'ailleurs facile d'établir directement.

Toutes les propriétés établies dans les numéros précédents sont, dans ce cas particulier, très faciles à vérifier. C'est ainsi que le lecteur vérifiera sans peine la proposition $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Si le polynome est de degré m , *toutes les dérivées partielles d'ordre supérieur à m sont nulles*. On peut donc appliquer la formule de Taylor (n° 132) en prenant $n = m$ et $R_n = 0$. Nous conseillons au lecteur de vérifier directement la formule dans ce cas; il lui suffira de le faire pour chaque terme du polynome, tel que $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$, ($\alpha + \beta + \gamma \leq m$).

Un polynome est évidemment homogène si tous ses termes ont même degré m . C'est même souvent la définition que l'on donne des polynomes homogènes. Nous laissons au lecteur le soin de prouver que *les polynomes ainsi définis sont les seuls qui soient homogènes au sens du n° 133* ⁽²⁾.

Si, dans l'équation (10), $f(x, y)$ désigne un polynome, de degré m en y , la fonction implicite correspondante est dite *algébrique*; elle possède m branches distinctes. Toute fonction qui ne peut être définie de cette manière est dite *transcendante* (cf. n° 56).

⁽¹⁾ Le lecteur trouvera une étude plus détaillée des polynomes à plusieurs variables dans *Leçons* (t. I, n°s 44 à 49).

⁽²⁾ En remplaçant x, y, z par $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ dans un polynome de degré m , on obtient un polynome de degré m en λ , qui doit se réduire à un seul terme. Ordonner $f(x, y, z)$ par groupes homogènes.

CHAPITRE XI.

DIFFÉRENTIELLES.

---

137. **Définitions.** — Imaginons un certain nombre de variables indépendantes, par exemple x, y, z . On appelle *différentielles* de ces trois variables trois nouvelles variables, indépendantes entre elles et des précédentes, qu'on désigne respectivement par dx, dy, dz ⁽¹⁾, et auxquelles on se propose de faire jouer un rôle particulier qui va être défini dans ce Chapitre.

Soit maintenant ω une fonction de x, y, z , qui admet des dérivées partielles premières. On appelle *différentielle totale* de cette fonction l'expression ⁽²⁾

$$(1) \quad d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz.$$

C'est une fonction des six variables indépendantes x, y, z, dx, dy, dz ; mais elle possède la propriété particulière, d'ailleurs non caractéristique (n° 141), d'être *linéaire et homogène par rapport à dx, dy, dz* .

Dans le cas d'une fonction *d'une seule variable*, on a

$$(2) \quad d\omega = \frac{d\omega}{dx} dx;$$

de sorte qu'on peut considérer maintenant, si l'on veut, *la dérivée $\frac{d\omega}{dx}$ comme le quotient des différentielles $d\omega$ et dx* . C'est pourquoi

---

⁽¹⁾ Dans ces symboles, la lettre d est inséparable de la lettre qui la suit; c'est ainsi que dx forme un tout indivisible, représentant une variable au même titre que x, y, z . Ajoutons que la lettre d doit toujours être un d droit et non pas un σ rond.

⁽²⁾ Si l'on applique cette définition aux fonctions x, y, z , on trouve dx, dy, dz . Nos notations ne sont donc pas contradictoires.

l'on peut, sans confusion possible, employer des d droits dans la notation $\frac{d\omega}{dx}$, tandis qu'il n'en est pas de même quand on a plusieurs variables, car, dans le cas de la formule (1), par exemple, on n'a pas $\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{d\omega}{dx}$.

138. Une première propriété très importante résulte du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Supposons qu'on donne à x des accroissements infiniment petits du premier ordre, que nous représentons par dx, dy, dz . L'accroissement correspondant $\Delta\omega$ de la fonction ω diffère de la différentielle totale $d\omega$ d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur à un.*

En effet, d'après la formule des accroissements finis, nous avons (n° 131)

$$(3) \quad \Delta\omega = h f'_x(x + \theta h, y + \theta k, z + \theta l) + k f'_y + l f'_z,$$

où l'on a posé, pour faciliter l'écriture, $dx = h, dy = k, dz = l$.

Mais, si nous supposons nos trois dérivées partielles continues, nous pouvons écrire

$$f'_x(x + \theta h, y + \theta k, z + \theta l) = f'_x(x, y, z) + \varepsilon,$$

où ε désigne un infiniment petit, et les deux égalités analogues. D'où il résulte que

$$\Delta\omega = d\omega + (h\varepsilon + k\varepsilon' + l\varepsilon'').$$

Chacun des infiniment petits $h\varepsilon, k\varepsilon', l\varepsilon''$ est d'ordre > 1 , comme étant le produit d'un infiniment petit du premier ordre par un autre infiniment petit. Donc, il en est de même de la parenthèse (n° 122) (4).

COROLLAIRE I. — *Pour avoir la partie principale de $\Delta\omega$, il suffit de prendre celle de $d\omega$, à condition toutefois que $d\omega$ soit du pre-*

(4) Si les dérivées secondes existent au voisinage des valeurs considérées, on peut appliquer la formule de Taylor (n° 132) et voir que $\Delta\omega - d\omega$ est un infiniment petit du second ordre au moins.

mier ordre. En particulier, si ω ne dépend que de x et si dx est l'infiniment petit principal, $d\omega$ est exactement la partie principale de $\Delta\omega$.

Le théorème précédent est d'une application courante en Physique, en Astronomie et, d'une manière générale, dans toutes les Sciences où se présentent des calculs portant sur des quantités qui ne sont connues qu'avec une approximation limitée. Si certaines de ces quantités subissent des accroissements très petits (provenant de corrections à effectuer ou de variations quelconques), on peut avoir besoin de connaître les accroissements qui en résultent pour d'autres quantités dépendant des premières. Il suffit alors, la plupart du temps, de calculer les différentielles de ces dernières et de les confondre avec les accroissements cherchés. L'erreur commise est, en général, négligeable parce que inférieure à l'approximation avec laquelle sont connues les quantités sur lesquelles on opère.

139. Changements de variables. — Soient trois fonctions u , v , w des quatre variables indépendantes x , y , z , t et ω une fonction de u , v , w . Calculons $d\omega$. Nous avons, par définition,

$$(4) \quad d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\omega}{\partial y} dy + \frac{\partial\omega}{\partial z} dz + \frac{\partial\omega}{\partial t} dt.$$

Or, d'après le théorème des fonctions composées (n° 130),

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{\partial\omega}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Multiplions la première ligne par dx , la seconde par dy , la troisième par dz , la quatrième par dt et ajoutons en colonnes, il vient

$$(5) \quad d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial u} du + \frac{\partial\omega}{\partial v} dv + \frac{\partial\omega}{\partial w} dw.$$

Comme on le voit, on arrive à la même formule que si u , v , w étaient les variables indépendantes. C'est là une propriété d'im-

portance tout à fait capitale. *C'est sur elle que repose le principal avantage de l'introduction des différentielles en Analyse.* Elle montre que *la différentielle d'une fonction ne change pas quand on fait un changement de variables indépendantes.* Il suffit, pour avoir son expression en fonction des différentielles des nouvelles variables, de remplacer les différentielles des anciennes variables par leurs valeurs en fonction des différentielles des nouvelles variables.

De là résulte que, *dans le calcul des différentielles, il n'y a jamais lieu de s'occuper de ce que sont les variables indépendantes;* on différencie toujours suivant les mêmes règles. Ceci présente un avantage considérable dans bien des questions. C'est ainsi que, *dans bien des problèmes de géométrie, on a à calculer des différentielles sans savoir à l'avance comment on choisira les variables indépendantes;* ce n'est qu'à la fin du problème qu'on fait ce choix. On peut néanmoins, sans aucune difficulté, introduire toutes les différentielles dont on a besoin et obtenir toutes les relations qui les lient, quitte à les exprimer toutes, en dernier lieu et si cela est nécessaire, en fonction des différentielles des variables qu'on aura finalement choisies pour variables indépendantes.

140. De même, en Analyse, *la théorie des différentielles facilite le calcul des dérivées.* Elle permet d'abord de se passer de toutes les formules que nous avons établies à propos de ce calcul dans les Chapitres précédents. C'est ainsi qu'on peut écrire immédiatement, en appliquant la formule générale (5),

$$\begin{aligned} d(u + v + w) &= du + dv + dw, \\ d(uvw) &= vw du + uv dv + uw dw, \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{du}{v} - \frac{u dv}{v^2} = \frac{v du - u dv}{v^2}; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en supposant u , v , w fonctions d'une même variable x , les formules qui donnent la dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

De même, si x et y sont deux fonctions données de t , soit

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

on a immédiatement la dérivée de y par rapport à x ⁽¹⁾ en prenant le

(1) y est une fonction de x par l'intermédiaire de t .

141. Conditions pour qu'une expression soit différentielle exacte.

— Soit, par exemple, l'expression

$$(8) \quad P \, dx + Q \, dy + R \, dz,$$

où P, Q, R désignent trois fonctions données de x, y, z . Nous voulons savoir si elle est une différentielle totale exacte, c'est-à-dire s'il est possible de trouver une fonction ω de x, y, z telle que l'on ait

$$(9) \quad d\omega = P \, dx + Q \, dy + R \, dz,$$

c'est-à-dire

$$(10) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = R.$$

On aperçoit de suite *trois conditions nécessaires* pour que ces équations soient compatibles, à savoir

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

obtenues en calculant de deux manières chacune des dérivées partielles secondes (n° 129) $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial x}$.

Ces trois conditions nécessaires sont également suffisantes. Mais nous ne pouvons le démontrer dans cet Ouvrage. Nous nous contenterons d'indiquer au lecteur le moyen de le vérifier directement dans chaque application particulière. Ce moyen consiste tout simplement à *calculer la fonction ω* .

Partons, par exemple ⁽¹⁾, de la première équation (10). Intégrons-la par rapport à x , nous avons (Chap. XII)

$$(11) \quad \omega = \int P \, dx + \omega_1 = F(x, y, z) + \omega_1,$$

ω_1 désignant une constante vis-à-vis de x , c'est-à-dire une certaine fonction de y et z ,

⁽¹⁾ Pratiquement, on commence par celle qui semble devoir donner les calculs les plus simples pour l'intégration.

Portons la valeur obtenue dans la deuxième équation (10), par exemple ⁽¹⁾,

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} &= Q, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} &= Q - \frac{\partial F}{\partial y} = Q_1. \end{aligned}$$

Comme ω_1 ne doit pas renfermer x , il doit en être de même de Q_1 . C'est ce que le lecteur devra constater dans chaque cas particulier, s'il n'a pas fait de faute dans ses calculs.

Opérons maintenant sur l'équation (12) comme nous avons opéré sur la première équation (10). Autrement dit, intégrons par rapport à y ,

$$(13) \quad \omega_1 = \int Q_1 dy + \omega_2 = G(y, z) + \omega_2,$$

ω_2 désignant une fonction de z .

Portons dans la troisième équation (10), il doit rester une équation de la forme

$$\frac{d\omega_2}{dz} = f(z),$$

d'où l'on déduit, par une dernière intégration,

$$(14) \quad \omega_2 = \int f(z) dz = H(z) + C,$$

C désignant cette fois une véritable constante.

Finalement, on a

$$(15) \quad \omega = F(x, y, z) + G(y, z) + H(z) + C.$$

(1) Même remarque que plus haut.

CHAPITRE XII.

INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

142. **Intégrale définie.** — On est conduit, d'une manière très simple, à la notion d'intégrale définie par la mesure de certaines aires planes. Soit une fonction $f(x)$ continue et positive dans l'intervalle (a, b) . Traçons l'arc de courbe représentatif correspondant AB (fig. 24):

Fig. 24.

il est tout entier au-dessus de Ox et le point A est à gauche de B, si l'on suppose, pour fixer les idées, $a < b$. Menons les ordonnées Aa, Bb , et proposons-nous d'évaluer l'aire S comprise entre l'arc AB, l'arc Ox et les deux droites Aa, Bb .

On apprend, en Géométrie élémentaire, à mesurer les aires de tous les polygones, mais non pas les aires limitées en totalité ou en partie par des lignes courbes. Il y a exception toutefois pour le cercle, dont on calcule l'aire en la considérant comme la limite de celle d'un polygone inscrit. Nous allons essayer un procédé analogue pour le trapèze curviligne $ABba$.

Prenons, sur l'arc AB, n points quelconques, désignés, de la gauche vers la droite, par $M_1, M_2, \dots, M_n$. La première idée qui vient à l'esprit est de considérer l'aire cherchée comme la limite de celle du polygone $AM_1M_2\dots M_nBbA$, lorsque le nombre des points de division $M_1, M_2, \dots, M_n$ augmente indéfiniment, de manière que

chacun des arcs partiels $AM_1, M_1M_2, \dots, M_nB$ tende vers zéro ⁽¹⁾. Nous reviendrons sur ce procédé, qui a une certaine valeur pratique (n° 130). Pour l'instant, nous allons employer un moyen légèrement différent, qui nous donnera des calculs un peu plus simples.

Menons les ordonnées $M_1m_1, M_2m_2, \dots, M_nm_n$. Puis, par $A, M_1, M_2, \dots, M_n$, menons vers la droite des parallèles à Ox , limitées chacune à l'ordonnée du point suivant. Nous obtenons ainsi des petits rectangles $r_0, r_1, \dots, r_n$, dont la somme τ diffère de S par l'aire couverte en hachures sur la figure. Il est clair que cette différence est d'autant plus petite que les points M_i sont plus rapprochés les uns des autres et qu'elle tend vers zéro lorsque le nombre de ceux-ci augmente indéfiniment dans les conditions spécifiées plus haut. Par suite, S peut être considérée comme la limite de τ dans ces conditions. Or, la somme τ se calcule immédiatement: si l'on appelle $x_1, x_2, \dots, x_n$ les abscisses de $M_1, M_2, \dots, M_n$, on a

$$(1) \quad \tau = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots \\ + f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \dots + f(x_n)(b - x_n).$$

Nous sommes maintenant ramenés à une question d'ordre purement analytique: *Trouver la limite de la somme τ définie par la formule (1), lorsque n augmente indéfiniment, de manière que chaque intervalle partiel $x_{i+1} - x_i$ tende vers zéro.*

On peut démontrer rigoureusement, sans faire appel à l'intuition géométrique qui nous a servi de point de départ, que *cette limite existe effectivement* toutes les fois que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) ⁽²⁾ et qu'elle est indépendante de la loi qui préside aux fractionnements consécutifs de l'intervalle (a, b) . Nous admettrons cette démonstration, bien qu'on puisse la présenter d'une façon assez élémentaire, mais un peu longue ⁽³⁾.

La limite en question se représente par le symbole conven-

(1) On peut supposer, par exemple, que les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ soient obtenus en partageant l'intervalle (a, b) en n parties égales, le nombre n augmentant ensuite indéfiniment. Mais, cela n'est pas nécessaire.

(2) On peut restreindre davantage les conditions d'intégrabilité de la fonction $f(x)$ pour l'intervalle (a, b) , c'est-à-dire les conditions qu'elle doit remplir pour que la somme τ ait une limite. La recherche des conditions strictement suffisantes est d'ailleurs une question fort difficile.

(3) Le lecteur trouvera une démonstration en partie analytique et en partie géométrique dans *Leçons* (n° 303).

tionnel $\int_a^b f(x) dx$ [énoncez : somme de a à b de $f(x) dx$], et se nomme *intégrale définie*. C'est elle qui mesure, par définition, l'aire S du trapèze curviligne $ABba$ ⁽¹⁾.

Les nombres a et b sont appelés les *bornes* (ou *limites*) *inférieure* et *supérieure* de l'intégrale. L'intervalle (a, b) est l'*intervalle d'intégration*.

143. On peut imaginer d'autres sommes qui ont pour limite S . Par exemple, on peut mener par les points $M_1, M_2, \dots, M_n, B$ des parallèles à Ox dirigées vers la gauche et limitées aux ordonnées qui les précèdent immédiatement; on obtient des rectangles dont la somme σ' a encore pour limite S . Cette somme s'écrit d'ailleurs

$$(2) \quad \sigma' = f(x_1)(x_1 - a) + \dots + f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) + \dots + f(b)(b - x_n).$$

Dans le cas de figure actuel, l'aire S est évidemment comprise entre σ et σ' , qui en sont respectivement des valeurs approchées par défaut et par excès.

On peut aussi, plus généralement, former le rectangle r_i en menant une parallèle à Ox par un point quelconque p_i de l'arc $M_i M_{i+1}$, ce qui conduit à la somme

$$(3) \quad \Sigma = f(\xi_0)(x_1 - a) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \dots \\ - f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) + \dots + f(\xi_n)(b - x_n),$$

où $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ sont des nombres quelconques respectivement compris dans les intervalles $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$. On démontre que, *quelle que soit la manière de choisir les ξ_i , Σ tend toujours vers la même limite $\int_a^b f(x) dx$, lorsque n augmente indéfiniment* dans les conditions indiquées plus haut.

144. Nous avons supposé jusqu'ici $a < b$ et $f(x) > 0$ dans l'intervalle (a, b) , et cela afin de ne rencontrer aucune difficulté de signes dans l'évaluation approchée de l'aire S . Mais, nous pouvons maintenant lever ces restrictions. *Quel que soit le signe de $f(x)$ dans*

(1) Comme on le voit, l'existence de cette aire, que nous avons admise au début comme notion expérimentale intuitive, peut s'établir rigoureusement en s'appuyant uniquement sur la notion de nombre et sur celle de la mesure d'un rectangle.

l'intervalle (a, b) et quel que soit le signe de la différence $b - a$, la somme Σ définie par la formule (3) a une limite qui est, par définition, l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$. On conçoit en effet que la démonstration analytique de cette proposition puisse se faire aussi aisément dans le cas général que dans le cas particulier examiné primitivement.

Remarque. — On peut remplacer la somme Σ par la suivante :

$$(4) \quad \Sigma' = [f(\xi_0) + \varepsilon_0](x_1 - a) + [f(\xi_1) + \varepsilon_1](x_2 - x_1) + \dots \\ + [f(\xi_n) + \varepsilon_n](b - x_n),$$

où les nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ tendent tous vers zéro en même temps que les intervalles partiels. En effet, on a

$$\Sigma' - \Sigma = \varepsilon_0(x_1 - a) + \varepsilon_1(x_2 - x_1) + \dots + \varepsilon_n(b - x_n).$$

Donc, si ε est la plus grande des valeurs absolues de $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$,

$$|\Sigma' - \Sigma| \leq \varepsilon[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \dots + (b - x_n)] = \varepsilon(b - a).$$

La différence $\Sigma' - \Sigma$ tend donc vers zéro; par suite, Σ' a même limite que Σ .

Pratiquement, on voit qu'on peut remplacer chaque terme de la somme Σ par un infiniment petit équivalent (n° 120).

145. Formules. — Voici maintenant quelques formules très simples, qui résultent immédiatement des définitions précédentes :

$$1^{\circ} \quad (5) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

En effet, on a le droit de supposer que les sommes Σ et Σ' , qui donnent naissance à ces deux intégrales, sont obtenues par le même mode de fractionnement de l'intervalle (a, b) et par le même choix des nombres ξ_i , puisque la limite de chacune d'elles est indépendante de ce mode de fractionnement et de ce choix. Mais alors, il est manifeste qu'on a constamment $\Sigma = -\Sigma'$, ce qui donne, à la limite, la formule à démontrer.

$$2^{\circ} \quad (6) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

En effet, supposons d'abord c compris entre a et b . Nous avons le droit de choisir constamment le nombre c parmi les nombres x_i relatifs à la somme Σ qui définit la première intégrale. Cette somme peut alors se partager en deux sommes partielles Σ' et Σ'' , l'une relative aux intervalles compris entre a et c , l'autre relative aux intervalles compris entre c et b . On a $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$; d'où la formule (6), en passant à la limite, puisque Σ , Σ' , Σ'' tendent respectivement vers

$$\int_a^b f(x) dx, \int_a^c f(x) dx, \int_c^b f(x) dx.$$

Si maintenant l'on suppose c extérieur à l'intervalle (a, b) , a sera nécessairement compris entre b et c , ou bien b entre a et c .

Dans le premier cas, on peut écrire

$$\int_b^c = \int_b^a + \int_a^c$$

ou [formule (5)]

$$-\int_a^b = -\int_a^b + \int_a^c,$$

ce qui est bien la formule (6). Dans le second cas, on procède d'une manière analogue. De (6), on déduit immédiatement la généralisation suivante :

$$(7) \quad \int_a^b = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \dots + \int_{x_k}^b.$$

Comme application, on peut donner une interprétation géométrique simple de l'intégrale définie, dans le cas où $f(x)$ prend des signes quelconques entre a et b . Supposons que l'arc AB coupe Ox en un certain nombre de points $P_1, P_2, \dots, P_k$, d'abscisses $x_1, x_2, \dots, x_k$. Décomposons $\int_a^b f(x) dx$ par la formule (7). Si $a < b$, chaque intégrale partielle ainsi obtenue représente une aire précédée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que cette aire est au-dessus ou au-dessous de Ox. Dès lors, si nous faisons la convention de regarder comme positive toute aire située au-dessus de Ox et comme négative toute aire située au-dessous, nous voyons que l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$

mesure l'aire *algébrique* comprise entre l'arc AB, Ox, Aa et Bb. Si $a > b$, il faut faire la convention de signes opposée.

$$3^{\circ} \quad \int_a^b [\Lambda f(x) + B g(x)] dx = \Lambda \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx$$

(Λ et $B = \text{const.}$).

Conséquence évidente de la définition de l'intégrale.

1^o FORMULE DE LA MOYENNE. — Si c désigne un certain nombre compris entre a et b , on a

$$(8) \quad \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c).$$

En effet, soient m et M les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) , (n^o 59). Si $a < b$, on a évidemment

$$\Sigma \quad m(x_1 - a) + m(x_2 - x_1) + \dots \\ + m(x_{i+1} - x_i) + \dots + m(b - x_n) = m(b - a).$$

De même, $\Sigma < M(b - a)$.

À la limite, on a donc

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Le quotient $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$ étant compris entre m et M , on sait que sa valeur est atteinte par $f(x)$ pour au moins une valeur c de l'intervalle (a, b) (n^o 59); ce qui nous prouve la formule (8). Si $a > b$, il n'y a qu'à changer le sens de toutes les inégalités ci-dessus.

Nous verrons, au numéro suivant, que cette formule, comme sous le nom de *formule de la moyenne*, est identique, au fond, à la formule des accroissements finis.

146. **Valeur moyenne d'une fonction.** — À la notion d'intégrale définie se rattache, de la façon la plus naturelle, celle de la *valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle donné*.

Soit la fonction $f(x)$, finie et continue dans l'intervalle (a, b) . Divisons celui-ci en $n - 1$ parties égales, soit $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, b$,

et proposons-nous de calculer la limite, pour n infini, de la moyenne arithmétique

$$S_n = \frac{f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-2}) + f(b)}{n}.$$

A cet effet, comparons-la avec la somme

$$\Sigma_n = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-2})(b - x_{n-2}),$$

dont la limite est $\int_a^b f(x) dx$,

Si l'on remarque que $x_1 - a = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-2} = \frac{b-a}{n-1}$, on peut écrire

$$\Sigma_n = \frac{b-a}{n-1} [f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-2})] = \frac{b-a}{n-1} [nS_n - f(b)].$$

Si, dans cette égalité, on fait croître n indéfiniment, on voit que

la limite de S_n est $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$. C'est cette limite qu'on appelle *valeur moyenne de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b)* . On peut remarquer que, d'après la formule de la moyenne (n° 145), elle est égale à la valeur que prend $f(x)$ pour une certaine valeur de x comprise entre a et b , ce qui est du reste assez intuitif.

147. Fonctions primitives, intégrales indéfinies. — Le procédé indiqué au n° 142 pour calculer l'aire S est intéressant en ce sens qu'il nous a conduit à la notion purement analytique d'intégrale définie. Mais il est loin d'être pratique, car on ne peut, en général, trouver directement la limite de la somme Σ . Nous allons indiquer une autre méthode, qui semble, au premier abord, un peu détournée et artificielle, mais qui nous donnera une solution plus élégante et en général plus pratique.

Soit M un point quelconque de l'arc AB (fig. 25), d'abscisse x . Menons l'ordonnée Mm . Il est évident que l'aire $AMma$ est une fonction de x bien déterminée dans l'intervalle (a, b) , soit $S(x)$. Nous allons calculer sa dérivée. Donnons à x l'accroissement $\Delta x = \overline{mm'}$; l'accroissement ΔS correspondant est l'aire $MM'n'm$, précédée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que Δx est positif ou

négligé. Or, si y_1 et y_2 sont les ordonnées minimum et maximum des points de l'arc MM' , cette aire est visiblement comprise entre $y_1|\Delta x|$ et $y_2|\Delta x|$. Comme ΔS a le signe commun à $y_1\Delta x$ et $y_2\Delta x$,

Fig. 5.

il est constamment compris entre ces deux quantités; donc $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ est compris entre y_1 et y_2 . Si Δx tend maintenant vers zéro, y_1 et y_2 tendent tous deux vers l'ordonnée y du point M , donc aussi $\frac{\Delta S}{\Delta x}$. Finalement, *la fonction $S(x)$ a pour dérivée $y=f(x)$.*

De cette propriété fondamentale résulte immédiatement le procédé suivant pour calculer $S(x)$. Supposons que, par un moyen quelconque (nous en indiquerons au Chapitre suivant), on ait découvert une fonction $F(x)$ admettant pour dérivée $f(x)$, ou, comme on dit, une *fonction primitive* de $f(x)$. Les fonctions $S(x)$ et $F(x)$ ayant même dérivée diffèrent par une constante (n° 64). On a donc

$$(9) \quad S(x) = F(x) + C.$$

Nous n'avons plus qu'à calculer C . Pour cela, il nous suffit de remplacer x , dans l'identité (9), par une valeur telle qu'on connaisse la valeur correspondante de $S(x)$. Or, cette valeur saute aux yeux; c'est $x=a$, car le point M vient alors en A et l'aire $S(x)$ se réduit à zéro. Nous avons donc

$$0 = F(a) + C;$$

d'où

$$(10) \quad S(x) = F(x) - F(a).$$

En particulier, l'aire S du trapèze curviligne $ABba$ est

$$(11) \quad S = F(b) - F(a).$$

148. Nous pouvons aisément nous passer maintenant de la Géomé-

trie et interpréter ce qui précède en nous plaçant à un point de vue purement analytique.

Soit une intégrale définie $I = \int_a^x f(t) dt$ ⁽¹⁾, dont la borne inférieure est fixe et la borne supérieure variable. Il est clair que c'est une fonction de x , puisque, lorsqu'on donne les deux bornes de l'intégrale, celle-ci prend une valeur parfaitement déterminée. Soit donc $I = \varphi(x)$. Cherchons la dérivée $\varphi'(x)$. On a [formule (6)]

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt,$$

ou

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta x f(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1),$$

d'après la formule de la moyenne. D'où

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = f(x + \theta \Delta x).$$

Si Δx tend vers zéro, le second membre tend vers $f(x)$, puisque cette dernière fonction est continue. Donc $\varphi(x)$ a pour dérivée $f(x)$.

Si maintenant l'on désigne par $F(x)$ une fonction primitive quelconque de $f(x)$ et si l'on remarque que $\varphi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, on peut répéter le raisonnement fait plus haut et écrire, par suite,

$$(12) \quad \int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a),$$

$$(13) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Cette formule a une importance capitale dans le calcul intégral. Elle nous montre que le calcul d'une intégrale définie est ramené à la recherche d'une fonction primitive de la fonction qui figure sous le signe $\int$. Nous verrons au Chapitre suivant comment on peut résoudre ce dernier problème.

---

(1) Nous changeons la notation adoptée plus haut pour la variable figurant sous le signe $\int$, afin d'éviter toute confusion entre cette variable, dite *variable d'intégration*, et la borne supérieure x de l'intégrale, car ces variables jouent des rôles entièrement différents.

Remarques. — 1. Si l'on applique au premier membre de (13) la formule de la moyenne, on a

$$F(b) - F(a) = (b - a)f(c) = (b - a)F'(c);$$

on retrouve la formule des accroissements finis.

On peut vérifier de même, au moyen de (13), les autres formules du n° 143.

II. *On ne peut affirmer l'exactitude de la formule (13) que si la fonction $F(x)$ est bien définie et continue dans tout l'intervalle (a, b) .* Il peut arriver en effet que $F(x)$ soit discontinue pour une valeur intermédiaire c , tout en étant continue et admettant $f(x)$ pour dérivée dans chacun des intervalles (a, c) et (c, b) . Si δ désigne la discontinuité, c'est-à-dire la différence $F(c + 0) - F(c - 0)$ (n° 38), on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= F(c - 0) - F(a) + F(b) - F(c + 0) = F(b) - F(a) - \delta. \end{aligned}$$

Cette particularité provient de ce que, pour établir la formule (13), on s'appuie sur le théorème II du n° 64, lequel n'est exact qu'autant que la fonction qu'il intéresse satisfait, dans l'intervalle (a, b) , aux conditions du théorème des accroissements finis.

Intégrales indéfinies. — Les considérations qui précèdent, jointes au théorème d'existence des intégrales définies, nous prouvent que toute fonction continue $f(x)$ peut être considérée comme la dérivée d'une infinité de fonctions, différant entre elles par des constantes.

On convient de représenter l'ensemble de toutes ces primitives par le symbole $\int f(x) dx$ [énoncez : somme de $f(x) dx$], qui porte le nom d'*intégrale indéfinie*, pour rappeler qu'il représente une fonction qui n'est définie qu'à une constante additive près.

149. **Calcul approché des intégrales définies.** — Nous venons d'indiquer un moyen élégant de calculer l'intégrale définie

$$(14) \quad I = \int_a^b f(x) dx.$$

Malheureusement, il est subordonné à la recherche d'une fonction primitive de $f(x)$. Or, si ce dernier problème est, dans certains cas,

très facile à résoudre, il y a d'autres cas où il est excessivement compliqué ou même insoluble par l'emploi des seules fonctions élémentaires (n° 74); et cela arrive pour des fonctions très simples placées sous le signe $\int$. Il est donc nécessaire de connaître une *méthode permettant de calculer, tout au moins d'une manière approchée, n'importe quelle intégrale définie*, ce qui résoudrait du même coup le problème de la recherche des primitives de n'importe quelle fonction, puisqu'il suffirait alors d'intégrer celle-ci entre une borne fixe et une borne variable (n° 148).

Il existe différentes méthodes de calcul approché des intégrales définies. Mentionnons d'abord les procédés mécaniques qui reposent sur l'emploi de certains appareils plus ou moins ingénieux, auxquels on donne les noms d'*intégrateurs*, *intégraphes* ou *planimètres* ⁽¹⁾, mais que nous ne pouvons pas décrire ici. Nous nous occuperons seulement des *méthodes purement analytiques*. Elles consistent toutes à interpréter l'intégrale au moyen d'une aire, comme nous l'avons fait au début de ce Chapitre. Par des décompositions convenables, on peut toujours se ramener à l'hypothèse $a < b, f(x) > 0$, c'est-à-dire à l'évaluation de l'aire $ABba$ de la figure 24.

150. 1^{re} *Méthode des trapèzes*. — Décomposons ab en n parties égales, dont nous désignerons la valeur commune par $h = \frac{b-a}{n}$. Menons par les points de division des parallèles à Oy , qui rencon-

trent l'arc AB aux points $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ (fig. 26). La méthode consiste à remplacer l'aire S_i du trapèze curviligne $M_i M_{i+1} m_{i+1} m_i$

⁽¹⁾ On les appelle ainsi quand ils permettent de mesurer directement l'aire limitée par une courbe plane quelconque, question qui se rattache étroitement, comme nous l'avons vu et le verrons encore, au calcul intégral.

par celle du trapèze rectiligne obtenu en traçant la corde $M_i M_{i+1}$, c'est-à-dire par $\frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})$, en appelant y_i l'ordonnée de M_i , soit $f(x_i)$. On obtient de la sorte, pour valeur approchée de l'intégrale,

$$(15) \quad I = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right].$$

La figure montre que l'erreur ε_i commise sur l'aire S_i est beaucoup plus petite que si l'on avait pris pour valeur approchée l'aire du rectangle x_i considéré au n° 142. On peut, du reste, obtenir aisément l'ordre de grandeur de cette erreur.

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$. On a

$$(16) \quad \varepsilon_i = F(x_i + h) - F(x_i) - \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_i + h)].$$

Si l'on développe suivant les puissances croissantes de h , en appliquant la formule de Taylor (n° 115), on constate que le premier terme non nul est $-\frac{h^3 f''(x_i)}{12}$; de sorte que, si h est assez petit, ε_i est de l'ordre de h^3 , et l'erreur totale ε est de l'ordre de

$$nh^3 = (b - a)h^2.$$

On peut obtenir une évaluation plus précise de ε_i , grâce à l'artifice suivant, qui rappelle celui de la formule de Mac-Laurin (n° 114) et que nous empruntons à *Leçons* (n° 331).

Posons, en nous guidant sur ce qui vient d'être vu, $\varepsilon_i = \frac{h^3}{12} \lambda$, λ étant par conséquent déterminé par l'équation

$$(17) \quad F(x_i + h) - F(x_i) - \frac{h}{2} f(x_i) - \frac{h}{2} f(x_i + h) - \frac{h^3}{12} \lambda = 0.$$

Considérons la fonction obtenue en remplaçant au premier membre h par $x - x_i$; soit

$$\varphi(x) = F(x) - F(x_i) - \frac{x - x_i}{2} f(x_i) - \frac{x - x_i}{2} f(x) - \frac{(x - x_i)^3}{12} \lambda.$$

Cette fonction s'annule identiquement pour $x = x_i$ et, en vertu de (17), pour $x = x_i + h$. Donc sa dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(x_i) - \frac{x - x_i}{2} f'(x) - \frac{(x - x_i)^2}{4} \lambda.$$

s'annule entre x_i et $x_i + h$, soit pour x'_i . Mais elle s'annule aussi pour $x = x_i$; donc

$$\varphi''_i(x) = -\frac{x - x_i}{2} [f''(x) + \lambda]$$

s'annule pour une certaine valeur ξ_i comprise entre x_i et x'_i et, *a fortiori*, entre x_i et $x_i + h$. On a, dès lors,

$$\lambda = -f''(\xi_i).$$

En conséquence, si l'on appelle M une limite supérieure de $|f''(x)|$ dans l'intervalle (a, b) , on a certainement

$$(18) \quad |\varepsilon| < \frac{Mh^3}{12} n = \frac{(b-a)Mh^2}{12}.$$

51. 2^e *Méthode de Simpson*. — Toutes les méthodes d'intégration approchée reviennent à remplacer l'arc de courbe AB par une autre ligne qui s'en rapproche le plus possible et pour laquelle on sache effectuer la *quadrature* ⁽¹⁾. Suivant la manière de choisir cette ligne, on obtient telle ou telle méthode. Dans la méthode des trapèzes, on a pris une ligne polygonale inscrite. Dans celle de Simpson, que nous allons décrire, on prend une ligne constituée par des arcs de parabole.

En conservant les notations précédentes, faisons passer par les trois points consécutifs M_i, M_{i+1}, M_{i+2} une parabole d'axe parallèle à Ox et d'équation

$$(19) \quad y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

où α, β, γ désignent trois constantes, qu'on déterminerait en écrivant que l'équation est vérifiée pour $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$. L'aire correspondante S'_i , que nous allons substituer à l'aire exacte S_i , a pour valeur

$$\begin{aligned} S'_i &= \int_{x_i}^{x_{i+2}} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx \\ &= \frac{\alpha}{3} (x_{i+2}^3 - x_i^3) + \frac{\beta}{2} (x_{i+2}^2 - x_i^2) + \gamma (x_{i+2} - x_i) \\ &= (x_{i+2} - x_i) \left[\frac{\alpha}{3} (x_{i+2}^2 + x_{i+2}x_i + x_i^2) + \frac{\beta}{2} (x_{i+2} + x_i) + \gamma \right]. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ On désigne ainsi le calcul d'une intégrale définie quelconque, pour rappeler que cela équivaut à évaluer une aire plane, ou, comme on dit, à faire la quadrature de cette aire.

Si l'on remarque que $x_{i+2} - x_i = 2h$, que $x_{i+1} = \frac{x_i + x_{i+2}}{2}$ et si l'on tient compte de (19), on trouve, après un calcul élémentaire (1),

$$(20) \quad S'_i = \frac{h}{3} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}).$$

En faisant successivement $i = 0, 2, 4, 6, \dots, 2p-2$, et supposant n pair et égal à $2p$, on obtient pour valeur approchée de I

$$(21) \quad I = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2p}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2p-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2p-1})].$$

La figure fait deviner que l'erreur doit être plus petite, pour une valeur donnée de n , que dans la méthode des trapèzes, car les arcs de parabole semblent plus voisins de la courbe que les cordes $M_i M_{i+1}$.

Effectivement, on a

$$\varepsilon_i = F(x_i + 2h) - F(x_i) - \frac{h}{3} [f(x_i) + 4f(x_i + h) + f(x_i + 2h)].$$

Si l'on développe suivant les puissances croissantes de h , on constate que le premier terme non nul est $-\frac{h^3}{90} f^{(3)}(x_i)$. D'où l'on conclut que, chaque erreur partielle étant de l'ordre de h^3 , l'erreur totale est de l'ordre de h^3 .

152. 3^e Méthode du développement en série. — Si la fonction $f(x)$ est développable en série entière et que l'intervalle (a, b) soit intérieur à l'intervalle de convergence, on peut intégrer terme à terme (n° 102). On est alors ramené à un calcul de série, ce qui se fait par la méthode du n° 54.

Ce procédé, lorsqu'il est applicable, est souvent avantageux, surtout s'il conduit à une série rapidement convergente. Mais on ne peut pas toujours l'employer, car il est subordonné au développement de $f(x)$ en série entière.

153. Extensions de l'intégrale définie. — Nous avons défini le

Remplacer x_{i+2}, x_i par

$$\frac{1}{2} [(x_{i+2} + x_i)^2 - x_{i+2}^2 - x_i^2] = \frac{1}{2} (4x_{i+1}^2 - x_{i+2}^2 - x_i^2);$$

puis $2x_i$ par $y_i = 2x - y$, et $2x_{i+1}, 2x_{i+2}$ par les quantités analogues.

symbole $\int_a^b f(x)dx$, en supposant que a et b étaient deux nombres finis et que la fonction $f(x)$ était finie et continue dans l'intervalle (a, b) . On peut, dans certaines conditions, s'affranchir de ces restrictions et étendre la notion d'intégrale définie, moyennant des conventions convenables.

1. *L'intervalle d'intégration est infini.* — Proposons-nous de définir le symbole $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, en supposant $f(x)$ finie et continue dans tout l'intervalle $(a, +\infty)$ ⁽¹⁾. Dans ce but, considérons l'intégrale $F(z) = \int_a^z f(x)dx$; elle a une signification parfaitement déterminée, quel que soit $z > a$. Imaginons que z tende vers $+\infty$. Si $F(z)$ a une limite finie λ , on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ a un sens, ou qu'elle est convergente; sa valeur est λ , par définition. Si $F(z)$ augmente indéfiniment ou ne tend vers aucune limite déterminée, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ n'a pas de sens, elle est divergente.

Lorsqu'on sait effectuer la quadrature $\int f(x)dx$, on peut reconnaître directement la nature de l'intégrale et obtenir, le cas échéant, sa valeur; on est ramené à une question ordinaire de limite. Quand il n'en est pas ainsi, ou lorsque la primitive de $f(x)$ se présente sous une forme trop compliquée, on est obligé d'étudier la nature de l'intégrale par des procédés spéciaux, qui offrent la plus grande analogie avec les procédés en usage dans l'étude des séries ⁽²⁾.

Quoique cette théorie soit en somme très élémentaire, nous ne pouvons l'exposer ici en détail et nous nous bornerons à donner quelques brèves indications.

Il y a lieu, tout d'abord, de distinguer deux cas, suivant que la fonction $f(x)$ garde un signe constant à partir d'une valeur suffisamment

(1) On ne pourrait le faire directement, comme au n° 142, car on ne peut pas partager l'intervalle $(a, +\infty)$ en un nombre fini d'intervalles finis.

(2) On peut d'ailleurs rattacher l'une à l'autre les deux théories et déduire de l'une des critères de convergence pour l'autre.

grande de x ou, au contraire, change constamment de signe quand x croît indéfiniment ⁽¹⁾. Dans la première hypothèse, qui est la seule que nous considérerons, on établit les critères de convergence *en procédant par comparaison*.

Et pour cela, on s'appuie sur le théorème suivant :

THÉORÈME ⁽²⁾. — Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions finies, continues et positives entre a et $+\infty$.

1° Si l'on a $f(x) \leq Ag(x)$ et que $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, il en est de même de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2° Si l'on a $f(x) \geq Ag(x)$ et que $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge, il en est de même de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

En effet, si z varie entre a et $+\infty$, les fonctions $F(z) = \int_a^z f(x)dx$ et $G(z) = \int_a^z g(x)dx$ sont croissantes, car leurs dérivées $f(z)$ et $g(z)$ sont positives. Ceci étant :

1° On a évidemment ⁽³⁾

$$F(z) \leq A G(z) < A G(+\infty).$$

Comme $F(z)$ croît, elle tend vers une limite finie, pour $z = +\infty$.

2° On a

$$F(z) \geq A G(z);$$

comme $G(z)$ augmente indéfiniment, il en est de même de $F(z)$.

En prenant $g(x) = \frac{1}{x^m}$ et remarquant que l'intégrale correspondante, qu'on peut calculer directement, converge si $m > 1$ et diverge si $m \leq 1$, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Si le produit $x^m f(x)$ reste inférieur à un nombre fixe et que m soit > 1 , l'intégrale est convergente.

Si le produit $x^m f(x)$ reste supérieur à un nombre fixe non nul et que m soit > 1 , l'intégrale est divergente.

On peut en tirer la règle pratique suivante :

⁽¹⁾ De même qu'on distingue les séries à termes positifs et les séries à termes quelconques.

⁽²⁾ Cf. théorème I, n° 42.

⁽³⁾ On peut, en effet, partager l'intervalle (a, z) de la même manière pour F et AG . Il est alors évident que la somme Σ n° 142) sera plus grande pour AG que pour F . Donc, à la limite, on voit bien que AG sera supérieure à F .

RÈGLE PRATIQUE. — *Choissant $\frac{1}{x}$ pour infiniment petit principal, on cherche l'ordre infinitésimal de la fonction $f(x)$, qui doit s'annuler pour x infini sous peine de divergence. Si cet ordre est > 1 , l'intégrale a un sens; s'il est ≤ 1 , elle n'en a pas.*

Bien entendu, il peut arriver que l'ordre infinitésimal ne soit pas déterminé (n° 120). Dans ce cas, il faut essayer l'application directe du théorème.

Le symbole $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ se définit comme le précédent et s'y ramène d'ailleurs par le changement de x en $-x$. Enfin, si les intégrales $\int_a^{+\infty}$ et $\int_a^{-\infty}$ sont séparément convergentes et ont pour valeurs respectives A et B, le symbole $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ représente, par définition, la somme $\int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = A + B$.

154. II. *La fonction sous le signe $\int$ devient infinie.* — Supposons d'abord que $f(x)$ soit finie et continue dans tout l'intervalle (a, b) , sauf à l'extrémité b de cet intervalle, pour laquelle elle devient infinie ⁽¹⁾. L'intégrale $F(z) = \int_a^z f(x)dx$ a un sens parfaitement déterminé tant que z est compris entre a et b . Imaginons que, dans ces conditions, z tende vers b . Si $F(z)$ a une limite finie λ , on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ a un sens, ou qu'elle est convergente; sa valeur est λ , par définition. Dans le cas contraire, l'intégrale n'a pas de sens, elle est divergente.

On peut répéter ici tout ce qui a été dit au numéro précédent, avec de légères modifications que le lecteur apercevra aisément.

En particulier, on a la règle pratique suivante, où l'on suppose, pour fixer les idées, $a < b$:

RÈGLE PRATIQUE. — *On pose $b - x = h$ et, regardant h comme infiniment petit principal, on cherche l'ordre infinitésimal m de $\frac{1}{f(b-h)}$. L'intégrale a un sens si $m < 1$; elle n'en a pas si $m \geq 1$.*

⁽¹⁾ On ne peut, dans ce cas, définir directement l'intégrale, car les derniers termes de la somme Σ (n° 142) se présenteraient à la limite sous la forme $0 \times \infty$ et n'auraient aucun sens déterminé.

On définit de la même façon le symbole $\int_a^b f(x) dx$, dans le cas où $f(x)$ devient infinie pour $x = a$, comme étant la limite de $\int_z^b f(x) dx$, lorsque z tend vers a par valeurs comprises entre a et b .

Enfin, supposons que $f(x)$ devienne infinie pour une certaine valeur x_1 comprise entre a et b . On étudie séparément les deux intégrales $\int_a^{x_1} f(x) dx$ et $\int_{x_1}^b f(x) dx$. Si elles sont toutes deux convergentes et ont pour valeurs respectives A et B , le symbole $\int_a^b f(x) dx$ représente, par définition, la somme $\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx = A + B$. De même, si $f(x)$ devient infinie à la fois pour $x = a$ et $x = b$, on choisit c quelconque entre a et b et l'on écrit

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

155. **Intégrales de fonctions imaginaires.** — On peut étendre, d'une manière élémentaire, la notion d'intégrale à certaines fonctions imaginaires, comme on leur a étendu déjà la notion de dérivée (n° 79). Si $f(x)$ et $g(x)$ désignent deux fonctions réelles de la variable réelle x , on a, par définition,

$$(22) \quad \int [f(x) + ig(x)] dx = \int f(x) dx + i \int g(x) dx.$$

La dérivée de cette intégrale est, en vertu du n° 79, $f(x) + ig(x)$, c'est-à-dire la quantité sous le signe $\int$, comme cela a lieu pour les intégrales réelles. Il résulte, en particulier, de là et des formules établies au n° 109, qu'on a, en désignant par z une fonction imaginaire de x et par z' sa dérivée,

$$(23) \quad \int e^z z' dx = \int e^z dz = e^z + \text{const.} = e^z + A + Bi \quad (A, B = \text{const.});$$

$$(24) \quad \int \cos z dz = \sin z + \text{const.}, \quad \int \sin z dz = -\cos z + \text{const.}$$

De même, en s'appuyant sur la fin du n° 79, on a

$$(25) \quad \int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + \text{const.},$$

en supposant m entier, positif ou négatif, mais $\neq -1$.

Quant à l'intégrale $\int \frac{dz}{z}$, elle est égale à $\log z$, si l'on a défini cette dernière fonction et calculé sa dérivée (exercice proposé n° 18 relatif au Chapitre VII). Sinon, on peut écrire

$$(26) \quad \begin{aligned} \int \frac{dz}{z} &= \int \frac{(u' + iv') dx}{u + iv} \\ &= \int \frac{(u' + iv')(u - iv)}{u^2 + v^2} dx = \int \frac{(uu' - vv') dx}{u^2 + v^2} \\ &\quad + i \int \frac{(uv' - vu') dx}{u^2 + v^2} = \log \sqrt{u^2 + v^2} + i \arctan \frac{v}{u}. \end{aligned}$$

On retrouve d'ailleurs la définition de $\log z$ (exercice précédent).

CHAPITRE XIII.

CALCUL DES QUADRATURES.

---

156. Nous avons vu, au Chapitre précédent, l'intérêt qui réside dans la recherche des primitives d'une fonction donnée $f(x)$. C'est ce problème, c'est-à-dire le *calcul des intégrales indéfinies*, ou *calcul des quadratures*, qui va faire l'objet du présent Chapitre.

Tout d'abord, il convient de poser nettement le problème. Quelle que soit la fonction $f(x)$, nous pouvons toujours calculer ses primitives avec une approximation aussi grande que nous le voulons, puisque nous savons évaluer de cette manière l'intégrale définie $\int_{x_0}^x f(t) dt$, pour n'importe quelles valeurs de x_0 et x (nos 149 et suivants).

Mais ce n'est pas ainsi que nous entendons résoudre la question. *Supposant que la fonction $f(x)$ est une fonction élémentaire (n° 74), nous nous proposons de chercher à quelles conditions l'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$ est aussi une fonction élémentaire et de calculer cette dernière.*

Disons tout de suite que le problème, envisagé de ce point de vue, est fort difficile et qu'il n'existe pas de méthode générale permettant de le résoudre dans tous les cas. Entre autres choses, *il est souvent fort pénible de reconnaître si une quadrature peut ou ne peut pas se ramener aux fonctions élémentaires*. Il ne faudrait pas croire, en effet, que toute fonction élémentaire admet une primitive élémentaire. Il y a des quadratures d'apparence très simple, telles que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int e^{x^2} dx, \quad \int \sin(x^2) dx, \quad \dots$$

qui ne peuvent être calculées par les fonctions élémentaires; elles

définissent des fonctions transcendantes nouvelles, qu'on doit étudier à part et dont on peut, si l'on veut, calculer les valeurs numériques, pour les consigner dans des tables analogues aux tables de logarithmes ou de lignes trigonométriques. Il ne rentre pas dans le cadre de cet Ouvrage d'aborder ce côté de la question. *Nous allons seulement passer en revue les différents types de fonctions qu'on sait intégrer par les fonctions élémentaires, en indiquant pour chacun d'eux la méthode à suivre pour effectuer la quadrature.*

157. Primitives à retenir par cœur. — Tout d'abord, il est nécessaire de connaître par cœur et sans aucune hésitation les primitives d'un nombre restreint de fonctions auxquelles on ramène toutes les autres. Ces fonctions sont tout simplement les dérivées des fonctions élémentaires les plus simples qui ont été calculées aux Chapitres V et VI. En voici la liste :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1); \\ \int \frac{dx}{x} = \log |x| \quad (1); \\ \int e^x dx = e^x; \\ \int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x; \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x; \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x; \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x. \end{array} \right.$$

Ce sont là les intégrales qu'il est absolument indispensable d'avoir constamment présentes à la mémoire. A côté de cela, il y en a quelques autres qu'il est utile également de connaître, bien qu'elles puissent se ramener aux précédentes. Citons les principales,

(1) Observons en effet que $\log x$ et $\log (-x)$ ont tous deux pour dérivée $\frac{1}{x}$. On prendra donc, pour primitive de $\frac{1}{x}$, $\log x$ ou $\log (-x)$ suivant que $x > 0$ ou $x < 0$, c'est-à-dire, en somme, $\log |x|$.

dont le lecteur vérifiera l'exactitude en prenant les dérivées :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \tan x \, dx = -\log |\cos x|, \quad \int \cot x \, dx = \log |\sin x|; \\ \int \frac{dx}{\sin x} = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|; \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \log |x + \sqrt{x^2 + a}| \quad (a = \text{const.}). \end{array} \right.$$

Voyons maintenant quels sont les procédés généraux qui permettent de ramener certaines catégories d'intégrales aux intégrales fondamentales que nous venons d'énumérer.

138. Méthode du changement de variable. — Soit à calculer

$$(1) \quad y = F(x) = \int f(x) \, dx,$$

c'est-à-dire en somme une fonction dont la différentielle soit

$$(2) \quad dy = f(x) \, dx.$$

Faisons un changement de variable quelconque

$$(3) \quad x = \varphi(t).$$

L'égalité (2) devient (n° 139)

$$(4) \quad dy = f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt = g(t) \, dt,$$

laquelle équivaut à

$$(5) \quad y = \int g(t) \, dt.$$

On voit donc que, pour transformer l'intégrale (1) par le changement de variable (3), il suffit de remplacer, dans l'élément différentiel $f(x) \, dx$, x par $\varphi(t)$ et dx par la différentielle $\varphi'(t) \, dt$ de cette fonction. Autrement dit, le symbole dx qui, jusqu'à présent, devait être regardé, sous le signe $\int$, comme accolé à $f(x)$ et ne possédant par lui-même aucune signification, peut être maintenant regardé comme une différentielle. *L'élément différentiel est le produit de $f(x)$ par la différentielle dx , et l'on est en droit de lui appliquer toutes les règles de calcul des différentielles* (Chap. XI).

Ceci étant bien compris, voyons comment on peut en déduire une méthode d'intégration.

Imaginons qu'on ne sache pas intégrer (1), mais qu'on sache intégrer (5) et soit $G(t)$ la fonction obtenue. La fonction $F(x)$ cherchée est alors définie par l'identité

$$(6) \quad F[\varphi(t)] \equiv G(t),$$

ou, si l'on veut, par les deux équations

$$(7) \quad x = \varphi(t), \quad y = G(t).$$

Si l'on désire avoir l'expression explicite de $F(x)$, il faut introduire la fonction inverse $t = \psi(x)$ définie par (3) et la substituer dans $G(t)$. Ceci peut d'ailleurs donner lieu à des difficultés pratiques considérables, à cause de la résolution de l'équation (3) par rapport à t . Dans ce cas, il vaut mieux garder les équations (7), qui définissent tout aussi bien la fonction cherchée et qui peuvent être regardées comme les équations paramétriques (Tome II) de la courbe représentative. On peut aussi quelquefois avoir simplement l'équation implicite de celle-ci (Tome II) en éliminant t entre les deux équations (7), sans qu'il soit pour cela nécessaire de résoudre l'équation (3). Dans ce cas, la fonction $y = F(x)$ est une fonction implicite (n° 135) définie par une équation de la forme

$$(8) \quad f(x, y) = 0.$$

159. Il importe d'examiner comment on calculera, par cette méthode du changement de variable, une intégrale définie

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx.$$

Tout d'abord, si l'on peut obtenir simplement l'expression explicite de $F(x)$, il n'y aura qu'à appliquer la formule (n° 148)

$$(9) \quad I = F(x_1) - F(x_0).$$

Sinon, on calculera une quelconque t_0 des valeurs de t qui donnent à $\varphi(t)$ la valeur x_0 et, de même, une valeur t_1 telle que $\varphi(t_1) = x_1$. On aura alors, en vertu de l'identité (6),

$$(10) \quad I = G(t_1) - G(t_0).$$

Remarque. — On peut être tenté d'écrire tout de suite

$$(11) \quad I = \int_{t_0}^{t_1} g(t) dt.$$

Mais ceci n'est permis qu'à la condition que $g(t)$ reste finie et continue dans l'intervalle (t_0, t_1) . Or, il peut arriver que cela ne soit pas, quand bien même $f(x)$ serait finie et continue dans l'intervalle (x_0, x_1) , car il peut se faire que lorsque t varie de t_0 à t_1 , x varie de x_0 à x_1 , mais pas toujours dans le même sens et en sortant de l'intervalle (x_0, x_1) et atteignant une valeur de discontinuité de $f(x)$.

160. Au lieu de faire le changement de variable sous la forme (3), on peut aussi se donner t en fonction de x , soit

$$(12) \quad t = \psi(x).$$

Ceci est avantageux toutes les fois qu'on découvre un moyen de mettre l'élément différentiel $f(x) dx$ sous la forme $g(t) dt$, la fonction g étant plus simple que f .

Si l'on sait intégrer $\int g(t) dt$, on aura, sans aucune difficulté,

$$F(x) = G[\psi(x)].$$

Voici quelques exemples fréquents où l'on procède de cette manière (1) :

I. L'élément différentiel se présente sous la forme

$$f(x) dx = g(x^2) x dx.$$

On pose alors $t = x^2$.

II. $f(x) dx = g(\sin x) \cos x dx$; $f(x) dx = g(\cos x) \sin x dx$.

On pose, suivant le cas,

$$\sin x = t, \quad \cos x = t.$$

---

(1) Avant de commencer le calcul d'une quadrature, nous conseillons au lecteur d'observer toujours attentivement son élément différentiel, afin de voir si l'on peut le simplifier comme il vient d'être expliqué.

$$\text{III. } f(x) dx = g(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

On pose

$$\tan x = t.$$

$$\text{IV. } f(x) dx = \frac{g'(x)}{g'(x)} dx.$$

On pose

$$t = g(x);$$

l'intégrale devient

$$\int \frac{dt}{t} = \log |t| = \log |g(x)|.$$

161. Intégration par parties. — Soient u et v deux fonctions de x . On a l'identité (n° 140)

$$d(uv) = u dv + v du,$$

qui équivaut à

$$uv = \int u dv + \int v du$$

ou

$$(13) \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Cette formule, très importante, est la *formule d'intégration par parties*. Elle montre que, si l'on sait calculer $\int v du$, on en déduira $\int u dv$. De là résulte donc une méthode d'intégration qu'on applique de la manière suivante. On essaie de décomposer l'élément différentiel en un produit

$$f(x) dx = f_1(x) f_2(x) dx,$$

tel qu'on sache effectuer la quadrature $v = \int f_2(x) dx$ et ensuite la quadrature $\int v f_1'(x) dx$. On pose alors $u = f_1(x)$ et l'on applique la formule (13). Il peut se faire d'ailleurs qu'on ne sache pas calculer immédiatement $\int v du$; mais si cette intégrale est plus simple que la proposée, on aura fait néanmoins un progrès. C'est ainsi qu'il arrive qu'une ou plusieurs nouvelles intégrations par parties conduisent au résultat.

Voici des exemples classiques qu'il est bon de connaître.

I. $\int e^x P(x) dx$, $P(x)$ étant un polynôme. — On pose

$$u = P(x), \quad v = e^x;$$

on est ramené à

$$\int e^x P'(x) dx,$$

c'est-à-dire à une intégrale de même forme, mais où le polynôme a un degré moindre d'une unité. En répétant la même opération, on arrivera, de proche en proche, à

$$\int \Lambda e^x dx = \Lambda e^x \quad (\Lambda = \text{const.}),$$

II. $\int \sin x P(x) dx$, $\int \cos x P(x) dx$. — On suit la même marche en posant $u = P(x)$ et $v = \cos x$ ou $\sin x$. Cet exemple se ramène d'ailleurs au précédent par l'emploi des formules d'Euler (n° 109) (1).

III. $I = \int e^x \cos x dx$, $J = \int e^x \sin x dx$. — Posons, par exemple (2),

$$u = \cos x, \quad v = e^x;$$

nous avons

$$I = \int u dv = e^x \cos x - \int v du = e^x \cos x - J.$$

De même,

$$J = e^x \sin x - I.$$

D'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$(1) \quad I = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x), \quad J = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

Autrement : Servons-nous de la formule d'Euler (n° 109); on a

$$I + iJ = \int e^x (\cos x + i \sin x) dx = \int e^{x+ix} dx.$$

(1) On est alors ramené à des expressions telles que $\int e^x P(x) dx$, c'est-à-dire finalement à $\int e^x dx = \frac{1}{1} e^x = i e^x$ (n° 155).

(2) On pourrait aussi poser $u = e^x$, $v = \sin x$.

Or (n° 153)

$$\int e^{x(1+i)} dx = \frac{1}{1+i} e^{x(1+i)} = \frac{1-i}{2} e^x (\cos x + i \sin x).$$

Donc

$$1+iJ = \frac{e^x}{2} [\cos x + \sin x + i(\sin x - \cos x)].$$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on retrouve les formules (14).

$$IV. \int f(x) \log g(x) dx, \int f(x) \operatorname{arctang} g(x) dx, \int f(x) \operatorname{arcsin} g(x) dx.$$

— Supposons qu'on sache calculer $v = \int f(x) dx$. Si l'on intègre par parties, on se ramènera au calcul des intégrales

$$\int \frac{v g'(x)}{g(x)} dx, \quad \int \frac{v g'(x)}{1+g^2(x)} dx, \quad \int \frac{v g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} dx,$$

qui seront, en général, plus avantageuses que les proposées, parce qu'on aura fait disparaître les fonctions $\log$, $\operatorname{arctang}$, arcsin .

En particulier, si $f(x)$ est une fraction rationnelle dont tous les résidus sont nuls (n° 213), v sera aussi une fraction rationnelle; de sorte que si $g(x)$ est, en même temps, une fraction rationnelle en x , ou du type (22) ou (24) (n°s 165 et 166), on saura certainement effectuer les deux premières quadratures. Quant à la troisième, elle portera sur une différentielle algébrique; mais on ne pourra l'intégrer que sous certaines conditions, à cause du radical $\sqrt{1-g^2(x)}$.

162. En outre des deux méthodes d'intégration par changement de variable et par parties, il convient de mentionner celle qui consiste à *décomposer l'élément différentiel en une somme d'éléments plus simples*, pour appliquer ensuite la formule évidente

$$\int (f_1 + f_2 + \dots + f_n) dx = \int f_1 dx + \int f_2 dx + \dots + \int f_n dx.$$

Le lecteur a certainement remarqué qu'*aucune de ces trois méthodes ne donne un moyen sûr pour effectuer toute quadrature*. Elles s'appliquent dans certains cas et ne donnent rien dans d'autres. Il faut une certaine habitude du calcul intégral pour savoir s'en servir

à propos. Il ne va plus en être de même dans les paragraphes suivants, où nous allons indiquer certains types de quadratures qui se calculent suivant des méthodes précises et jamais en défaut.

163. Intégration des fractions rationnelles. — La méthode consiste à décomposer la fraction en éléments simples (n° 214) et à intégrer terme à terme.

On se ramène, en effet, à des intégrales de la forme

$$(15) \quad \int x^m \cdot x, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m}.$$

La première est égale à $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ (n° 157). La seconde s'écrit, en posant $x-a=t$,

$$(16) \quad \int t^{-m} dt = \frac{t^{1-m}}{1-m} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}, \quad \text{si } m \neq 1,$$

$$\int \frac{dt}{t} = \log |t| = \log |x-a|, \quad \text{si } m=1.$$

Comme on le voit, on obtient des termes rationnels et des termes logarithmiques. Pour que ceux-ci n'existent pas, c'est-à-dire *pour que l'intégrale soit algébrique*, il faut et il suffit que tous les résidus soient nuls (1).

164. Si l'on veut éviter l'introduction de fonctions imaginaires (2), ce qui précède n'a de sens que si *tous les pôles sont réels*. Dans le cas où il y en a qui sont imaginaires, on applique le mode de décomposition réelle du n° 217. Outre les termes (15), on a alors à intégrer des expressions de la forme

$$(16) \quad \int \frac{(ax+b)}{(x^2+px+q)^m} dx,$$

le trinôme x^2+px+q ayant ses racines imaginaires.

(1) Nous admettons que toute expression de la forme

$$A \log |x-a| + B \log |x-b| + \dots + L \log |x-t|$$

ne peut être nulle identiquement que si les coefficients A, B, ..., L, sont tous nuls, ce qui est évident si l'on remarque qu'en supposant par exemple $A=0$ elle deviendrait infinie pour $x=a$.

(2) On peut les introduire moyennant les conventions faites au n° 155.

Commençons par la simplifier de forme. Décomposons le trinôme $x^2 + px + q$ en une somme de deux carrés :

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)^2 + \beta^2, \quad \left(\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right).$$

Puis, posons

$$x - \alpha = \beta t;$$

L'intégrale devient

$$\int \frac{(a't + b') dt}{(1 + t^2)^m} = a' \int \frac{t dt}{(1 + t^2)^m} + b' \int \frac{dt}{(1 + t^2)^m}.$$

Le premier terme du second membre se calcule en posant $t^2 = u$ (n° 160, I), ce qui donne $\frac{a'}{2} \frac{1}{(1+m)(1+u)^{m+1}}$ ou $\frac{a'}{2} \log(1+t^2)$, suivant que m est différent de 1 ou égal à 1.

Reste à calculer

$$(17) \quad I_m = \int \frac{dt}{(1 + t^2)^m}.$$

On emploie ordinairement, dans ce but, l'artifice suivant :

On peut écrire

$$(18) \quad I_m = \int \frac{(1 + t^2) - t^2}{(1 + t^2)^m} dt = I_{m-1} - \int \frac{t^2}{(1 + t^2)^m} dt.$$

Puis, en intégrant par parties et supposant $m > 1$,

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^m} &= \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2)}{(1 + t^2)^m} = \frac{1}{2} \int t d \left[\frac{1}{(1+m)(1+t^2)^{m-1}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t}{(1+m)(1+t^2)^{m-1}} \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{dt}{(1+m)(1+t^2)^{m-1}} \right] \\ &= \frac{t}{2(1+m)(1+t^2)^{m-1}} - \frac{I_{m-1}}{2(1+m)}. \end{aligned}$$

Portons dans (18)

$$I_m = I_{m-1} \left[1 - \frac{1}{2(1+m)} \right] - \frac{t}{2(1+m)(1+t^2)^{m-1}}$$

ou

$$(19) \quad (2m-2)I_m = (2m-3)I_{m-1} - \frac{t}{(1+t^2)^{m-1}}.$$

On obtient une formule de récurrence qui permettra de calculer I_m en fonction de I_1 (Note I). D'autre part,

$$I_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tang } t.$$

Donc, nous pouvons considérer comme connue l'intégrale I_m , pour toutes les valeurs entières de m .

Une autre méthode, qui est peut-être plus rapide et plus facile à retenir, et à laquelle fait songer assez naturellement l'expression $\frac{1}{1+t^2}$, consiste à poser $t = \tan \varphi$. D'où

$$(20) \quad I_m = \int (\cos^2 \varphi)^m \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \int (\cos \varphi)^{2m-2} d\varphi,$$

intégrale qui se calcule suivant la méthode du n° 169. Par exemple, pour $m = 2$, on a immédiatement

$$(21) \quad I_2 = \int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} = \frac{1}{2} \left(\text{arc tang } t + \frac{t}{1+t^2} \right).$$

165. Intégrales se ramenant aux fractions rationnelles. — On peut ramener au cas précédent un très grand nombre de types différents d'intégrales. Citons en premier lieu le suivant, qui se rencontre quelquefois,

$$(22) \quad \int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\beta}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\gamma} \right] dx,$$

où R désigne une fraction rationnelle des variables qui figurent dans le crochet, et $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, des nombres commensurables.

Réduisons toutes les fractions $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ au même dénominateur m . On a alors, par exemple, $\alpha = \frac{\alpha'}{m}$, d'où

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\alpha} = \left[\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{\alpha'}.$$

Dès lors, posons

$$(23) \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^m.$$

Nous aurons

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\alpha} = t^{\alpha'}.$$

puisque le quotient $\frac{\Delta m}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta s}$ tend vers 1 quand Δs tend vers zéro.

Supposons maintenant que l'on connaisse la densité ρ en chaque point M de AB. Cette densité sera une fonction de l'arc $s = \text{AM}$. Nous allons calculer la masse totale de AB. Décomposons AB en petits arcs partiels tels que MM'. Si ρ est la densité en M, la masse de MM' est, au second ordre près, $dm = \rho ds$. En faisant la somme de toutes les quantités analogues et cherchant la limite de cette somme lorsque les arcs partiels tendent vers zéro, on a

$$(17) \quad m = \int_0^l \rho ds,$$

en appelant l la longueur AB.

Remarque. — Il est souvent plus commode de ne pas garder s comme variable d'intégration, mais de calculer ρ et ds en fonction d'un paramètre t fixant la position de M sur AB et de la différentielle dt de ce paramètre. On intègre ensuite entre t_0 et t_1 .

Pour bien marquer cette indétermination qui réside dans le choix de la variable d'intégration, on écrit souvent la formule (17) sous la forme

$$(18) \quad m = \int_{AB} \rho ds = \int_A^B \rho ds$$

(énoncez : somme le long de AB ou somme de A à B de ρds), étant entendu que ces symboles, qu'on appelle des *intégrales curvilignes*, se calculent par le choix convenable d'un paramètre t comme il vient d'être expliqué.

179. 2° Masse d'une surface. — Une surface est dite *homogène* si deux portions de cette surface ont même masse dès qu'elles ont même aire. Le quotient de cette masse par cette aire est la *densité superficielle de la surface*.

Soient maintenant une surface S non homogène et M un de ses points. Découpons un petit morceau de S comprenant M; soient ΔA et Δm son aire et sa masse. Le quotient $\frac{\Delta m}{\Delta A}$ est la *densité superficielle moyenne* du morceau considéré. Supposons maintenant que

celui-ci *tende vers zéro dans toutes ses dimensions* ⁽¹⁾, de manière à se réduire finalement au point M. La limite ρ de $\frac{\Delta m}{\Delta \Lambda}$ est appelée *densité superficielle au point M*.

Si $\Delta \Lambda$ est pris pour infiniment petit principal, la partie principale de Δm est $dm = \rho \Delta \Lambda$.

Supposons connue la densité superficielle en chaque point M de S. C'est une fonction de deux variables indépendantes, à savoir les paramètres qui fixent la position de M sur S (I. II). Proposons-nous de calculer la masse totale de S. La méthode générale est la suivante :

Découpons la surface en petites bandes, en y traçant une suite de lignes très voisines les unes des autres (fig. 37) et à chacune des-

Fig. 37.

quelles nous faisons correspondre un certain paramètre u , de telle manière que lorsque u croît de u_0 à u_1 , la ligne (u) balaie toute la surface d'une façon continue. *Évaluons la masse de la petite bande comprise entre les lignes consécutives u et $u+du$, ou plutôt la partie principale $dm = f(u) du$ de cette masse. La masse totale cherchée est la limite de la somme de toutes les parties principales analogues lorsque les bandes tendent vers zéro, c'est-à-dire l'intégrale définie*

$$m = \int_{u_0}^{u_1} f(u) du.$$

Le calcul de m est donc ramené à une quadrature quand on sait évaluer la masse dm de chaque bande. Occupons-nous alors de cette dernière.

(1) On entend par là, d'une manière précise, qu'il doit pouvoir être enfermé dans une sphère de centre M et dont le rayon tend vers zéro. Il ne suffit pas que l'aire $\Delta \Lambda$ tende vers zéro, ce qui pourrait arriver en supposant qu'elle prenne une forme allongée, mais infiniment mince, de façon à se réduire à la limite à un petit arc passant par M. Dans ce cas, la limite ρ dépendrait du choix de ce petit arc.

Comme le choix des lignes (u) est arbitraire, il faut tâcher d'en profiter pour simplifier le plus possible le calcul de dm .

C'est ainsi qu'on peut prendre pour lignes (u) les lignes le long desquelles la densité reste constante. La densité varie alors infiniment peu dans chaque bande et il suffit, pour avoir dm , de multiplier l'aire $d\Lambda$ de cette bande par la densité φ le long de (u) . Si donc on peut calculer, d'une manière élémentaire, l'aire $d\Lambda$, on aura de suite l'élément différentiel dm .

Mais il peut arriver qu'en recherchant cette simplification, qui consiste à rendre chaque bande sensiblement homogène, on complique considérablement la forme de celles-ci et par suite le calcul de $d\Lambda$. Il vaut mieux, dans ce cas, rechercher des bandes de forme simple. On calcule alors dm par une intégrale définie, de la manière suivante :

Découpons la bande $(u, u + du)$ en petits morceaux, par des lignes transversales dépendant d'un paramètre variable v (fig. 37). Le petit morceau $(u, u + du; v, v + dv)$ a une masse dont on aura la partie principale dm' en multipliant la densité φ au point (u, v) par l'aire du petit morceau, ou par la partie principale de cette aire ⁽¹⁾. Cette partie principale dm' sera de la forme $F(u, v) du dv$. En faisant la somme de toutes les quantités analogues et passant à la limite, on aura, en remarquant que u et du restent constants tant que nous en sommes à la même bande,

$$(19) \quad dm = du \int_{v_0}^{v_1} F(u, v) dv = f(u) du.$$

Dans cette intégrale, v est la variable d'intégration, c'est-à-dire qu'on doit y regarder u comme une constante. Observons aussi qu'il peut arriver que les deux bornes v_0 et v_1 dépendent de la bande choisie, c'est-à-dire de u . Dans tous les cas, dm se présentera sous la forme $f(u) du$ et le calcul s'achèvera comme il a été expliqué plus haut.

On voit que, dans le cas plus général, la masse d'une surface s'évalue au moyen de deux quadratures ⁽²⁾.

(1) Car le petit morceau considéré est *infiniment petit dans toutes ses dimensions*.

(2) Le lecteur qui poursuivra ses études mathématiques reconnaîtra, dans les considérations que nous venons de développer, la méthode générale de calcul des intégrales doubles ou intégrales de surface.

Remarques. — Si l'on suppose $\varrho \equiv 1$ sur toute la surface, la masse est égale à l'aire. Les considérations qui précèdent permettent donc de calculer l'aire d'une surface quelconque, plane ou courbe, ce qui complète les indications données aux n^{os} 174 à 176.

180. 3^e *Masse d'un volume.* — Un volume est *homogène* si deux de ses portions ont même masse dès qu'elles ont même volume. Le quotient de cette masse par ce volume est la *densité du volume*.

Soient maintenant un volume V , non homogène, et M un de ses points. Découpons un petit morceau comprenant M , de masse Δm et de volume ΔV . Le quotient $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ est la *densité moyenne* du petit morceau. Faisons tendre celui-ci vers zéro dans toutes ses dimensions ⁽¹⁾. La limite ϱ de $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ est la *densité au point* M ⁽²⁾. Si ΔV est pris pour infiniment petit principal, la partie principale de Δm est $dm \equiv \varrho \Delta V$.

Supposons connue la densité en chaque point M de V . C'est une fonction de trois variables, par exemple des coordonnées de M (1, II). Proposons-nous de calculer la masse totale.

La méthode générale est en tous points analogue à celle qui nous a servi pour la masse d'une surface. On a seulement, comme on va le voir, trois quadratures au lieu de deux.

Découpons le volume en petites tranches (fig. 38), par des sur-

Fig. 38.

faces très voisines, dépendant d'un paramètre u tel que, lorsque u croît de u_0 à u_1 , la surface (u) balaie tout le volume. Évaluons la

⁽¹⁾ Il y a lieu de faire ici une remarque analogue à celle de la page 206 (note 1), que le lecteur formulera aisément.

⁽²⁾ On dit quelque fois la *densité spatiale*.

masse de la petite tranche $(u, u + du)$, ou plutôt sa partie principale $dm = f(u) du$. Intégrant entre u_0 et u_1 , nous avons la masse cherchée

$$(20) \quad m = \int_{u_0}^{u_1} f(u) du.$$

Tout revient donc au calcul de dm . On le simplifie le plus possible par un *choix convenable des surfaces* (u) . Par exemple, on prend *les surfaces* $\varphi = \text{const.}$, à condition de ne pas trop compliquer la *forme des petites tranches*. Sinon, on procède, comme au n° 179, à des décompositions nouvelles ⁽¹⁾. On découpe la petite tranche en petites bandes par des surfaces (v) qui la balaient toute entière. On calcule la masse dm' de la petite bande $(u, u + du; v, v + dv)$ et l'on intègre par rapport à v , c'est-à-dire en laissant u et du constants. Quant au calcul de dm' , il se fait, soit directement, soit *en découpant la petite bande en petits morceaux* par des surfaces (w) . La masse dm'' d'un petit morceau s'obtient en multipliant son volume par la densité au point (u, v, w) ⁽²⁾. On l'intègre par rapport à w , ce qui donne dm' ; d'où l'on déduit dm , puis m , comme il vient d'être expliqué ⁽³⁾.

Remarque. — En supposant $\varphi = 1$, on a un *moÿen pour calculer n'importe quel volume*, ce qui complète les indications données au n° 177.

181. Centres de gravité. — *Étant donnés n points* $M_1, M_2, \dots, M_n$, de masses $m_1, m_2, \dots, m_n$, leur centre de gravité G est donné par les formules

$$(21) \quad X = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad Y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad Z = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

où x_i, y_i, z_i désignent les coordonnées de M_i et X, Y, Z les coordonnées de G , relativement à trois axes quelconques $Oxyz$.

(1) On est souvent tenté d'assimiler la petite tranche à une surface et d'appliquer, pour son calcul, ce qui a été dit au n° 179. Mais il faut bien remarquer qu'on ne connaît pas la densité superficielle en chaque point, qu'il ne faut pas confondre, erreur grossière, avec la densité spatiale φ . On peut faire une remarque analogue pour l'assimilation d'une bande à une ligne.

(2) Car le petit morceau est *infinitement petit dans toutes ses dimensions*.

(3) C'est la méthode générale de calcul des *intégrales triples*.

Soit maintenant un milieu continu : ligne, surface ou volume. Il s'agit de définir et de calculer son centre de gravité, par l'extension des formules précédentes.

Dans ce but, nous le décomposons en n morceaux *petits dans toutes leurs dimensions*. Soient p_i l'un d'eux, m_i sa masse et M_i un quelconque de ses points. *Imaginons toute la masse m_i concentrée au point M_i et prenons, au moyen des formules (21), le centre de gravité G' des n points ainsi obtenus. Par définition, le centre de gravité G du milieu continu est la limite de G' lorsque le nombre des morceaux augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro dans toutes ses dimensions.*

Nous aurons les coordonnées X, Y, Z de G en cherchant les valeurs limites des coordonnées X', Y', Z' de G' . Tout d'abord, *le dénominateur commun Σm_i n'est autre que la masse totale du milieu*; on le calculera d'après les numéros précédents. Cherchons maintenant la *limite de $\Sigma m_i x_i$* . Soit ρ_i la densité (linéaire, superficielle ou spatiale) au point M_i . Désignons symboliquement par τ_i la longueur, la surface ou le volume du morceau p_i , suivant qu'il s'agit d'un milieu à une, deux ou trois dimensions. La partie principale de m_i est $\rho_i \tau_i$. Donc, $\Sigma m_i x_i$ a même limite que $\Sigma \rho_i x_i \tau_i = \Sigma \rho'_i \tau_i$, en posant $\rho'_i = \rho_i x_i$. Or, si l'on imagine un autre milieu superposé au premier, tel qu'en chaque point $M(x, y, z)$ la nouvelle densité ρ' se déduise de l'ancienne ρ par la formule $\rho' = \rho x$, on voit que la limite de $\Sigma m_i x_i$ n'est autre que la masse de ce nouveau milieu (*). On arrive ainsi à la règle pratique suivante :

RÈGLE PRATIQUE. — *L'abscisse du centre de gravité d'un milieu continu est une fraction dont le dénominateur est la masse totale du milieu et le numérateur la masse qu'il aurait si la densité en chaque point était multipliée par l'abscisse de ce point.*

On a deux règles analogues pour l'ordonnée et la cote.

Comme on le voit, la recherche des centres de gravité est ramenée aux considérations développées dans les numéros précédents. Néanmoins, elle peut être simplifiée quelquefois par des considérations

---

(*) On est obligé d'admettre que, pour ce milieu fictif, la densité peut devenir négative, puisqu'il en est ainsi de x . Mais, cela n'a manifestement aucune espèce d'importance au point de vue du calcul, qui se fait toujours de la même manière, quel que soit le signe de la densité.

géométriques élémentaires. Par exemple, *si le milieu possède un élément de symétrie* (plan, axe ou centre) et cela au double point de vue de la forme et de la densité ⁽¹⁾, on sait que *le centre de gravité se trouve nécessairement sur cet élément*. De toute manière, il faut toujours tâcher de *choisir les axes de coordonnées* (rectangulaires ou obliques) *de façon à avoir les calculs les plus simples possibles*.

On peut aussi profiter quelquefois de la remarque suivante :

Décomposons le milieu M en n milieux partiels $M_1, M_2, \dots, M_n$. Si m_i désigne la masse de M_i , et X_i, Y_i, Z_i les coordonnées de son centre de gravité, les coordonnées du centre de gravité cherché sont

$$X = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad \dots$$

Cela résulte de manière évidente des définitions ci-dessous.

Autrement dit, *on peut remplacer chaque milieu partiel par son centre de gravité, en y concentrant toute sa masse*.

182. Moments d'inertie. — Reprenons le système des n points $M_1, M_2, \dots, M_n$ du numéro précédent. *On appelle moment d'inertie de ce système par rapport à un point, à une droite ou à un plan, la quantité $\sum m_i r_i^2$, où r_i désigne la distance de M_i au point, à la droite ou au plan.*

Soit maintenant *un milieu continu* : ligne, surface ou volume. Décomposons-le, comme tout à l'heure, en n morceaux, dans chacun desquels nous choisissons encore un point M_i pour y concentrer toute la masse du morceau. Soit I le moment d'inertie des n points ainsi obtenus. *Le moment d'inertie du milieu continu est, par définition, la limite de I , lorsque le nombre des morceaux croît indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro dans toutes ses dimensions.*

En raisonnant comme au numéro précédent, on obtient la règle

⁽¹⁾ C'est-à-dire qu'à tout point M du milieu doit correspondre un point M' symétrique et de même densité. Dans le cas d'un plan ou d'un axe de symétrie, celle-ci peut être oblique, c'est-à-dire que MM' doit avoir seulement une direction fixe ou être parallèle à un plan fixe et avoir son milieu dans le plan ou sur l'axe. La propriété rappelée dans le texte devient évidente sur les formules (21), si l'on prend l'élément de symétrie pour plan, axe ou centre de coordonnées et si l'on groupe deux à deux les points symétriques.

pratique suivante, qui ramène encore le calcul des moments d'inertie au calcul des masses :

REGLE PRATIQUE. — *Le moment d'inertie d'un milieu continu est égal à la masse qu'il aurait si la densité en chaque point M était multipliée par r^2 , carré de la distance de M à l'élément par rapport auquel on prend le moment d'inertie.*

183. Nous pourrions nous en tenir là quant au calcul des moments d'inertie. Nous allons indiquer néanmoins quelques *théorèmes généraux*, qui permettent de simplifier beaucoup ce calcul et qui ont, pour cette raison, une importance capitale. Nous allons les établir pour un système de n points et nous admettrons, comme cas limite, leur extension à un milieu continu.

Nous avons d'abord toute une catégorie de théorèmes qui établissent des *relations très simples entre les moments d'inertie d'un même système par rapport à des points, à des droites et à des plans*. On trouve instantanément tous ces théorèmes de la manière suivante. Soit un trièdre trirectangle $Oxyz$. Désignons par I_0 , I_{0x} , I_{0y} , I_{0z} , I_{y0z} , I_{x0y} les moments d'inertie du système par rapport à O , Ox , Oy , Oz , $xyOz$, zOx , xOy . Ce sont ces moments que nous allons comparer les uns aux autres. Pour cela, prenons un point M quelconque du système, de masse m et de coordonnées x , y , z . On a

$$(22) \quad I_0 = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2); \quad I_{0x} = \Sigma m(y^2 + z^2); \quad I_{y0z} = \Sigma m x^2;$$

d'où l'on déduit les formules suivantes :

$$(23) \quad I_0 = I_{y0z} + I_{z0x} + I_{x0y};$$

$$(24) \quad I_{0x} = I_{z0x} + I_{y0x};$$

$$(25) \quad I_0 = \frac{1}{2} (I_{0x} + I_{0y} + I_{0z});$$

$$(26) \quad I_0 = I_{0x} + I_{y0z}.$$

Si on les traduit en langage ordinaire, on obtient les théorèmes que nous avions en vue. Par exemple, la formule (23) donne :

THÉORÈME. — *Le moment d'inertie par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans rectangulaires quelconques passant par ce point.*

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les autres théorèmes analogues. Il est d'ailleurs inutile de les retenir par cœur, car *il suffit de penser aux formules (22) pour les retrouver.*

C'est à cause de ces théorèmes que se montre utile l'introduction des moments d'inertie par rapport à un point et par rapport à un plan : elle rend, en effet, de grands services dans le calcul des moments d'inertie par rapport à une droite, qui sont les seuls dont on fasse usage en Mécanique ⁽¹⁾.

184. Voici maintenant des théorèmes qui font intervenir le centre de gravité du système.

THÉORÈME. — *Le moment d'inertie d'un système par rapport à un plan P' est égal au moment d'inertie par rapport au plan parallèle P mené par le centre de gravité du système, plus le produit de la masse totale par le carré de la distance des deux plans.*

En effet, prenons le plan P pour plan des xy . Si h est la cote de P', on a

$$I' = \sum m(z - h)^2 = \sum m z^2 - 2 \sum m z h + \sum m h^2.$$

Or,

$$\sum m z^2 = I_{cgy} = I.$$

Puis, dans $\sum m z h$, on peut mettre h en facteur, qui est le même pour tous les points du système. Le coefficient de h est alors $\sum m z$, quantité qui est égale, d'après les formules (21), au produit de la masse M par la cote du centre de gravité. Comme celui-ci est, par hypothèse, dans le plan des xy , il n'y a pas de terme en h . Quant à la somme $\sum m h^2$, on peut y mettre h^2 en facteur, ce qui donne

$$h^2 \sum m = h^2 M.$$

Où a donc bien, finalement,

(27)

$$I' = I + M h^2.$$

G. Q. F. D.

(1) Donnons, à ce propos, la définition du *rayon de giration*. Le rayon de giration d'un système autour d'une droite Δ est une longueur R telle que, si M désigne la masse totale du système, son moment d'inertie par rapport à Δ soit MR^2 . Autrement dit, c'est la distance à laquelle on peut concentrer toute la masse du système sans changer son moment d'inertie.

On a deux théorèmes analogues en remplaçant P et P' par deux droites parallèles Δ et Δ' , dont la première passe par G ; ou bien par deux points O et O' , dont le premier est en G . Nous laissons au lecteur le soin de les énoncer et de les démontrer, soit directement en copiant la démonstration ci-dessus, soit en passant par l'intermédiaire du théorème relatif aux plans et des formules (23) et (24).

Ces derniers théorèmes sont d'une grande utilité, en ce sens qu'ils permettent, lorsqu'on connaît, par exemple, le moment d'inertie par rapport à une droite Δ_0 , de calculer de suite le moment d'inertie par rapport à n'importe quelle droite Δ parallèle à Δ_0 . Il suffit, en effet, de prendre comme intermédiaire le moment d'inertie par rapport à la droite Δ_G parallèle à Δ_0 et menée par G . Si d_0 et d sont les distances respectives de Δ_G à Δ_0 et à Δ , on a

$$(28) \quad I_{\Delta_0} = I_{\Delta_G} + M d_0^2, \quad I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + M d^2,$$

d'où

$$(29) \quad I_{\Delta} = I_{\Delta_0} + M (d^2 - d_0^2).$$

183. Conseils pratiques pour le calcul des moments d'inertie. — De tout ce qui précède, nous croyons devoir tirer les conseils pratiques suivants :

Quand on veut calculer un moment d'inertie I , on doit d'abord se rendre un compte rapide du degré de simplicité que présenterait le calcul direct par la règle donnée au n° 182. Si ce calcul paraît trop compliqué, on tâche de l'éviter par l'application des formules (23) à (26), en exprimant I au moyen d'un ou plusieurs autres moments calculables directement. Ou bien encore, on passe par l'intermédiaire du centre de gravité (n° 184). De toute façon, *on n'aborde le calcul direct qu'après avoir constaté qu'on ne peut, en se servant des théorèmes généraux, le remplacer par un calcul plus simple.*

Au reste, le lecteur comprendra encore mieux ces observations sur les exemples traités dans les exercices.

CHAPITRE XV.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

---

186. **Généralités.** — On appelle *équation différentielle d'ordre n* toute équation établissant une relation entre une variable indépendante x , une fonction inconnue y de cette variable et les n premières dérivées de cette fonction. Si on la suppose résolue par rapport à $y^{(n)}$, elle prend la forme

$$(1) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

On appelle *intégrale* de cette équation toute fonction y de x qui, substituée dans les deux membres, les rend identiques, c'est-à-dire égaux quel que soit x . On démontre que, sous certaines conditions de continuité de la fonction f par rapport aux variables $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, *il existe une intégrale et une seule telle que, pour une valeur numérique donnée x_0 de $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ prennent des valeurs numériques $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ arbitrairement choisies.* Cette intégrale constitue évidemment la solution la plus générale de l'équation; aussi, on l'appelle *intégrale générale*. Elle dépend, comme on le voit, de n constantes arbitraires ⁽¹⁾, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$.

On appelle *courbe intégrale* toute courbe représentative d'une intégrale de l'équation. Il existe, d'après ce qui précède, une *infinité de courbes intégrales, formant une famille dépendant de n paramètres. Réciproquement*, si l'on se donne une telle famille de courbes, dont l'équation générale soit, par exemple,

$$(2) \quad F(x, y; c_1, c_2, \dots, c_n) = 0,$$

où $c_1, c_2, \dots, c_n$ désignent n constantes arbitraires, on peut les regarder comme les courbes intégrales d'une équation différentielle

---

⁽¹⁾ Il ne faut pas compter x_0 , car c'est une valeur numérique qu'on peut choisir une fois pour toutes, indépendamment des valeurs adoptées pour $y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. On peut, par exemple, prendre $x_0 = 0$, ou $x_0 = 1$, $x_0 = 300$, etc. On trouvera une ébauche de démonstration, pour le cas de $n = 1$, dans *Leçons*, n° 344.

d'ordre n , appelée *équation différentielle de la famille*, qu'on forme en éliminant les constantes entre l'équation (2) et les n équations qu'on en déduit en dérivant n fois par rapport à x et regardant y comme fonction de x .

Intégrer une équation différentielle, c'est trouver son intégrale générale, ou, ce qui revient au même, la famille de ses courbes intégrales. Il existe des méthodes qui permettent d'obtenir, avec une approximation illimitée, toute intégrale définie par ses *conditions initiales* ⁽¹⁾. Citons seulement la *méthode du développement en série*, qui consiste à prendre y sous la forme d'une *série entière à coefficients indéterminés*, à substituer dans l'équation, ordonner les deux membres suivant les puissances croissantes de x et identifier les deux séries entières ainsi obtenues. En égalant les coefficients d'une puissance quelconque de x , on obtient une *relation de récurrence* entre les coefficients inconnus de y , d'où l'on peut déduire la valeur de ceux-ci en tenant compte des conditions initiales. Il faut ensuite *chercher l'intervalle de convergence* de la série ainsi calculée, et c'est seulement pour les valeurs de x intérieures à cet intervalle qu'on peut affirmer que la série représente la solution cherchée.

En dehors des méthodes d'approximation, il en existe d'autres qui permettent d'intégrer certains types d'équations en exprimant leur intégrale générale au moyen des fonctions élémentaires ou de quadratures portant sur de telles fonctions ⁽²⁾. C'est ce point de vue particulier que nous allons dorénavant envisager.

Les types classiques d'équations différentielles intégrables par quadratures sont actuellement en nombre très restreint. Il existe des équations de forme très simple qui ne peuvent s'intégrer de cette manière et définissent, par cela même, des *transcendantes nouvelles*. Leur étude constitue un Chapitre fort intéressant de l'Analyse, qui a déjà fait et fait encore l'objet des recherches d'un assez grand nombre de mathématiciens ⁽³⁾. Mais nous devons, dans cet Ouvrage, nous

(1) Nous appelons ainsi les valeurs $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ attribuées à la fonction et à ses $n-1$ premières dérivées pour $x = x_0$.

(2) On dit de ces types d'équations qu'on peut les *intégrer par quadratures*, ou les *ramener aux quadratures*.

(3) Le lecteur se souvient que nous avons déjà présenté des considérations analogues à propos des quadratures (n° 156), qui d'ailleurs peuvent être regardées comme les intégrales d'équations différentielles particulières, à savoir celles de la forme $y' = f(x, y)$.

contenter de considérations plus élémentaires et nous borner à *passer en revue les principaux types d'équations qu'on sait actuellement intégrer par quadratures.*

I. — ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

187. **Équations du premier ordre.** — L'équation la plus générale du premier ordre est de la forme

$$(3) \quad f(x, y, y') = 0$$

ou

$$(4) \quad F(x, y, dx, dy) = 0,$$

F étant homogène par rapport à dx et dy .

Bornons-nous d'abord au *cas où elle est résoluble par rapport à y'* , soit

$$(5) \quad y' = f(x, y),$$

ou encore

$$(6) \quad P dx = Q dy,$$

P et Q désignant deux fonctions de x et y .

Observons, dès maintenant, que *les formes (4) et (6) présentent l'avantage de ne pas spécifier quelle est la variable indépendante*, pour laquelle on peut prendre soit x , soit y , soit même, comme nous le verrons tout à l'heure, une autre variable. Or, c'est bien là un avantage, car il peut se faire, par exemple, que l'équation ne rentre pas dans un type connu quand on prend x pour variable indépendante, mais apparaisse, au contraire, comme intégrable quand on fait jouer ce rôle à y .

188. **Équations à variables séparées.** — Un premier type tout à fait fondamental est celui des *équations dites à variables séparées*. Elles sont de la forme

$$(7) \quad X dx + Y dy,$$

où X et Y désignent deux fonctions ne dépendant respectivement que de x et de y . Une telle équation s'intègre à vue. En effet, les

deux membres sont respectivement les différentielles des fonctions $\int X dx$ et $\int Y dy$. Si le point $M(x, y)$ décrit une courbe intégrale ⁽¹⁾, ces deux différentielles doivent être constamment égales; donc, les fonctions correspondantes doivent différer par une constante. L'équation de toute courbe intégrale peut donc s'écrire

$$(8) \quad \int X dx = \int Y dy + C,$$

C désignant une constante. Réciproquement, quelle que soit cette constante, l'équation (8) représente une courbe intégrale, car elle entraîne évidemment l'équation (7).

La famille des courbes intégrales est donc représentée par l'équation (8), où C désigne une constante arbitraire. Si l'on veut avoir y en fonction de x , il faut résoudre cette équation par rapport à y ; mais cela n'est pas toujours pratiquement possible. Il peut se faire, au contraire, qu'il soit plus aisé de résoudre par rapport à x ; ou bien d'exprimer x et y en fonction d'un même paramètre t . Suivant le cas, on procédera de telle ou telle manière; ou bien on gardera tout simplement l'équation (8), qui résout parfaitement le problème, en ce sens qu'elle donne toutes les courbes intégrales.

Si l'on veut une solution déterminée par des conditions initiales (x_0, y_0) , on écrit que l'équation (8) est vérifiée pour $x = x_0$, $y = y_0$, ce qui donne la valeur correspondante de la *constante d'intégration*.

Comment reconnaît-on la possibilité de séparer les variables dans une équation donnée? On commence par mettre celle-ci sous la forme (6). On regarde ensuite s'il est possible de diviser les deux membres par un même facteur amenant P à ne plus dépendre que de x , et Q que de y . Il en est ainsi, par exemple, chaque fois que

⁽¹⁾ Il faut bien remarquer que, dans cette hypothèse, x et y et par suite $\int X dx$ et $\int Y dy$ sont des fonctions d'un même paramètre t , qui fixe la position de M sur la courbe. Ce paramètre peut être soit x , soit y , soit une fonction quelconque de x et y . Mais, son indétermination n'influe pas sur notre raisonnement, grâce à la propriété fondamentale des différentielles (n° 439).

L'équation se présente sous la forme

$$(9) \quad X_1 Y_1 dx = X_2 Y_2 dy,$$

car celle-ci peut s'écrire

$$\frac{X_1}{X_2} dx = \frac{Y_2}{Y_1} dy.$$

Toutes les fois qu'une des variables ne figure pas explicitement dans l'équation, on peut séparer les variables. En effet, si par exemple x manque, en résolvant par rapport à dx , on a nécessairement une équation de la forme

$$(10) \quad dx = f(y) dy,$$

qui s'intègre par une quadrature

$$x = \int f(y) dy + C \quad (11).$$

189. **Changement de variables.** — Maintenant que nous savons intégrer un type d'équation, il faut tâcher d'en déduire d'autres. La méthode employée dans ce but est celle du *changement de variables*. Reprenons l'équation (6). Aux variables x et y , substituons des variables u et v définies par

$$(11) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

φ et ψ étant deux fonctions quelconques. Nous aurons instantanément l'équation qui doit lier u et v , ou *équation transformée*, en remplaçant, dans (6), x, y par $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ et dx, dy par les différentielles totales $\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$.

Si l'on sait intégrer cette équation transformée, voici comment on aura l'intégrale générale de l'équation proposée. On exprimera v en fonction de u , ou bien u en fonction de v , ou, plus généralement, u et v en fonction d'un paramètre t , en se servant de l'intégrale

(1) Toutes les courbes intégrales se déduisent visiblement de l'une d'elles par translation parallèle à Ox . Réciproquement, une telle famille de courbes a une équation différentielle ne renfermant pas x . L'intégration d'une équation différentielle on manque une variable équivaut, en somme, à la recherche d'une fonction connaissant sa dérivée, c'est-à-dire au problème résolu au Chapitre XIII.

générale de l'équation transformée. Les expressions obtenues renfermeront d'ailleurs une constante d'intégration C . En les portant dans (11), on obtiendra les équations paramétriques (1. II) des courbes intégrales de (6).

190. **Équations homogènes en x et y .** — Un type d'équation qu'on peut ramener immédiatement, de cette manière, à la séparation des variables est celui des *équations homogènes en x et y* . Résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, une telle équation se présente sous la forme

$$(12) \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Il semble naturel d'essayer de substituer à la variable y la variable $\frac{y}{x} = u$, dont dépend seulement le second membre. L'équation devient

$$u \, dx + x \, du = f(u) \, dx$$

ou

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

équation à variables séparées, qui s'intègre par une quadrature :

$$\log x = \int \frac{du}{f(u) - u} - \log C = \log \varphi(u) - \log C = \log [C \varphi(u)]$$

($C = \text{const.}$);

d'où

$$(13) \quad x = C \varphi(u), \quad y = Cu \varphi(u).$$

Telles sont les équations paramétriques des courbes intégrales. On remarque que ces dernières demeurent homothétiques à elles-mêmes par rapport à l'origine, quand C varie ⁽¹⁾.

(1) Ceci est facile à prévoir géométriquement, car les courbes cherchées sont définies par la condition que la direction de la tangente en M est donnée en fonction de la direction OM . Or, il est manifeste que, si une courbe C_0 répond à cette condition, toutes les courbes homothétiques par rapport à O y répondent également, puisque les points homologues sont sur le même rayon vecteur et ont, d'autre part, des tangentes parallèles. Cette simple remarque pouvait nous faire prévoir à coup sûr la réussite de notre changement de variable, puisqu'on pouvait en conclure que la relation entre x et u devait être de la forme $x = C \varphi(u)$, laquelle, par élimination de la constante C , nous conduit à une équation à variables séparées. Observons encore que le changement de variables que nous avons opéré équivaut à passer en coordonnées polaires (1. II).

191. **Équation linéaire** — Un autre type intégrable par quadrature est celui de l'équation *linéaire*. On appelle ainsi une équation *qui est du premier degré par rapport à l'une des variables et à sa différentielle*; soit, par exemple, par rapport à y et dy . Elle peut s'écrire, dans ce cas,

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} + ay = b,$$

où a et b sont deux fonctions de x .

Il existe différentes méthodes pour l'intégrer. Celle qui nous semble la plus pratique est la *méthode* dite *de variation de la constante*, qui s'applique d'ailleurs aussi aux équations linéaires d'ordre supérieur (n° 196). Elle comprend deux opérations :

1° *Intégrons l'équation sans second membre*, c'est-à-dire

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} + ay = 0, \quad \frac{dy}{y} = -a dx.$$

Les variables sont séparées; l'intégrale générale est

$$(16) \quad y = C e^{-\int a dx} = C \varphi(x).$$

2° *A la variable y substituons la variable C* , définie par la formule (16). C'est ce qu'on exprime en disant qu'on *fait varier la constante*. Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \varphi(x) + C \varphi'(x) = \varphi(x) \left[\frac{dC}{dx} + aC \right]$$

Portons dans (14) :

$$\varphi(x) \frac{dC}{dx} + aC \varphi(x) + aC \varphi(x) = b,$$

ou

$$\frac{dC}{dx} = \frac{b}{\varphi(x)} = b e^{\int a dx}.$$

L'équation transformée s'intègre à vue et donne

$$C = \int \frac{b}{\varphi(x)} dx + k = \psi(x) + k \quad (k = \text{const.}).$$

Portant dans (16), nous avons l'intégrale générale de (14) :

$$(17) \quad y = \varphi(x) \psi(x) + k \varphi(x) = \theta(x) + k \varphi(x).$$

Remarques. — I. Le changement de variable sur lequel repose la méthode peut, au premier abord, sembler artificiel. En réalité, on reconnaît qu'il est assez naturel si l'on remarque qu'il doit nécessairement simplifier le premier membre de (14), puisque celui-ci doit s'annuler quand C est une constante, c'est-à-dire pour $\frac{dC}{dx} = 0$; ce qui ne peut arriver que si le terme en C disparaît identiquement.

On pouvait donc prévoir, sans aucun calcul, que l'équation transformée serait de la forme $\frac{dC}{dx} = F(x)$.

II. L'intégrale générale (17) renferme la constante arbitraire k au premier degré. Le lecteur démontrera aisément la réciproque.

III. Dans la pratique, il est inutile de faire tous les calculs du changement de variable (16). On sait, une fois pour toutes, que le terme en C disparaît. On ne s'occupe donc que du terme en $\frac{dC}{dx}$ et l'on écrit de suite

$$\frac{dC}{dx} \varphi(x) = b.$$

IV. Il arrive quelquefois qu'on aperçoit de suite une intégrale particulière y_1 de l'équation (14). Dans ce cas, on a l'intégrale générale en ajoutant à y_1 l'intégrale générale de l'équation sans second membre (n° 196); il est inutile de faire varier la constante.

192. Équation de Bernoulli. — Elle est de la forme

$$(18) \quad y' + ay + by^n = 0,$$

a et b désignant deux fonctions de x . Elle se ramène de suite à l'équation linéaire, en divisant par y^n ,

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a}{y^{n-1}} + b = 0.$$

Si l'on observe que $\frac{y'}{y^n}$ est, à un facteur numérique près, la dérivée de $\frac{1}{y^{n-1}}$, on voit qu'il suffit de faire le changement de variable $\frac{1}{y^{n-1}} = z$ pour obtenir une équation linéaire en z .

193. **Équations non résolubles par rapport à $\frac{dy}{dx}$.** — Reprenons l'équation du premier ordre sous la forme générale (3) et supposons qu'on ne puisse pratiquement la résoudre par rapport à y' ⁽¹⁾. Comme on ne sait intégrer directement une telle équation, il s'agit de tourner cette difficulté. On y arrive aisément dans chacun des cas où l'équation représente une courbe unicursale (t. II) lorsqu'on y regarde comme coordonnées courantes soit x et y , soit x et y' , soit y et y' .

PREMIER CAS. — *Relation unicursale par rapport à x, y .* — Exprimons x et y en fonction d'un paramètre t . Comme l'équation renferme y' , les expressions obtenues dépendront à la fois de t et de y' . Si l'on pose $y' = u$, on aura

$$(19) \quad x = f(t, u), \quad y = g(t, u).$$

D'autre part,

$$(20) \quad dy = u dx.$$

Éliminons x et y entre (19) et (20), ce qui se fait en différentiant (19), nous avons l'équation transformée

$$(21) \quad u \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial u} du \right) = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial u} du.$$

Si l'on sait l'intégrer, on continuera comme il a été expliqué au n° 189.

DEUXIÈME CAS. — *Relation unicursale par rapport à x et y' .* — On aura

$$(22) \quad x = f(t, y'), \quad y' = g(t, y').$$

L'équation transformée en y et t s'écrit immédiatement

$$(23) \quad g(t, y') = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial y'} dy'}.$$

TROISIÈME CAS. — *Relation unicursale par rapport à y et y' .* — Se déduit du précédent par l'échange de x et de y .

II. — ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

194. **Équations du second ordre.** — Soit l'équation

$$(24) \quad y'' = f(x, y, y').$$

⁽¹⁾ Même si elle n'est que du second degré en y' , il vaut mieux souvent ne pas faire la résolution, qui introduit des radicaux et conduit à des calculs compliqués et peu élégants.

Commençons par observer que les deux variables x et y n'y jouent pas le même rôle et qu'on ne peut pas l'écrire sous forme symétrique, comme l'équation du premier ordre, par l'introduction des différentielles ⁽¹⁾. *Il est ici absolument nécessaire de spécifier quelle est la variable indépendante.* En particulier, si l'on veut faire un changement de variables, il faudra choisir la nouvelle variable indépendante avant de faire la transformation, pour laquelle on s'appuiera sur les règles de calcul des dérivées.

195. Équations se ramenant au premier ordre. — Certaines équations du second ordre peuvent, par un changement de variables, se ramener au premier. Citons seulement deux types qu'on peut caractériser en disant qu'une des variables x et y n'y figure pas explicitement.

I. y manque. — Soit l'équation

$$(25) \quad y'' = f(x, y').$$

Posons $y' = z$, l'équation devient

$$z' = f(x, z),$$

qui est du premier ordre. Ayant z en fonction de x , on aura $y = \int z dx$.

II. x manque. — Soit

$$(26) \quad y'' = f(y, y').$$

Posons encore $y' = z$; mais prenons y pour nouvelle variable indépendante. On a

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} y' = \frac{dz}{dy} z;$$

d'où

$$(27) \quad \frac{dz}{dy} z = f(y, z),$$

⁽¹⁾ On pourrait introduire des différentielles secondes. Mais ce n'est généralement d'aucun avantage, parce que le calcul de ces différentielles ne présente nullement la simplicité du calcul des différentielles premières.

équation du premier ordre. Ayant z en fonction de y , soit $z = \varphi(y)$, on aura $\frac{dy}{dx} = \varphi'(y)$; d'où $x = \int \frac{dy}{\varphi'(y)}$.

Remarque. — Si y' ne figure dans l'équation que par son carré, il y aura avantage à poser $y'^2 = u = z^2$; car le premier membre de (27) est $\frac{1}{2} \frac{du}{dy}$.

196. Équations linéaires. — Une classe fort importante d'équations du second ordre ⁽¹⁾ est celle des équations linéaires

$$(28) \quad y'' + p y' + q y = A,$$

où p , q , A sont des fonctions données de x . L'équation est dite *homogène* ou *sans second membre* lorsque A est nul. On peut ramener le cas général à ce cas particulier, grâce au théorème suivant :

THÉORÈME. — *On a l'intégrale générale de l'équation complète en ajoutant à une intégrale particulière l'intégrale générale de l'équation sans second membre.*

En effet, soit y_1 une intégrale particulière de (28). Faisons le changement de variable $y = y_1 + z$. L'équation devient, en tenant compte de ce que y_1 vérifie (28),

$$(29) \quad z'' + p z' + q z = 0;$$

d'où résulte manifestement la propriété annoncée.

Ajoutons qu'il existe une *méthode*, dite *de variation des constantes*, qui permet d'obtenir par quadratures l'intégrale particulière y_1 , lorsque l'on connaît l'intégrale générale de l'équation sans second membre; mais ce n'est pas ici le lieu de l'exposer.

Remarque. — Si $A = A_1 + A_2 + \dots + A_p$, et si l'on connaît une intégrale particulière y_i pour chacune des équations obtenues en réduisant A à A_i , on a évidemment une intégrale particulière de l'équation complète en ajoutant les intégrales y_i .

On peut, d'après ce qui précède, se borner à étudier l'équation

⁽¹⁾ La théorie des équations linéaires se fait aussi pour des équations d'ordre quelconque. Nous l'avons faite au n° 191 pour le premier ordre.

sans second membre

$$(30) \quad y'' + py' + qy = 0.$$

Nous nous contenterons, dans le cas où p et q sont quelconques, de faire remarquer que, si y_1 est une solution, $C_1 y_1$ en est une autre, quelle que soit la constante C . De même, si y_1 et y_2 sont deux solutions, $y_1 + y_2$ en est une autre; par suite aussi la fonction

$$(31) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

quelles que soient les constantes C_1 et C_2 . Comme nous avons deux constantes arbitraires, on peut prévoir que la formule (31) donne l'intégrale générale.

Effectivement, cela résulte du théorème fondamental admis au début du Chapitre, car on peut déterminer les constantes C_1 et C_2 de manière à faire prendre à y et y' des valeurs arbitrairement choisies, pour une valeur donnée de x , à condition toutefois que le déterminant $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ ne soit pas identiquement nul, c'est-à-dire que le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ ne soit pas constant.

197. Équation linéaire du second ordre à coefficients constants. — Nous allons étudier en détail le cas particulier très important où les coefficients p et q sont constants. Considérons, en premier lieu, l'équation sans second membre.

On peut remarquer tout d'abord qu'elle ne renferme pas explicitement x et peut être par suite abaissée au premier ordre (n° 193, II). Nous laisserons au lecteur le soin de voir ce que donne cette méthode, mais simplement à titre d'exercice, car les calculs sont longs et peu élégants ⁽¹⁾. Il est beaucoup plus rapide de procéder de la manière suivante :

Cherchons des solutions de la forme $y = e^{rx}$, r étant une constante. On voit de suite qu'il doit en exister, car en substituant dans (30), e^{rx} se met en facteur. Effectivement, on trouve que e^{rx} vérifie (30) sous la seule condition

$$(32) \quad r^2 + pr + q = 0.$$

(1) L'équation abaissée au premier ordre est homogène et s'intègre par la méthode du n° 190. Les calculs peuvent être, sans difficulté, poussés jusqu'au bout.

Cette équation du second degré en r est appelée l'équation caractéristique.

Soient r_1 et r_2 ses deux racines. Les fonctions $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$ sont deux intégrales particulières, donc aussi

$$(33) \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (C_1, C_2 = \text{const.}),$$

qui est même l'intégrale générale, si $r_1 \neq r_2$ (n° 196).

Si l'on ne veut pas s'appuyer sur le théorème fondamental admis au n° 186, on peut employer l'artifice suivant, qui nous conduira directement à l'intégrale générale, même dans le cas où $r_1 = r_2$. *Faisons le changement de variable.*

$$(34) \quad y = e^{r_1 x} z.$$

Nous sommes certains à l'avance que l'équation transformée admettra la solution $z = 1$ et, par suite, ne renfermera pas explicitement z (elle doit être visiblement linéaire). Donc, elle s'abaissera au premier ordre, n° 195, I). Effectivement, le calcul, qui ne présente aucune difficulté, donne le résultat suivant :

$$e^{r_1 x} [(z'' + 2r_1 z' + r_1^2 z) + p(z' + r_1 z) + qz] = 0,$$

ou, en divisant par $e^{r_1 x}$ et tenant compte de (32),

$$(35) \quad z'' + z'(2r_1 + p) = 0.$$

PREMIER CAS. — *L'équation caractéristique a ses racines distinctes.* — Alors $2r_1 + p$ n'est pas nul, car $2r + p$ est la dérivée du premier membre de (32) et ne peut s'annuler pour $r = r_1$ que si r_1 est racine double (n° 226).

L'équation (35) s'écrit, dans ce cas,

$$\frac{dz'}{z'} = -(2r_1 + p) dx,$$

d'où

$$\log z' = \log C - (2r_1 + p)x,$$

$$z' = C e^{-(2r_1 + p)x},$$

$$z = C \int e^{-(2r_1 + p)x} dx = C_1 + C_2 e^{-2r_1 + p)x},$$

en remplaçant la constante C par $C_2 = \frac{-C}{2r_1 + p}$ et désignant par C_1 une nouvelle constante arbitraire. Portant dans (34), nous retrouvons

la formule (33) pour l'intégrale générale de l'équation (30), car le second terme de z devient $C_2 e^{-(r_1+p)x} = C_2 e^{rx}$, en vertu de la relation bien connue (n° 220) : $r_1 + r_2 = -p$.

DEUXIÈME CAS. — *L'équation caractéristique à une racine double.* — On a $2r_1 + p = 0$; l'équation (35) se réduit à $z'' = 0$ et donne $z = C_1 x + C_2$; d'où

$$(36) \quad y = e^{r_1 x} (C_1 x + C_2).$$

Telle est, dans ce cas, l'intégrale générale.

Cas des racines imaginaires. — Si l'on suppose p et q réels, ces deux racines sont imaginaires conjuguées (n° 249), soit

$$r_1 = \alpha + \beta i, \quad r_2 = \alpha - \beta i \quad (\alpha, \beta \text{ réels}).$$

Portons dans (33)

$$y = C_1 e^{\alpha x + i\beta x} + C_2 e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}),$$

ou, en se servant de la formule d'Euler (n° 109) et changeant les constantes C_1 et C_2 ,

$$(37) \quad y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (A, B = \text{const.}),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(38) \quad y = R e^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi) \quad (R, \varphi = \text{const.}).$$

Finalement, nous avons, sous forme entièrement réelle et dans tous les cas possibles, l'intégrale générale de l'équation (30).

198. Équations avec second membre. — Nous allons maintenant examiner l'équation complète (28), en supposant toujours p et q constants. Tout revient (n° 196) à en chercher une intégrale particulière. Ceci est très facile pour certaines formes particulières de Λ , que nous allons passer en revue ⁽¹⁾.

1. Λ est un polynôme. — On cherche une intégrale particulière qui soit aussi un polynôme. Si m est le degré de Λ , on prend pour y

---

(1) Dans le cas général, on peut toujours se ramener aux quadratures, comme on le voit en faisant le changement de variable (31), qui conduit à une équation linéaire du premier ordre.

un polynôme de degré m à coefficients indéterminés; on le substitue dans (28) et l'on identifie les deux membres, qui sont deux polynômes de degré m . Les $m+1$ équations d'identification déterminent les $m+1$ coefficients de y . Toutefois, il faut augmenter le degré de y d'une unité, si $q=0$, et de deux unités, si $p=q=0$. Dans ce dernier cas, il est d'ailleurs plus simple d'intégrer deux fois de suite le polynôme du second membre.

II. $A = e^{ax} P(x)$; $a = \text{const.}$, $P = \text{polynôme en } x$. — On cherche une intégrale de même forme, soit $y = e^{ax} z$, z étant un polynôme.

L'équation transformée en z est, d'après un calcul déjà fait (n° 197),

$$(39) \quad e^{ax} [z'' + z'(2a+p) + z(a^2+pa+q)] = e^{ax} P(x),$$

ou

$$(40) \quad z'' + z'(2a+p) + z(a^2+pa+q) = P(x),$$

équation du type précédent, qui montre qu'on doit prendre pour z un polynôme de degré m , $m+1$ ou $m+2$, suivant que a n'est pas racine, est racine simple ou est racine double de l'équation caractéristique.

Pratiquement, on peut, pour obtenir l'intégrale cherchée, procéder de deux manières :

PREMIÈRE MÉTHODE. — On substitue directement l'expression $y = e^{ax} z$ dans l'équation proposée, en prenant pour z un polynôme à coefficients indéterminés et de degré convenable.

DEUXIÈME MÉTHODE. — On commence par former l'équation transformée en z , ce qui peut se faire instantanément si l'on remarque, d'une part, que le coefficient de z'' est le même que celui de y'' et, d'autre part, que les racines de la nouvelle équation caractéristique doivent être, *a priori*, $r_1 - a$ et $r_2 - a$, de sorte que le coefficient de z' est nécessairement $-(r_1 - a + r_2 - a)$, et celui de z : $(r_1 - a)(r_2 - a)$ (1).

(1) On pourrait aussi, bien entendu, retenir par cœur la formule (40). Mais, le procédé ci-dessus est au moins aussi rapide, du moins quand on a déjà intégré l'équation sans second membre, comme cela arrive presque toujours. En outre, il fait appel au raisonnement plutôt qu'à la mémoire, et, comme tel, s'oublie moins aisément.

Ayant l'équation en z , on y substitue un polynome, sauf si $r_1 = r_2 = a$, auquel cas on intègre directement deux fois de suite (cf. I).

Cette seconde méthode donne des calculs plus simples que la première, car il est plus rapide de former les dérivées première et seconde d'un polynome que d'une expression de la forme $e^{ax}z$.

III. $A = P \cos zx + Q \sin zx$; P et Q désignant des polynomes. — Ce cas se ramène au précédent, car, en vertu des formules d'Euler (n° 109), A est de la forme $e^{izx}P_1 + e^{-izx}Q_1$. Il doit donc exister une intégrale particulière de la forme

$$(41) \quad e^{izx}P_2 + e^{-izx}Q_2,$$

ou encore

$$(42) \quad P_3 \cos zx + Q_3 \sin zx,$$

P_2, Q_2, P_3, Q_3 désignant des polynomes de degrés m ou $m+1$, suivant que $\pm iz$ ne sont pas ou sont les racines de l'équation caractéristique ⁽¹⁾. (On appelle m le plus fort degré de P et Q .)

Pratiquement, on peut, comme plus haut (II), soit substituer directement l'expression (42) avec des coefficients indéterminés, ce qu'on devra toujours faire si l'on veut éviter d'introduire des imaginaires; soit chercher séparément les polynomes P_2 et Q_2 , en faisant successivement les transformations

$$y = e^{izx}z, \quad y = e^{-izx}z,$$

IV. $A = e^{\alpha x}(P \cos \beta x + Q \sin \beta x)$. — Ce cas se ramène encore à II, car A est de la forme $e^{(\alpha+i\beta)x}P_1 + e^{(\alpha-i\beta)x}Q_1$. Il existe une intégrale de la forme

$$(43) \quad e^{(\alpha+i\beta)x}P_2 + e^{(\alpha-i\beta)x}Q_2,$$

ou

$$(44) \quad e^{\alpha x}(P_3 \cos \beta x + Q_3 \sin \beta x),$$

⁽¹⁾ On suppose p et q réels. Remarquons que si $p \neq 0$, $\pm iz$ ne peuvent être racines.

les degrés de P_2, Q_2, P_3, Q_3 étant m ou $m + 1$, suivant que $\alpha \equiv i, 3$ ne sont pas ou sont les racines de l'équation caractéristique.

Pratiquement, on peut :

1^o *Substituer directement* (44).

2^o *Faire le changement de variable* $y = e^{\alpha x} z$ (cf. II), et substituer ensuite $z = P_3 \cos \alpha x + Q_3 \sin \alpha x$.

3^o *Chercher séparément* P_2 et Q_2 , comme dans (III).

Les deux premiers procédés évitent les imaginaires; le second est d'ailleurs plus rapide que le premier.

CHAPITRE XVI.

POLYNOMES.

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

199. Nous avons déjà dit quelques mots (n° 75) des *polynomes à coefficients et à variables réels*. Nous allons, dans ce Chapitre, nous placer à un point de vue plus général et considérer des *polynomes à coefficients et à variables complexes*, c'est-à-dire de la forme

$$(1) \quad f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \dots + A_p z^{m-p} + \dots + A_m,$$

les coefficients A_p étant des nombres complexes quelconques et la variable z étant une variable complexe $z = x + yi$.

Si l'on développe les calculs indiqués par le second membre, ce dernier se met évidemment sous la forme

$$(2) \quad f(z) = f(x + yi) = P(x, y) + i Q(x, y),$$

P et Q désignant deux polynomes à coefficients réels des variables réelles x et y ⁽¹⁾.

On appelle *valeur numérique* de $f(z)$ le nombre complexe $A + Bi$ obtenu en y remplaçant x et y par des nombres réels donnés α et β . On a évidemment $A = P(\alpha, \beta)$, $B = Q(\alpha, \beta)$. Si A et B sont tous

---

(1) Ces polynomes ne sont pas quelconques. Ils sont liés l'un à l'autre par les relations

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x},$$

comme on le voit en calculant $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

On en tire

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

deux nuls, la valeur numérique est nulle; on dit que $z + \beta i$ est un *zéro* ou une *racine du polynome*, et l'on écrit

$$(3) \quad f(z + \beta i) = 0.$$

Nous reviendrons plus tard sur ce cas particulier (Chap. XVIII). Contentons-nous ici d'énoncer le *théorème fondamental* suivant, sur lequel repose toute la théorie des équations algébriques, et qui est connu sous le nom de *théorème de d'Alembert* :

THÉOREME DE D'ALEMBERT. — *Tout polynome qui ne se réduit pas à une constante possède au moins une racine.*

Il existe différentes démonstrations, dites *élémentaires*, de ce théorème. Mais, pour être entièrement rigoureuses, elles doivent être très longues ⁽¹⁾. Comme, en second lieu, il existe des démonstrations très simples, mais basées sur des théories qui ne rentrent pas dans le cadre de cet Ouvrage, nous prions le lecteur d'admettre le théorème.

200. Nous allons avoir à considérer, dans la suite, les modules (n° 28) de $f(z)$, de ses coefficients et de la variable. Nous poserons, pour simplifier l'écriture et le langage,

$$|A_p| = a_p, \quad |z| = \rho.$$

Le module du terme $A_p z^p$ est alors $a_p \rho^p$ (n° 33) et l'on a (n° 31)

$$(4) \quad |f(z)| \leq a_0 \rho^m + a_1 \rho^{m-1} + \dots + a_m.$$

THÉOREME I. — *Étant donné un nombre positif ε aussi petit qu'on veut, on peut déterminer η tel que $\rho < \eta$ entraîne*

$$(5) \quad |f(z) - A_m| < \varepsilon.$$

En effet, on a

$$(6) \quad |f(z) - A_m| \leq a_0 \rho^m + a_1 \rho^{m-1} + \dots + a_{m-1} \rho.$$

Or, le second membre est un polynome de la variable réelle ρ et à coefficients réels. C'est donc une fonction continue (n° 73) et, comme il s'annule pour $\rho = 0$, il reste $< \varepsilon$ dès que ρ reste inférieur à un

---

(1) Cf. *Leçons*, t. I, p. 275-276.

certain nombre τ_1 (n° 58); moyennant quoi l'inégalité (5) est, *a fortiori*, vérifiée.

COROLLAIRE. — *Un polynome est une fonction continue de sa variable.*

Cette propriété, déjà démontrée pour les polynomes réels (n° 75), signifie, dans le cas actuel, *qu'étant donné ε on peut déterminer τ_1 tel que $|h| < \tau_1$ entraîne*

$$(7) \quad |f(z_0 + h) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Or, cela résulte du théorème précédent, appliqué au polynome en h : $f(z_0 + h) - f(z_0)$, qui n'a pas de terme constant.

THÉORÈME II. — *Un polynome croît indéfiniment avec sa variable.*

C'est-à-dire que si l'on se donne un nombre positif P, aussi grand qu'on veut, on peut toujours trouver M tel que $z > M$ entraîne

$$(8) \quad |f(z)| > P.$$

En effet, on peut écrire

$$f(z) = z^m \left[A_0 + A_1 \frac{1}{z} + \dots + A_m \left(\frac{1}{z} \right)^m \right] = z^m \varphi \left(\frac{1}{z} \right).$$

En vertu du théorème I, on peut trouver τ_1 tel que $\left| \frac{1}{z} \right| < \tau_1$, ou $z > \frac{1}{\tau_1}$, entraîne, par exemple,

$$\left| \varphi \left(\frac{1}{z} \right) - A_0 \right| < \frac{a_0}{2}.$$

Or, on a (n° 31)

$$\left| \varphi \left(\frac{1}{z} \right) - A_0 \right| = |A_0| - \left| \varphi \left(\frac{1}{z} \right) \right|;$$

donc, *a fortiori*, si $z > \frac{1}{\tau_1}$,

$$a_0 - \left| \varphi \left(\frac{1}{z} \right) \right| < \frac{a_0}{2}, \quad \left| \varphi \left(\frac{1}{z} \right) \right| > \frac{a_0}{2};$$

$$|f(z)| = z^m \left| \varphi \left(\frac{1}{z} \right) \right| > \frac{a_0}{2} z^m.$$

L'inégalité (8) sera donc vérifiée si l'on a, outre $\varphi > \frac{1}{r_1}$,

$$\frac{\alpha_0}{\varphi} \varphi^m > P$$

ou

$$\varphi > \sqrt[m]{\frac{P}{\alpha_0}}.$$

Il suffit donc de prendre pour M le plus grand des deux nombres $\frac{1}{r_1}$ et $\sqrt[m]{\frac{P}{\alpha_0}}$.

COROLLAIRE. — *Si un polynome a un module borné supérieurement, il se réduit à son terme constant.*

Car, s'il renfermait z , son module pourrait dépasser n'importe quelle valeur.

En particulier, *s'il est nul quel que soit z , ou bien tend vers zéro pour z infini, le terme constant est lui-même nul; le polynome n'existe pas.*

On dit que deux polynomes $f(z)$ et $g(z)$ sont identiques quand ils prennent la même valeur numérique quel que soit z . Leur différence, qui est aussi un polynome, étant identiquement nulle, on voit que les deux polynomes sont nécessairement composés des mêmes termes affectés des mêmes coefficients. Autrement dit, les deux polynomes sont identiques au point de vue formel; ils ne font qu'un seul et même polynome. On écrit alors

$$f(z) \equiv g(z).$$

200 bis. Polynomes à plusieurs variables. — Au n° 136, nous avons défini les polynomes à plusieurs variables, en nous limitant au point de vue réel. Mais, on peut aussi imaginer que les coefficients et les variables indépendantes soient des nombres et des variables complexes. On peut étendre à ces polynomes les théorèmes du numéro précédent. Nous démontrerons seulement le suivant :

THÉORÈME. — *Pour qu'un polynome à plusieurs variables soit nul quelles que soient les valeurs numériques attribuées à ces variables, il faut et suffit que tous ses coefficients soient nuls.*

En effet, soit d'abord un polynome à deux variables x et y . Admet-

tons qu'il possède le terme $\dot{A}x^py^q$. Comme il est nul quel que soit x (pour toute valeur donnée à y), les coefficients des diverses puissances de x sont nuls séparément (n° 200). En particulier, le coefficient de x^p doit être nul, et cela quelle que soit la valeur attribuée à y . Or, ce coefficient est un polynôme en y ; donc, tous ses termes doivent être nuls à leur tour. Mais, Ay^q est un de ces termes, il faut donc que A soit nul.

En répétant le même raisonnement, on étendrait la démonstration de proche en proche à un polynôme à 3, 4, 5, ... variables.

COROLLAIRE. — *Pour que deux polynômes à plusieurs variables aient la même valeur quelles que soient les variables, il faut et il suffit qu'ils soient composés des mêmes termes avec les mêmes coefficients.*

II. — DIVISION DES POLYNOMES.

Nous supposons connues, de la part du lecteur, les règles de l'addition et de la multiplication des polynômes réels, règles qui s'appliquent aussi aux polynômes imaginaires, parce que les propriétés du calcul des nombres complexes sont les mêmes que celles du calcul des nombres réels (n° 30).

201. Division suivant les puissances décroissantes. — Soient deux polynômes A et B de degrés respectifs m et p ($m \geq p$). On se propose de trouver deux polynômes Q et R , le second étant de degré plus petit que p , tels qu'on ait identiquement

$$(9) \quad A \equiv B \cdot Q + R;$$

A , B , Q , R seront appelés respectivement *dividende*, *diviseur*, *quotient* et *reste*.

Ordonnons A et B suivant les puissances décroissantes de z et imaginons Q ordonné de la même manière. Le terme de plus haut degré de $BQ + R$ est évidemment obtenu en multipliant les premiers termes de B et de Q , puisque R doit être d'un degré inférieur à celui de B et, *a fortiori*, de BQ . Comme il doit être égal au premier terme de A , on voit qu'on a le premier terme du quotient en divisant le

Comme, d'autre part, l'équation (23) permet de tirer x en fonction rationnelle de t et par suite aussi dx , on voit que, par ce changement de variable, l'intégrale (22) se transforme bien en une intégrale de fraction rationnelle.

166. Voici maintenant un autre *type extrêmement général et d'une importance capitale*. Il est représenté par l'intégrale

$$(24) \quad z = \int R(x, y) dx,$$

où R désigne une fraction rationnelle des variables x et y , celles-ci étant liées par une équation algébrique

$$(25) \quad f(x, y) = 0,$$

représentant, en coordonnées cartésiennes, une courbe unicursale (t. II).

Cette équation définit y et par suite $R(x, y)$ comme fonction implicite de x . Mais, d'après la définition même des courbes unicursales, on peut exprimer x et y en fonctions rationnelles d'un même paramètre t , de telle manière que l'équation (25) soit satisfaite identiquement. En portant dans z , on se ramène visiblement à une intégrale de fraction rationnelle en t .

167. **Intégrales portant sur un radical du second degré.** — Un type qui rentre dans le précédent est

$$(26) \quad \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Si l'on pose en effet $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, la relation entre x et y représente une conique, qui est une courbe unicursale (t. II). Cette simple remarque conduit aux procédés d'intégration suivants :

PREMIER CAS. — *Le radical a ses racines réelles.* — Soient α et β ces racines, de sorte que

$$y = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}.$$

On pose $x - \alpha = t^2(x - \beta)$ ou $-t^2(x - \beta)$, suivant que a est

positif ou négatif ⁽¹⁾. On en tire x en fonction rationnelle de t , ainsi que y , car $y = t(x - \beta)\sqrt{a}$ ou $t(x - \beta)\sqrt{-a}$, suivant le cas. Portant dans (26), on obtient une intégrale de différentielle rationnelle.

DEUXIÈME CAS. — *Le radical a ses racines imaginaires* ⁽²⁾. — Le coefficient a est nécessairement positif, pour la réalité de y . On peut alors poser $y = x\sqrt{a} + t$ ⁽³⁾. En élevant au carré, on obtient une équation du premier degré en x ; de sorte qu'on peut calculer x et y en fonctions rationnelles de t .

168. *Réduction de ces intégrales.* — Nous allons indiquer maintenant un autre moyen pour calculer les intégrales du type (26), qui est souvent plus rapide que les précédents, surtout dans le deuxième cas. Il consiste à réduire, par des calculs purement algébriques ⁽⁴⁾, l'intégrale proposée à l'une des formes canoniques

$$(27) \quad I_m = \int \frac{t^m dt}{\sqrt{t^2 + h}}, \quad J_m = \int \frac{t^m dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Il est évident que la fonction R se présentera toujours sous la forme

$$R = \frac{P + Qr}{P_1 + Q_1r},$$

(1) Ceci revient à couper la conique par une droite variable pivotant autour du point $(\beta, 0)$, qui est sur la conique; conformément à la méthode générale pour exprimer les coordonnées d'un point quelconque d'une conique en fonctions rationnelles d'un paramètre. On peut aussi faire rentrer l'intégrale dans le type (22), en écrivant $y = \sqrt{a}(x - \beta)\sqrt{\frac{x - \alpha}{x - \beta}}$, ou bien $y = \sqrt{-a}(x - \beta)\sqrt{\frac{x - \alpha}{\beta - x}}$, suivant le signe de a .

(2) Il est inutile de distinguer ce deuxième cas, si l'on ne craint pas d'introduire des imaginaires dans le calcul.

(3) Ceci revient à couper la conique, qui est une hyperbole, par une parallèle à la direction asymptotique $y = x\sqrt{a}$.

(4) Cette méthode de réduction a l'avantage de s'étendre aux cas où le radical porte sur un polynôme de degré $m > 2$. Les intégrales correspondantes ne peuvent pas en général se calculer par les fonctions élémentaires. Lorsque $m = 3$ ou 4 , on les appelle *intégrales elliptiques*. Leur étude constitue une branche importante de l'Analyse et a donné naissance à la théorie des fonctions elliptiques. Elles se ramènent, de façon évidente, aux intégrales du texte toutes les fois que le polynôme du radical a une racine multiple; auquel cas on dit que l'intégrale *dégénère*. Lorsque $m \geq 4$, on a les *intégrales hyperelliptiques*.

P, Q, P_1, Q_1 désignant des polynômes en x : on peut, en effet, remplacer y^2 par $ax^2 + bx + c$, tant qu'il subsiste dans R des puissances de y supérieures à la première.

On peut écrire ensuite

$$R = \frac{(P + Qy)(P_1 - Q_1y)}{P_1^2 - Q_1^2(ax^2 + bx + c)} = R_1 + R_2y = R_1 + \frac{R_2y^2}{y} = R_1 + \frac{R_3}{y},$$

où R_1, R_2, R_3 désignent des fractions rationnelles en x . La seule difficulté consiste maintenant dans l'intégration de $\int \frac{R_3 dx}{y}$.

Décomposons R_3 en éléments simples; il est manifeste que nous nous ramènerons aux deux types simples :

$$(28) \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \int \frac{dx}{(x - \alpha)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Le second revient au premier par le changement de variable $x - \alpha = \frac{1}{t}$, qui conduit en effet à l'intégrale (1)

$$\int \frac{t^{m-1} dt}{\sqrt{a(\alpha t - 1)^2 + b(\alpha t - 1) - ct^2}}.$$

Reste donc à calculer des intégrales de la forme

$$(29) \quad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Décomposons le trinôme en carrés. Suivant que a est > 0 ou < 0 , nous pouvons, par un changement de variable de la forme $x = \alpha t + \beta$ (n° 164), le réduire à $t^2 + h$ ou $1 - t^2$ (en négligeant un facteur constant). Moyennant quoi, l'intégrale (29) se ramène à une somme d'intégrales de la forme (27).

Il ne nous reste plus qu'à voir comment se calculeront ces dernières (2).

D'abord, si m est impair, on pose $t^2 + h = u^2$ ou $1 - t^2 = u^2$, et l'on est ramené à intégrer un polynôme.

Si m est pair, on emploie ordinairement l'artifice suivant (3). Soit

(1) Il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que t est > 0 ou < 0 .

(2) On pourrait d'ailleurs les calculer une fois pour toutes, puisqu'elles sont indépendantes des coefficients de la fonction $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$.

(3) Cf. n° 164.

par exemple à calculer I_{2n} . Intégrons par parties

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \int t^{2n-1} \frac{t \, dt}{\sqrt{t^2 + h}} \\ &= \int t^{2n-1} d\sqrt{t^2 + h} = t^{2n-1} \sqrt{t^2 + h} - (2n-1) \int t^{2n-2} \sqrt{t^2 + h} \, dt \end{aligned}$$

Or,

$$\int t^{2n-2} \sqrt{t^2 + h} \, dt = \int \frac{t^{2n-2}(t^2 + h)}{\sqrt{t^2 + h}} \, dt = I_{2n} + h I_{2n-2}.$$

D'où la *formule de récurrence*

$$(30) \quad 2n I_{2n} + (2n-1)h I_{2n-2} = t^{2n-1} \sqrt{t^2 + h},$$

qui permettra de calculer I_{2n} en fonction de $I_0 = \log(t + \sqrt{t^2 + h})$.

On calculerait de même J_{2n} en fonction de $J_0 = \arcsin t$.

Dans ce dernier cas, auquel on peut d'ailleurs ramener le premier, si l'on ne tient pas à éviter les imaginaires ⁽¹⁾, on peut aussi poser $t = \sin \varphi$, ce qui conduit à $\int \sin^m \varphi \, d\varphi$ (n° 169) ⁽²⁾.

169. Fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$. — Soit à intégrer

$$(31) \quad \int R(\sin x, \cos x) \, dx,$$

R désignant une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.

La méthode générale consiste à poser $\tan \frac{x}{2} = t$. Comme on sait exprimer rationnellement $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de t et que, d'autre part, $dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}$, on voit qu'on n'aura plus qu'à intégrer une fraction rationnelle en t .

Dans certains cas, on peut simplifier les calculs. C'est ainsi que, si la fonction R admet pour période π , il est plus avantageux de

⁽¹⁾ On peut aussi, pour le calcul de I_m , poser $t = \sqrt{h} \operatorname{sh} \varphi$ ou $t = \sqrt{-h} \operatorname{ch} \varphi$, suivant le signe de h ; ou bien encore $t = \sqrt{h} \tan \varphi$ ou $t = \frac{\sqrt{-h}}{\cos \varphi}$.

⁽²⁾ On pourrait même faire ce changement de variable directement sur

$$R(x, \sqrt{a x^2 + b x + c}),$$

en supposant le radical ramené préalablement à la forme canonique. On serait alors conduit à une intégrale du type étudié au n° 169.

poser $\tan g x = t$. On pourrait prouver que, dans cette hypothèse, R est une fonction rationnelle de $\tan g x$; mais le lecteur le vérifiera sans difficulté sur chaque exemple particulier.

Polynomes en $\sin x$ et $\cos x$. — Arrêtons-nous aussi sur le cas où R est seulement un polynome en $\sin x$ et $\cos x$. La méthode générale s'applique toujours; mais la suivante est plus rapide.

On met R sous la forme d'une fonction linéaire des cosinus et sinus des arcs $x, 2x, 3x, \dots$ (n° 109). L'intégration terme à terme est alors évidente, car

$$\int \cos m x \, dx = \frac{\sin m x}{m}, \quad \int \sin m x \, dx = -\frac{\cos m x}{m}.$$

Dans certains cas, on peut encore simplifier considérablement les calculs et éviter la transformation précédente, qui est souvent pénible. Tout polynome en $\sin x$ et $\cos x$ est, en effet, une somme de termes de la forme $A \cos^p x \sin^q x$. Soit donc à calculer

$$(32) \quad \int \cos^p x \sin^q x \, dx,$$

les nombres p et q étant entiers et positifs. *Si l'un au moins d'entre eux est impair, on peut se ramener immédiatement à l'intégration d'un polynome.* En effet, soit par exemple $p = 2n + 1$. On écrit

$$\cos^{2n+1} x \sin^q x \, dx = (\cos^2 x)^n \sin^q x \cos x \, dx = (1 - \sin^2 x)^n \sin^q x \, d(\sin x).$$

Il suffit donc de poser $\sin x = t$.

Ceci s'étend même au cas où p et q seraient susceptibles d'être négatifs; mais on est alors conduit à une fraction rationnelle en t et non pas à un polynome, ce qui peut compliquer beaucoup.

Si p et q sont pairs, la simplification n'existe pas.

170. Fractions rationnelles en e^x . — Citons enfin l'intégration d'une fraction rationnelle en e^x , qui s'effectue en posant $e^x = t$. Si l'on remarque que $dx = \frac{dt}{t}$, on voit qu'on sera encore conduit à une fraction rationnelle en t . Au reste, ce type est au fond identique au

précédent, en vertu des formules d'Euler (n^o 103); à condition, bien entendu, d'admettre l'emploi des imaginaires.

Observons, pour terminer, qu'on saura intégrer aussi une fraction rationnelle en e^{zx} , ou en $\sin zx$ et $\cos zx$, z étant une constante quelconque, entière, fractionnaire ou incommensurable. Il suffit, en effet, de poser $zx = t$ pour se ramener aux cas précédents.

CHAPITRE XIV.

APPLICATIONS DES QUADRATURES.

171. La notion d'intégrale définie s'introduit directement dans une foule de questions de Géométrie, de Mécanique et de Physique. D'une manière générale, il en est ainsi toutes les fois qu'on se propose de mesurer une grandeur dont aucune partie ne peut être superposée à la grandeur de même nature prise pour unité (longueur d'une ligne courbe, aire limitée par une ligne courbe, volume limité par une surface courbe, etc.). Il arrive même que la grandeur à évaluer ne peut être définie d'une manière précise que par le moyen d'une ou plusieurs intégrales (masses, centres de gravité, moments d'inertie, travail, etc.). Nous allons, dans ce Chapitre, passer en revue les principales applications tirées de la Géométrie et de la Mécanique.

172. **Longueur d'une ligne courbe.** — Soit à évaluer la longueur de l'arc de courbe AB, défini par les équations paramétriques (I. II)

$$(I) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

supposées telles que le point $M(x, y, z)$ de paramètre t décrive l'arc AB, de A vers B et toujours dans le même sens, lorsque t croît, d'une manière continue, de α à β .

On ne peut superposer aucune portion de $\widehat{AB}$ à l'unité de longueur qui est un segment de droite. Il faut donc procéder indirectement. Partageons l'arc AB en n arcs partiels par les points $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$, de paramètres $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Par définition, la longueur l de l'arc $\widehat{AB}$ est la limite de la longueur λ de la ligne polygonale $AM_1M_2\dots M_{n-1}B$ lorsque n augmente indéfiniment, chaque arc partiel tendant vers zéro.

Cette définition concorde bien avec la notion vulgaire que tout le

monde possède de cette longueur ⁽¹⁾. Il s'agit maintenant de la traduire analytiquement.

Évaluons λ . On a (I. II)

$$M_i M_{i+1} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}.$$

Or, si l'on regarde $(t_{i+1} - t_i) = \Delta t_i$ comme un infiniment petit principal, la différence $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ a pour partie principale la différentielle $dx_i = f'(t_i) \Delta t_i$ (n° 138). Donc, la partie principale de $M_i M_{i+1}$ est $F(t_i) \Delta t_i$, en posant, pour abrégér,

$$(2) \quad F(t) = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Il suit de là (n° 144, remarque) que λ a même limite que la somme

$$\Sigma = F(\alpha)(t_1 - \alpha) + F(t_1)(t_2 - t_1) + \dots + F(t_{n-1})(\beta - t_{n-1}).$$

Donc

$$(3) \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt.$$

Élément linéaire. — La portion d'arc Δs comprise entre les points M et M' de paramètres t et $t + dt$ a pour partie principale, si dt est infiniment petit principal, la différentielle de la fonction $s = \int_{\alpha}^t F(t) dt$, c'est-à-dire

$$(4) \quad ds = F(t) dt = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

C'est ce qu'on appelle *l'élément linéaire de la courbe*. C'est l'élément différentiel de l'intégrale (3).

D'après le raisonnement fait plus haut à propos du calcul de la corde $M_i M_{i+1}$, *ds est aussi la partie principale de la corde MM'*. Ceci nous prouve, en passant, que, sur une courbe quelconque, *tout arc infiniment petit est un infiniment petit équivalent à sa corde*. C'est ce qu'on exprime aussi en disant que *le rapport de la corde à l'arc tend vers 1, lorsque l'arc tend vers zéro*.

173. Règle pratique pour la rectification des courbes. — Dans la pratique, pour *rectifier une courbe*, c'est-à-dire pour calculer sa

(1) Cf. *Leçons*, n° 26.

longueur, on commence par calculer son élément linéaire. Pour cela on prend deux points voisins M et M' et l'on calcule la corde MM', en négligeant les infiniment petits du second ordre. Quelques considérations géométriques permettent souvent de faire très rapidement ce calcul. C'est ainsi qu'on retrouve de suite la formule

$$(5) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

en remarquant que les projections de MM' sur les axes sont, au second ordre près, les différentielles dx , dy , dz . De même, si la courbe est

Fig. 27.

plane et déterminée en *coordonnées polaires* (t. II), on construit le triangle rectangle MPM' (fig. 27) et l'on écrit

$$ds^2 = \overline{MM'}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PM'}^2.$$

Or, le cercle de centre O et de rayon r coupe OM' en un point Q dont la distance à P est du second ordre ⁽¹⁾. Donc, on peut prendre

$$PM' = d\zeta \quad \text{et} \quad MP = \text{arc MQ} = r d\omega,$$

d'où

$$(6) \quad ds^2 = d\zeta^2 + r^2 d\omega^2.$$

Soit encore une ligne tracée sur une surface de révolution. Menons les méridiens et parallèles qui passent par M et M'; nous obtenons la figure MPM'Q, qui est sensiblement un rectangle (fig. 28). Donc $\overline{MM'}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PM'}^2$. Or, soient $d\tau$ l'arc MP, $d\zeta$ l'angle des plans méridiens passant par M et M' et r le rayon de parallèle MQ. On a, au second ordre près,

$$MP = d\tau, \quad PM' = MQ = r d\zeta;$$

(1) Si $\varepsilon = \widehat{MO M'}$, on a $PQ = OQ - OP = r - r \cos \varepsilon = r(1 - \cos \varepsilon) = r\left(\frac{\varepsilon^2}{2} - \dots\right)$.

d'où

$$(7) \quad ds^2 = d\sigma^2 - r^2 d\varphi^2.$$

Par exemple, si la surface est une sphère de rayon R et si φ , θ sont la longitude et la colatitude de M (t. II), on a

$$d\sigma = R d\theta, \quad r = R \sin \theta;$$

d'où

$$(8) \quad ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Fig. 28.

Une fois qu'on est en possession de l'élément linéaire, on fait choix d'une variable indépendante t dont la variation entre deux limites α et β donne naissance à l'arc AB , comme il a été expliqué plus haut. On fait ce choix de façon que l'élément linéaire ds , calculé en fonction de t et de dt , se présente sous la forme la plus simple. Puis, lorsque ce dernier calcul est effectué avec toutes les réductions et simplifications possibles, on intègre ds entre les limites α et β .

174. **Aires.** — *Aires planes.* — Soit d'abord à évaluer l'aire A comprise à l'intérieur d'une courbe plane fermée quelconque (fig. 29).

Fig. 29.

La première idée qui vient à l'esprit est de décomposer cette aire en une somme ou une différence de trapèzes curvilignes ana-

logues à ceux du n° 142. Par exemple, dans le cas de la figure 29, on mène les tangentes parallèles à OY , et l'aire A est la différence des trapèzes curvilignes AM_1BbaA et AM_2BbaA . Si $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ sont les équations des deux arcs AM_1B et AM_2B , on a donc

$$A = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx,$$

ou

$$A = \int_a^b M_2 M_1 dx.$$

De même, pour la figure 30, on a

$$A = -aAzBba + bB\beta Ccb - cC\gamma Ddc + dD\delta Eed - eE\zeta Ffe + fF\eta Ggf \\ - gG\eta Hh\zeta + hH\theta Ii\eta - iAa\alpha I.$$

On calculera chacun des termes de cette somme en prenant les précautions de signes indiquées au n° 144.

Fig. 30.

On obtient des résultats beaucoup plus élégants en ne s'astreignant pas à prendre x pour variable d'intégration. Supposons que A soit limitée par une courbe fermée C , telle qu'on puisse exprimer les coordonnées x et y de son point courant M en fonction d'un paramètre t , dont la variation continue de t_0 à t_1 fasse décrire à M toute la courbe une seule fois et dans un sens quelconque que nous appelons *sens positif*. Nous allons donner à l'aire A un signe défini par la convention suivante : Menons en M la demi-tangente positive MX , dirigée suivant le sens de parcours ci-dessus. Faisons-la tourner de $+\frac{\pi}{2}$ ($t, t+1$), de manière à obtenir la demi-normale positive MY . Si MY est

dirigée vers l'aire A , celle-ci sera positive; sinon, elle sera négative ⁽¹⁾.

Je dis qu'avec cette convention, on a

$$(9) \quad A = - \int_{t_0}^{t_1} y \, dx = - \int_{t_0}^{t_1} \left(y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Fig. 31.

Nous nous bornerons à le vérifier sur un cas de figure, la vérification étant la même dans tous les cas. Sur la figure 31, on a

$$\int_{t_0}^{t_1} y \, dx = M_0 A a m_0 M_0 - A M' B b a A + B M_0 m_0 b B = - |A|.$$

D'autre part, A étant positif, on a bien l'égalité (9).

Tout ce que nous venons de dire peut se répéter en échangeant les rôles des axes Ox et Oy . Comme l'échange de ces axes change le sens positif de rotation du plan (t. II), il faut, en même temps qu'on permute x et y dans la formule (9), changer le signe du second membre, ce qui donne la formule, d'ailleurs facile à vérifier directement,

$$(10) \quad A = \int_{t_0}^{t_1} x \, dy = \int_{t_0}^{t_1} \left(x \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

En ajoutant (9) et (10), il vient

$$(11) \quad A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

173. Cette dernière formule peut s'obtenir directement de la manière suivante : Soient une courbe C quelconque et un point M mobile sur cette courbe. Le rayon vecteur OM balaie une certaine aire

⁽¹⁾ Dans le cas où la courbe est convexe, on peut aussi prendre un point fixe P intérieur à A . Si la demi-droite PM tourne dans le sens positif (t. II) quand M décrit C dans le sens positif, l'aire est positive; dans le cas contraire, elle est négative.

que nous comptons comme positive s'il tourne dans le sens positif et comme négative dans le cas contraire ⁽¹⁾. Supposons que M dépende d'un paramètre t , celui-ci variant de t_0 à t_1 lorsque M décrit l'arc M_0M_1 . Je dis que l'aire OM_0M_1O est donnée, en grandeur et en signe, par la formule (11). En effet, on peut la considérer comme la

limite de l'aire du secteur polygonal obtenu en inscrivant dans l'arc M_0M_1 une ligne polygonale dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, chaque côté tendant vers zéro. Ce secteur étant une somme de petits triangles tels que OMM' (fig. 32), on se ramène, en raisonnant, comme au n° 172, à une intégrale définie dont l'élément différentiel est l'aire OMM' ou un infiniment petit équivalent. Or, si (x, y) , $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sont les coordonnées des points M et M' , cette aire est, en grandeur et en signe (t. II),

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x + \Delta x & y + \Delta y & 1 \end{vmatrix} = \frac{x \Delta y - y \Delta x}{2}.$$

La partie principale est

$$\frac{1}{2}(x dy - y dx) = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt,$$

si t et $t + dt$ sont les paramètres de M et M' . On a donc bien

$$(12) \quad A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Si l'on suppose maintenant la ligne C fermée et parcourue tout entière dans un certain sens quand t croît de t_0 à t_1 , la formule (12)

⁽¹⁾ Cette convention équivaut à la première, si le sens de parcours du contour OM_0M_1O est tel qu'il coïncide, sur l'arc M_0M_1 , avec le sens du mouvement de M .

donne l'aire intérieure à cette ligne avec le signe convenu plus haut. En effet, en menant de O les tangentes à C, on a (fig. 33).

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x dy - y dx) = \text{OM}_0\text{PBO} - \text{OBP}'\text{AO} + \text{OAM}_0\text{O} = \Lambda.$$

Fig. 33.

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner d'autres cas de figure, avec les diverses hypothèses sur le sens positif de parcours de C.

En coordonnées polaires, on a, comme on le vérifie par un calcul élémentaire,

$$x dy - y dx = r^2 d\omega;$$

donc

$$(13) \quad \Lambda = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(r^2 \frac{d\omega}{dt} \right) dt.$$

Au reste, cette formule est aisée à vérifier directement, car l'*élément d'aire* OMM' (fig. 32) est égal, au second ordre près, à l'aire du secteur circulaire OMP, lequel vaut, en grandeur et en signe, $\frac{1}{2} r^2 d\omega$.

176. *Aire d'une surface de révolution*. — Soit la surface de révolution engendrée par la courbe C en tournant autour de la droite Δ

Fig. 34.

si tracée dans son plan (fig. 34). Nous nous proposons de calculer l'aire engendrée par l'arc M_0M_1 . Imaginons toujours qu'on inscrive une

ligne polygonale dans l'arc M_0M_1 . Chaque côté MM' engendre un tronc de cône. La somme des aires de tous ces troncs de cône tend vers l'aire A cherchée lorsque le nombre des côtés tels que MM' croît indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro. On est encore conduit à une intégrale définie dont l'élément différentiel est *l'élément d'aire dA engendrée par la corde MM'* , ou un infiniment petit équivalent. Or, soient r le rayon du parallèle qui passe par M et ds l'arc MM' . On a

$$dA = 2\pi r ds.$$

On calculera cet élément d'aire en fonction d'un paramètre t , qu'on choisira pour avoir un résultat aussi simple que possible; puis on intégrera entre M_0 et M_1 , c'est-à-dire que si t_0 et t_1 sont les paramètres de ces deux points, on aura

$$(14) \quad A = \int_{t_0}^{t_1} \left(2\pi r \frac{ds}{dt} \right) dt.$$

177. Volumes. — Soit à calculer le volume V intérieur à la surface S (fig. 35). Choisissons un axe Oz et découpons V en petites

Fig. 35.

tranches par des plans perpendiculaires à Oz , dont les cotes iront en croissant de z_0 à z_1 . Calculons le volume de la petite tranche dV comprise entre les plans de cotes z et $z+dz$, ou un infiniment petit équivalent. Le plan (z) coupe le volume suivant une aire plane, que nous savons évaluer (n° 174), et qui est évidemment une fonction déterminée de z , soit $A(z)$. Nous pouvons, au second ordre près, remplacer dV par le volume d'un cylindre de base A et de hauteur dz , c'est-à-dire prendre

$$dV = A(z) dz.$$

En intégrant cet élément de volume entre z_0 et z_1 , nous aurons le volume cherché

$$(15) \quad V = \int_{z_0}^{z_1} A(z) dz.$$

Remarques. — I. Dans chaque exemple, il faut profiter de l'indétermination du choix de Oz pour simplifier le plus possible le calcul de la fonction $A(z)$. Par exemple, si V est limité par une surface de révolution et deux de ses parallèles, on prendra Oz suivant l'axe de révolution. L'aire $A(z)$ sera alors celle du parallèle de cote z , c'est-à-dire πr^2 , en appelant r le rayon de ce dernier, qu'on aura en fonction de z grâce à l'équation de la méridienne dans son plan.

II. Il est souvent plus avantageux de ne pas garder z comme variable d'intégration, mais de calculer au contraire A et z en fonction d'un même paramètre t fixant le plan sécant. On intègre ensuite dV entre t_0 et t_1 .

178. **Masses.** — Nous admettons la notion expérimentale de masse.

1° *Masse d'une ligne.* — Une ligne est dite *homogène* si deux arcs de même longueur ont la même masse, quels que soient ces arcs. Le quotient constant de la masse d'un tel arc par sa longueur s'appelle la *densité linéaire* de la ligne. La masse d'une ligne homogène s'obtient donc en multipliant sa longueur par sa densité linéaire.

Soit maintenant une ligne non homogène AB (fig. 36). Nous

Fig. 36.

allons définir la *densité linéaire en un point M* de cette ligne. Prenons un arc $M'M''$ comprenant M . Soit Δs sa longueur et Δm sa masse. Le quotient $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ est la *densité linéaire moyenne* de l'arc $M'M''$. La limite de ce quotient lorsque M' et M'' tendent simultanément vers M est la *densité linéaire au point M*.

Soit ρ cette densité. Si l'on considère un arc infiniment petit ds comprenant M , la masse Δm de cet arc a pour partie principale

$$(16) \quad dm = \rho ds,$$

premier terme du dividende par le premier terme du diviseur. On obtient ainsi un certain monome q_1 , de degré $m - p$.

Retranchons du dividende le produit du diviseur par ce premier terme; nous obtenons le premier reste partiel, qui est un polynome R_1 de degré au plus égal à $m - 1$, car les termes de degré m de A et de Bq_1 se détruisent, d'après la façon même dont a a été calculé q_1 . Retranchons en même temps Bq_1 du second membre de (9); si nous désignons par Q_1 la différence $Q - q_1$, c'est-à-dire la partie inconnue du quotient, nous avons

$$(10) \quad R_1 \equiv BQ_1 + R.$$

Cette identité est de même forme que (9). On en conclut que le premier terme q_2 de Q_1 , ou *second terme du quotient*, est obtenu en divisant le premier terme du premier reste partiel par le premier terme du diviseur.

Retranchons du premier reste partiel le produit du diviseur par ce second terme; nous obtenons le deuxième reste partiel, qui est un polynome R_2 dont le degré est inférieur au degré de R_1 , pour la même raison que plus haut. Si l'on pose

$$Q_2 = Q_1 - q_2 = Q - (q_1 + q_2),$$

on a

$$(11) \quad R_2 \equiv BQ_2 + R;$$

d'où l'on déduit que le troisième terme du quotient s'obtient en divisant le premier terme du deuxième reste partiel par le premier terme du diviseur.

En continuant ainsi, on obtient de proche en proche une suite de restes partiels dont chacun donne un terme du quotient. D'une façon générale, on a le $(k + 1)^{i\text{ème}}$ terme du quotient en divisant le premier terme du $k^{\text{ième}}$ reste partiel par le premier terme du diviseur, comme cela résulte de l'identité

$$(12) \quad R_k \equiv BQ_k + R,$$

où l'on a posé

$$(13) \quad Q_k = Q - (q_1 + q_2 + \dots + q_k).$$

Comme les degrés des restes partiels vont en décroissant, *il arrive*

un moment où l'on ne peut poursuivre l'opération, parce que le reste partiel est de degré inférieur à celui de B. Ce reste partiel est alors le reste de la division, et l'ensemble des termes obtenus au quotient constitue ce quotient tout entier.

En effet, si n est le rang du reste partiel en question, on a, d'après (12) et (13),

$$(14) \quad R_n \equiv BQ_n + R \quad (n \leq m - p + 1),$$

avec

$$(15) \quad Q_n = Q - (q_1 + q_2 + \dots + q_n).$$

Or, (14) s'écrit

$$(16) \quad BQ_n \equiv R_n - R.$$

Si Q_n n'était pas identiquement nul, le premier membre aurait un degré au moins égal à p . Or, le second membre a un degré plus petit que p , puisqu'il en est ainsi de R et de R_n . L'identité (16) n'est donc possible que si $Q_n \equiv 0$ et, par suite, $R_n \equiv R$ et, en vertu de (15), $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$.

C. Q. F. D.

En résumé, nous avons montré que, quels que soient les polynomes A et B, pourvu que m soit au moins égal à p , on peut toujours trouver les polynomes Q et R vérifiant l'identité (9), qu'on appelle *l'identité de la division suivant les puissances décroissantes*. Nous avons obtenu du même coup une règle permettant de les calculer (*) sans aucune ambiguïté, ce qui nous prouve que *le problème posé n'admet qu'une seule solution*, ou, comme on dit encore, que *l'identité de la division n'est possible que d'une seule manière*. Ceci peut d'ailleurs s'établir directement en raisonnant comme il suit.

Supposons qu'on ait, outre (9),

$$(17) \quad A = BQ' + R',$$

(*) Nous croyons inutile d'énoncer de nouveau cette règle, qui tiendrait beaucoup de place et qui est, du reste, constituée en entier par les passages en italique du texte ci-dessus. La meilleure façon de l'apprendre est d'ailleurs de l'appliquer plusieurs fois à des exemples numériques. Quant à la disposition pratique des calculs, nous l'indiquons dans les exercices résolus correspondant à ce Chapitre.

R' étant, comme R , de degré $< p$. On aurait aussi

$$(18) \quad B(Q - Q') \equiv R' - R;$$

ce qui est impossible, car le premier membre a un degré au moins égal à p , tandis que le second a un degré plus petit que p .

Lorsque le reste est identiquement nul, on dit que *la division se fait exactement*, ou encore que *A est divisible par B*, ou enfin que *B divise A ou est un diviseur de A*.

Quand il n'en est pas ainsi, nous avons vu qu'il était impossible de poursuivre l'opération, parce qu'on ne pouvait plus diviser le premier terme de R par le premier terme de B . En vérité, ceci est exact si l'on assujettit le quotient Q à être un véritable polynome; mais on peut admettre aussi l'extension suivante :

On peut toujours continuer la division si l'on convient d'introduire au quotient des termes à exposants négatifs. En procédant toujours suivant la même règle, il est alors possible de pousser la division aussi loin qu'on le désire. On peut également effectuer celle-ci dans le cas où A a un degré inférieur à celui de B , le quotient ne contenant alors que des termes à exposants négatifs. Mais nous n'insistons pas davantage sur cette extension, parce qu'elle est au fond équivalente, grâce au changement de z en $\frac{1}{z}$, à la division suivant les puissances croissantes, que nous allons maintenant exposer.

202. Division suivant les puissances croissantes. — *Étant donnés deux polynomes quelconques A et B, dont le second possède un terme constant, et un nombre naturel λ , également quelconque, on se propose de trouver un polynome Q de degré au plus égal à λ et un polynome R donnant lieu à l'identité*

$$(19) \quad A \equiv BQ + z^{\lambda+1}R.$$

A cet effet, nous allons procéder comme au numéro précédent, mais en *ordonnant tous nos polynomes suivant les puissances croissantes de z*.

Tout d'abord, si A commence par un terme de degré au moins égal à $\lambda + 1$, on a nécessairement

$$Q = 0, \quad A = z^{\lambda+1}R,$$

sans quoi on pourrait écrire

$$BQ \equiv A - z^{\lambda+1}R,$$

identité impossible, car le second membre renferme $z^{\lambda+1}$ en facteur, tandis qu'il ne saurait en être de même du premier, puisque B possède un terme constant et que Q est au plus de degré λ .

Supposons maintenant que le premier terme de A soit de degré $< \lambda + 1$. Il doit être égal au premier terme de BQ. D'où l'on conclut que le premier terme q_1 de Q est égal au premier terme de A divisé par le premier terme b_0 de B. Retranchant Bq_1 des deux membres de (19), il vient

$$(20) \quad R_1 \equiv BQ_1 + z^{\lambda+1}R.$$

Le premier terme de Q_1 , ou second terme q_2 de Q, s'obtient donc en divisant par b_0 le premier terme du premier reste partiel R_1 , lequel terme est certainement de degré supérieur à celui de q_1 , car le terme b_0q_1 disparaît dans la différence $R_1 \equiv A - Bq_1$. En retranchant Bq_2 des deux membres de (20), on fera apparaître un deuxième reste partiel, et ainsi de suite.

Les restes partiels successifs ont des premiers termes dont les degrés vont en croissant, du moins tant qu'on n'obtient pas de reste nul. En laissant de côté cette dernière hypothèse, il arrive donc un moment où l'on obtient un reste R_n commençant par un terme de degré au moins égal à $\lambda + 1$, le reste précédent R_{n-1} ne commençant que par un terme de degré au plus égal à λ . Comme on a, en appelant Q_n la partie manquante du quotient,

$$(21) \quad R_n \equiv BQ_n + z^{\lambda+1}R,$$

on en conclut, d'après le cas particulier examiné au début, que Q_n est nul et R_n égal à $z^{\lambda+1}R$.

En résumé, pour trouver les polynômes Q et R qui satisfont à (19), on divise A par B en suivant exactement la même règle qu'au numéro précédent, avec cette seule différence que les polynômes sont ordonnés suivant les puissances croissantes de z et qu'on arrête l'opération dès qu'on obtient un reste partiel commençant par un terme de degré au moins égal à $\lambda + 1$. Ce reste partiel est le reste $z^{\lambda+1}R$ de la division et l'ensemble des termes obtenus au quotient constitue le quotient Q tout entier.

Comme on a obtenu une règle parfaitement déterminée pour le calcul des polynomes Q et R , on peut affirmer que *l'identité (19) n'est possible que d'une seule manière*, pour une valeur donnée de λ : ce qu'on peut aussi prouver par un raisonnement analogue à celui de la page 259 et que nous laisserons au lecteur le soin de faire.

Nous avons laissé de côté le cas où l'on obtient, à un moment donné, un reste identiquement nul. Dans cette hypothèse, si Q' désigne l'ensemble des termes obtenus au quotient, on a

$$(22) \quad A \equiv BQ'.$$

Donc, A est divisible par B , au sens du numéro précédent. Réciproquement, si A est divisible par B , la division suivant les puissances croissantes se termine nécessairement. D'une façon précise, si m et p sont les degrés de A et B , l'identité (19) n'est possible, pour $\lambda \geq m - p$, que si $R = 0$, $Q = Q'$. Cela résulte, en effet, de ce que cette identité n'admet qu'une solution, qui est précisément fournie par (22).

Comme on le voit, la division suivant les puissances croissantes permet, aussi bien que la division suivant les puissances décroissantes, de reconnaître quand deux polynomes sont divisibles l'un par l'autre. *Pour que A soit divisible par B , il faut et il suffit que, dès qu'on obtient un reste partiel devant renfermer x^{m-p+1} en facteur, ce reste partiel soit identiquement nul. Si A n'est pas divisible par B , la division peut se poursuivre indéfiniment* et donner lieu à l'identité (19) pour des valeurs de λ aussi grandes qu'on le veut. En particulier, il en est toujours ainsi si $m < p$.

203. Division par $x - a$, $1 - ax$. — On obtient des résultats particulièrement simples et d'un usage assez fréquent, en étudiant la *division d'un polynome par un binome du premier degré*. Suivant qu'on veut effectuer celle-ci suivant les puissances décroissantes ou croissantes de x ⁽¹⁾, on la ramène à la division par $x - a$ ou par $1 - ax$. Rien n'est, en effet, plus aisé. Soit à diviser $f(x)$ par $ax + \beta$. On écrit, suivant le cas,

$$\frac{f(x)}{ax + \beta} = \frac{1}{a} \frac{f(x)}{x - \left(-\frac{\beta}{a}\right)}, \quad \frac{f(x)}{ax + \beta} = \frac{1}{\beta} \frac{f(x)}{1 - \left(-\frac{a}{\beta}x\right)},$$

---

(1) Nous appellerons ainsi dorénavant la variable indépendante. Mais, il reste bien entendu qu'on peut la supposer imaginaire.

et l'on pose

$$\alpha = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Division par $x - a$. — Écrivons l'identité de la division *suivant les puissances décroissantes* sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (23) \quad f(x) &= A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_p x^{m-p} + \dots + A_m \\ &\equiv (x - a) (B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \dots \\ &\quad + B_{p-1} x^{m-p} + B_p x^{m-p-1} + \dots + B_{m-1}) + R, \end{aligned}$$

où les A sont les coefficients connus ⁽¹⁾ de $f(x)$, les B les coefficients inconnus du quotient et R le reste, lequel est une constante puisque de degré inférieur au degré du diviseur $x - a$.

Égalons les coefficients de x^{m-p} dans les deux membres

$$(24) \quad A_p = B_p - a B_{p-1}, \quad B_p = A_p + a B_{p-1};$$

relation de récurrence qui se traduit par la règle suivante :

RÈGLE. — *Chaque coefficient du quotient est obtenu en multipliant par a le coefficient précédent et en y ajoutant le coefficient du dividende qui a même rang que le coefficient cherché.*

Si l'on ajoute à cela que le premier coefficient B_0 du quotient est égal au premier coefficient A_0 du dividende, comme on le constate en considérant les termes en x^m , on voit qu'on pourra calculer très simplement, de proche en proche, tous les coefficients du quotient, et cela sans être obligé de *poser la division*, comme on doit le faire pour deux polynômes quelconques.

La relation (24) est encore valable pour $p = m$, mais à condition que B_m soit remplacé par R . Donc le reste est aussi déduit, par la règle précédente, du dernier coefficient du quotient.

THÉORÈME. — *Le reste de la division de $f(x)$ par $x - a$ est $f(a)$.*

Il suffit, pour s'en rendre compte, de faire $x = a$ dans l'identité (23).

Ce théorème, joint à la règle précédente, donne un *moyen de calculer $f(a)$* qui est beaucoup plus pratique que celui qui consiste-

⁽¹⁾ Si un terme manque dans $f(x)$, on le suppose écrit néanmoins, mais avec un coefficient nul.

rait à substituer directement a dans $f(x)$, surtout si l'exposant m a une valeur un peu considérable et si a ne se réduit pas à ± 1 .

204. Division par $1 - ax$. — Nous divisons, cette fois, suivant les puissances croissantes et nous avons l'identité

$$(25) \quad f(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_px^p + \dots - A_mx^m \\ \equiv (1 - ax)(B_0 + B_1x + \dots - B_{p-1}x^{p-1} - B_px^p + \dots + B_\lambda x^\lambda) + x^{\lambda+1}R.$$

En égalant les coefficients de x^p , nous retombons sur la relation (24). Donc, les coefficients successifs du quotient sont obtenus par la même règle que précédemment.

Cette règle convient si grand que soit λ , à condition de regarder comme nuls les coefficients des puissances de x supérieures à la $m^{\text{ième}}$, dans $f(x)$; ceci lorsque $\lambda \geq m$ ⁽¹⁾. Elle convient aussi pour le calcul de R , si l'on pose $R = B_{\lambda+1}$; mais si $\lambda < m - 1$, il faut remplacer $A_{\lambda+1}$ dans la formule $B_{\lambda+1} = aB_\lambda + A_{\lambda+1}$, par le coefficient de $x^{\lambda+1}$ dans l'ensemble des termes de $f(x)$ dont le degré est au moins égal à $\lambda + 1$, c'est-à-dire par $A_{\lambda+1} + A_{\lambda+2}x + \dots - A_mx^{m-\lambda-1}$; de sorte que, dans ce cas, R est un polynôme de degré $m - \lambda - 1$. Dans les autres cas, c'est une constante.

THÉORÈME. — Si $\lambda \geq m - 1$, on a : $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{R}{a^{\lambda+1}}$.

Cela résulte visiblement de l'identité (25) et de ce que R est une constante.

On tire de là un moyen pratique pour calculer $f\left(\frac{1}{a}\right)$; on se ramène, par la formule ci-dessus, au calcul de R pour $\lambda = m - 1$. Ce procédé doit être joint à celui qui a été indiqué au numéro précédent pour le calcul de $f(a)$. On emploie l'un ou l'autre suivant qu'il semble plus simple de multiplier les coefficients successifs par a ou par $\frac{1}{a}$. Nous retrouverons ces considérations au Chapitre XXI.

205. Décomposition d'un polynôme en facteurs linéaires. — Pour qu'un polynôme soit divisible par $x - a$, il faut et suffit que $f(a)$ soit nul (n° 203). Or, le théorème de d'Alembert (n° 199) nous

(1) On voit, d'après cela, que les coefficients successifs du quotient sont en progression géométrique de raison a , à partir du coefficient de x^m .

apprend que tout polynôme admet au moins une racine a_1 , réelle ou imaginaire, et, par suite, se trouve certainement divisible par un facteur linéaire de la forme $x - a_1$. Soit alors

$$f(x) \equiv (x - a_1)f_1(x).$$

Si $f(x)$ est de degré m , $f_1(x)$ est de degré $m - 1$ et doit être, à son tour, divisible par un facteur linéaire $x - a_2$; soit

$$f_1(x) \equiv (x - a_2)f_2(x).$$

Le polynôme $f_2(x)$ est divisible par $x - a_3$ et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait trouvé m diviseurs, auquel cas le dernier quotient sera une constante C ,

$$f_{m-1}(x) \equiv (x - a_m)C.$$

En multipliant membre à membre toutes les identités obtenues, on a

$$(26) \quad f(x) \equiv C(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m).$$

Donc :

THÉORÈME. — *Tout polynôme de degré m est décomposable en un produit de m facteurs linéaires.*

Certains de ces facteurs peuvent d'ailleurs être égaux. Si l'on veut mettre en évidence les facteurs distincts, on écrit

$$(27) \quad f(x) \equiv C(x - a)^\alpha(x - b)^\beta \dots (x - l)^\gamma,$$

les nombres $a, b, \dots, l$ étant tous différents et les exposants $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ étant des nombres naturels de somme m .

Si l'on remarque que $f(x)$ ne peut s'annuler que si l'un des facteurs du second membre s'annule, on voit que *les zéros de $f(x)$ sont $a, b, \dots, l$* . Les exposants $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sont appelés leurs *ordres de multiplicité* respectifs. Suivant que $\alpha \equiv 1, 2, 3, \dots, n$, la racine a est dite *simple, double, triple, \dots, n^{ème}*.

Si l'on compte chaque racine un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité, on peut dire qu'un polynôme de degré m possède m racines.

THÉORÈME I. — *Si un polynôme du même degré s'annule pour plus de m valeurs distinctes, il est identiquement nul.*

En effet, si $f(x)$ s'annule pour les valeurs distinctes $a_1, a_2, \dots, a_m$, on a l'identité (26), où C est une constante inconnue. Si l'on suppose en outre que $f(x)$ s'annule pour une nouvelle valeur a_{m+1} , comme aucun des facteurs $(a_{m+1} - a_1), \dots, (a_{m+1} - a_m)$ n'est nul, il faut que la constante C le soit. Mais alors $f(x) \equiv 0$.

THÉORÈME II. — *Pour que deux polynômes aient les mêmes racines avec les mêmes ordres de multiplicité, il faut et suffit qu'ils aient leurs coefficients proportionnels.*

En effet, si $f(x)$ et $g(x)$ admettent tous deux les racines $a, b, \dots, l$ aux ordres de multiplicité $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, ils donnent lieu chacun à une identité telle que (27), la constante C pouvant seule varier d'un polynôme à l'autre. Dès lors, on a une identité de la forme

$$f(x) \equiv \frac{C}{C'} g(x) \equiv k g(x);$$

les coefficients de f sont égaux à ceux de g multipliés par k .

La réciproque est évidente.

III. — DIVISIBILITÉ.

206. Plus grand commun diviseur. — Étant donnés deux polynômes A et B , proposons-nous de trouver tous leurs diviseurs communs.

On peut, à cet effet, imaginer *deux procédés différents*, entièrement analogues aux deux méthodes qu'on emploie en Arithmétique pour la détermination des diviseurs communs à deux nombres entiers.

Le premier repose sur le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour qu'un polynôme B divise un polynôme A , il faut et suffit que A contienne tous les facteurs linéaires de B avec des exposants au moins égaux à ceux qu'ils ont dans B .*

Cela résulte manifestement de l'identité $A \equiv BQ$.

On peut déduire de là toute une théorie du p. g. c. d. et du p. p. m. c. de deux ou plusieurs polynômes, en raisonnant comme en Arithmétique lorsqu'on s'appuie sur la décomposition des nombres en facteurs premiers. Mais cette méthode, très simple en théorie, offre l'inconvé-

nient d'exiger la décomposition des polynômes en facteurs linéaires, ce qui est un problème très difficile (Chap. XVIII et suiv.). Elle peut être avantageuse pour établir des théorèmes généraux; mais, au point de vue de la recherche pratique des p. g. c. d. ou p. p. m. e., elle ne vaut absolument rien. Aussi, n'en dirons-nous pas davantage à son sujet.

Voici maintenant la seconde méthode, qu'on appelle quelquefois *méthode de la division*.

Divisons A par B suivant les puissances décroissantes, soit

$$(28) \quad A = BQ_1 + R_1.$$

Il est évident que tout diviseur commun à A et à B divise R_1 et que tout diviseur commun à B et à R_1 divise A. Les diviseurs cherchés sont donc les diviseurs communs à B et à R_1 .

Opérons sur B et R_1 comme sur A et B:

$$(29) \quad B = R_1Q_2 + R_2,$$

puis sur R_1 et R_2 comme sur B et R_1 , et ainsi de suite. Nous obtenons de la sorte une suite de restes tels que les diviseurs cherchés sont aussi les diviseurs communs à deux restes consécutifs quelconques. Or, les degrés de ces restes vont en décroissant; on finit donc par avoir un reste constant ou nul. Dans le premier cas, il n'y a pas de diviseurs communs; les polynômes A et B sont premiers entre eux. Dans le second cas, si R_n est le reste nul, on a

$$(30) \quad R_{n-2} = R_{n-1}Q_n.$$

Les diviseurs cherchés étant les diviseurs communs à R_{n-2} et à R_{n-1} , ce sont manifestement tous les diviseurs de R_{n-1} . Ce dernier polynôme est, par suite, le diviseur commun de plus fort degré; on l'appelle le plus grand commun diviseur ou p. g. c. d. des deux polynômes proposés.

Comme on le voit, sa détermination repose sur une suite de divisions, dont la dernière doit se faire exactement, son diviseur étant alors le p. g. c. d. cherché. Il ne nous semble pas utile de résumer en une règle les opérations qui viennent d'être décrites, d'autant plus qu'on ne ferait qu'énoncer la règle comme de l'Arithmétique. Quant à la disposition pratique des calculs, elle est indiquée par un exemple dans les exercices relatifs à ce Chapitre.

207. Les propriétés du p. g. c. d. sont les mêmes et s'établissent de la même manière en Algèbre qu'en Arithmétique. Si l'on prend comme point de départ la méthode de la division qui vient d'être exposée, elles reposent toutes sur le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si l'on multiplie le dividende et le diviseur d'une division par un même polynome, le quotient ne change pas et le reste est multiplié par ce polynome.*

En effet, multiplions l'identité (9) par le polynome C,

$$AC = BC.Q + RC,$$

R étant de degré inférieur à B, RC est de degré inférieur à BC. Par conséquent, Q est bien le quotient et RC le reste de la division de AC par BC.

COROLLAIRE I. — *Si l'on multiplie A et B par C, leur p. g. c. d. est aussi multiplié par C.*

COROLLAIRE II. — *Si l'on divise A et B par leur p. g. c. d. Δ , on obtient deux polynomes A' et B' premiers entre eux.*

Car si A' et B' admettaient un p. g. c. d. Δ' , le p. g. c. d. de A et B serait $\Delta' \Delta$.

THÉORÈME II. — *Si C divise AB et est premier avec A, il divise B.*

En effet, le p. g. c. d. à C et à A est 1; donc celui de CB et AB est B (corollaire I). Or, C divise CB et aussi AB, par hypothèse; donc il divise leur p. g. c. d., c'est-à-dire B.

THÉORÈME III. — *A et B étant premiers entre eux, si l'on a $\frac{U}{V} \equiv \frac{A}{B}$, on a $U = AQ$, $V = BQ$.*

En effet, on peut écrire $AV = BU$. A divise BU, est premier avec B; donc il divise U; soit $U = AQ$. D'où, etc.

On dit que la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ est *irréductible* : il n'y a pas de fraction identique dont les deux termes aient des degrés moindres.

208. *Plus petit multiple commun.* — Cherchons les multiples communs à A et à B. Si M est l'un d'eux, on a

$$M = A.C = B.D.$$

Divisons par Δ , p. g. c. d. de A et B; on a

$$A'C = B'D.$$

A' divise $B'D$, est premier avec B' ; donc il divise D . Soit $D = A'Q$; M est de la forme $BA'Q = \frac{AB}{\Delta} \cdot Q = AB'Q$. Réciproquement, tout polynôme de cette forme est divisible à la fois par A et B. *Les multiples cherchés sont donc tous les multiples du polynôme $\mu = \frac{AB}{\Delta}$, lequel est appelé plus petit multiple commun, comme ayant le degré minimum.*

THÉORÈME. — *Les quotients de μ par A et B sont premiers entre eux.*

Ce sont, en effet, les quotients de B et A par Δ .

Nous ne dirons rien du p. g. c. d. et du p. p. m. c. de plusieurs polynômes, renvoyant, pour cette question, le lecteur à un traité quelconque d'Arithmétique.

209. IDENTITÉ DE BEZOUT. — THÉORÈME. — *Pour que A et B, de degrés respectifs a et b, soient premiers entre eux, il faut et suffit qu'on puisse trouver deux polynômes U et V, de degrés respectifs inférieurs à b et à a, donnant lieu à l'identité*

$$(31) \quad AU + BV = 1.$$

La condition est évidemment suffisante, car si A et B avaient un diviseur commun, ce diviseur diviserait $AU + BV$, c'est-à-dire 1. On voit même que A et V, U et B, U et V sont nécessairement premiers entre eux. En outre, la restriction sur les degrés de U et V est inutile.

Montrons la réciproque. Autrement dit, nous allons supposer A et B premiers entre eux et nous allons déterminer les polynômes U et V. On y arrive en effectuant les opérations de la recherche du p. g. c. d. de A et de B. Conservant les notations du n° 206, nous désignerons en outre le degré de tout polynôme représenté par une grande lettre par la petite lettre correspondante.

Cela posé, l'identité (28) peut s'écrire

$$(32) \quad R_1 = A - BQ_1 = AU_1 + BV_1,$$

en posant

$$U_1 = 1, \quad V_1 = -Q_1;$$

de sorte que

$$u_1 = 0, \quad v_1 = q_1 = a - b$$

Puis (29) donne de même

$$R_2 = B - R_1 Q_2 = B - (AU_1 + BV_1)Q_2 = AU_2 + BV_2,$$

avec

$$U_2 = -U_1 Q_2, \quad V_2 = 1 - V_1 Q_2;$$

de sorte que

$$u_2 = q_2 = b - r_1, \quad v_2 = v_1 + q_2 = a - b - b - r_1 = a - r_1.$$

En continuant ainsi, il est manifeste qu'on arrivera à mettre n'importe quel reste R_k sous la forme

$$(33) \quad R_k = AU_k + BV_k;$$

et l'on peut induire du résultat trouvé pour $k = 2$ qu'on aura

$$(34) \quad u_k = b - r_{k-1}, \quad v_k = a - r_{k-1}.$$

Raisonnons par récurrence. Admettons que ceci soit vrai jusqu'au reste de rang k et prouvons que cela sera encore vrai pour le reste de rang $k+1$.

Nous avons

$$(35) \quad R_{k+1} = R_k Q_{k+1} + R_{k+1};$$

d'où

$$R_{k+1} = R_{k+1} - R_k Q_{k+1} = AU_{k+1} + BV_{k+1} - (AU_k + BV_k)Q_{k+1} = AU_{k+1} + BV_{k+1},$$

en posant

$$(36) \quad U_{k+1} = U_{k+1} - U_k Q_{k+1}, \quad V_{k+1} = V_{k+1} - V_k Q_{k+1}.$$

Par hypothèse, le degré de U_{k+1} est $b - r_{k-2}$ et celui de $U_k Q_{k+1}$ est $b - r_{k-1} + q_{k+1}$. Or, d'après (35), $r_{k-1} = r_k + q_{k+1}$; donc, le degré de $U_k Q_{k+1}$ est $b - r_{k-1} + (r_{k-1} - r_k) = b - r_k$. Comme les degrés des restes successifs vont en décroissant, $r_k < r_{k-2}$; donc $b - r_k > b - r_{k-2}$. Le degré de U_{k+1} est, par suite, égal à $b - r_k$. On verrait de même que celui de V_{k+1} est égal à $a - r_k$.

Finalement, les formules (33) et (34) sont établies pour tous les restes. Dès lors, si A et B sont premiers entre eux, le dernier reste non nul R_n est constant. Le reste précédent R_{n-1} a un degré au moins égal à 1. Or, on a

$$(37) \quad R_n = AU_n + BV_n; \\ u_n = b - r_{n-1} < b, \quad v_n = a - r_{n-1} = a.$$

En divisant les deux membres de (37) par la constante R_n , on obtient l'identité (31), ou *identité de Bezout*.

Nous venons d'indiquer un moyen de calculer les polynômes U et V . Je dis qu'il n'y en a pas d'autres, en faisant toutefois la restriction

imposée aux degrés u et v . En effet, si l'on avait, outre (31),

$$(38) \quad AU' + BV' = 1,$$

on en déduirait

$$A(U - U') \equiv B(V' - V).$$

A divisant le premier membre et par suite $B(V' - V)$ et étant premier avec B , il devrait diviser $V' - V$ (n° 207); ce qui n'est pas possible, parce que $V' - V$ a un degré inférieur à celui de A .

Si l'on ne s'occupe pas de la restriction des degrés, on doit avoir $V' - V = AQ$; d'où $U - U' = BQ$. Par conséquent, on a tous les polynômes satisfaisant à (38) par les formules

$$(39) \quad U' = U - BQ, \quad V' = V + AQ,$$

où Q désigne un polynome arbitrairement choisi.

210. THÉOREME. — *Pour que A et B aient un diviseur commun de degré n , il faut et il suffit qu'on puisse trouver deux polynômes U et V de degrés respectifs $b - n$ et $a - n$ donnant lieu à l'identité*

$$(40) \quad AU + BV = 0.$$

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, si Q , de degré n , divise A et B , on a

$$A = QA', \quad B = QB';$$

d'où

$$AB' - BA' = 0,$$

identité qui prend la forme (40) si l'on pose $U = B'$, $V = -A'$. De plus, on a bien, pour les degrés, $u = b' = b - n$ et $v = a' = a - n$.

2° *La condition est suffisante.* — En effet, soient Δ le p. g. c. d. de A et B , et A' , B' les quotients $\frac{A}{\Delta}$, $\frac{B}{\Delta}$. Divisant (40) par Δ , il vient

$$A'U + B'V = 0,$$

A' divise $B'V$, est premier avec B' ; donc il divise V . Par suite,

$$a' \geq v = a - n.$$

Or, $a' = a - \delta$; donc $\delta \geq n$. Dès lors, on aura un diviseur commun de degré n en faisant le produit de n des δ facteurs linéaires en lesquels on peut décomposer Δ .

CHAPITRE XVII.

FRACTIONS RATIONNELLES.

---

211. Ainsi que nous l'avons déjà vu (n° 75), on appelle *fraction rationnelle* le rapport de deux polynômes, le mot polynôme étant employé cette fois au sens étendu du Chapitre précédent. *Nous supposerons toujours la fraction irréductible* (n° 207), ce à quoi on peut toujours se ramener par une recherche de p. g. c. d. On appelle *pôles* de la fraction les zéros du dénominateur; *l'ordre de multiplicité d'un pôle* est l'ordre de multiplicité qui lui est affecté à titre de zéro du dénominateur (n° 203).

212. **Développements limités d'une fraction rationnelle.** — Nous allons nous proposer de représenter approximativement une fraction rationnelle par un polynôme, pour les valeurs de x voisines d'une valeur donnée x_0 , y compris l'infini.

Soit d'abord à étudier la fraction $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ pour les valeurs de x voisines de zéro, en supposant $g(0) \neq 0$. Il nous faut chercher un *développement limité de y suivant les puissances croissantes de x* . Conformément à la méthode générale indiquée au n° 117, nous divisons f par g suivant les puissances croissantes de x . Comme la fraction est irréductible, la division ne peut se terminer et peut être poussée aussi loin qu'on le désire, ce qui donne (n° 202)

$$(1) \quad f(x) = g(x) Q(x) + x^{k+1} R;$$

d'où

$$(2) \quad y = Q(x) + x^{k+1} \frac{R}{g(x)};$$

$Q(x)$ désignant un polynôme de degré $\leq k$. Comme la fraction $\frac{R}{g(x)}$ reste finie quand x tend vers zéro, puisque $g(0) \neq 0$, la formule (2)

constitue un développement d'ordre λ de y ⁽¹⁾; cet ordre pouvant d'ailleurs être rendu aussi grand qu'on le veut.

Supposons maintenant que zéro soit un pôle d'ordre α . Nous avons

$$g(x) = x^\alpha g_1(x), \quad [g_1(0) \neq 0];$$

d'où

$$y = \frac{1}{x^\alpha} \frac{f(x)}{g_1(x)}.$$

Calculons, comme il vient d'être expliqué, le développement d'ordre λ de $\frac{f}{g_1}$, soit

$$\frac{f}{g_1} = a_0 + a_1 x + \dots + a_\lambda x^\lambda + \varphi x^{\lambda+1} \quad \left(\varphi = \frac{R}{g_1} \right);$$

d'où

$$(3) \quad y = a_0 x^{-\alpha} + a_1 x^{1-\alpha} + \dots + a_\lambda x^{\lambda-\alpha} + \varphi x^{\lambda+1-\alpha}.$$

Nous obtenons un développement commençant par des puissances négatives (n° 112). Nous avons vu d'ailleurs qu'on ne pouvait obtenir d'autres développements de même forme, en ce sens que l'exposant du premier terme doit toujours être $-\alpha$ et que, pour un ordre donné, tous les coefficients sont déterminés d'une manière unique. En particulier, le développement d'ordre -1 est obtenu pour $\lambda = \alpha - 1$, ce qui donne

$$(4) \quad y = \frac{a_0}{x^\alpha} + \frac{a_1}{x^{\alpha-1}} + \dots + \frac{a_{\alpha-1}}{x} + \varphi = P\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi.$$

Nous obtenons ainsi le seul polynôme en $\frac{1}{x}$ qui ne possède pas de terme constant et dont la différence avec y reste finie pour $x = 0$.

213. Si l'on veut étudier y au voisinage d'une valeur $x_0 \neq 0$,

(1) Il arrive quelquefois qu'on peut trouver une loi simple de formation des termes successifs du quotient et des restes partiels successifs. Si l'on peut alors prouver que le terme complémentaire $x^{\lambda+1} \frac{R}{g}$ tend vers zéro pour λ infini et pour certaines valeurs de x , on obtient un développement de y en série entière. Mais cette méthode est, en général, beaucoup moins pratique que celle du n° 107, précisément parce qu'on ne peut découvrir l'expression du terme général du quotient.

il suffit de poser $x - x_0 = z$. La fraction devient

$$(5) \quad y = \frac{f(x_0 + z)}{g(x_0 + z)} = \frac{F(z)}{G(z)},$$

c'est-à-dire une fraction rationnelle en z à laquelle on peut appliquer tout ce qui précède. En particulier, prenons pour x_0 le pôle a d'ordre α . En appliquant à (5) la formule (4), nous obtenons

$$(6) \quad y = \frac{a_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{a_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{a_{\alpha-1}}{x-a} + \rho = P_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + \rho.$$

On dit qu'on a *séparé de y la partie* $P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ *qui devient infinie pour* $x = a$, *partie d'ailleurs unique, d'après ce qu'on a vu. Le coefficient* $a_{\alpha-1}$ *du terme en* $\frac{1}{x-a}$ *s'appelle le* **résidu relatif au pôle** a .

Si enfin nous voulons étudier y pour les grandes valeurs de x , nous posons $\frac{1}{x} = z$ *et nous sommes ramenés à l'étude d'une fraction rationnelle en* z *au voisinage de* $z = 0$. Le développement (3) appliqué à cette dernière nous donne, en revenant à la variable x ,

$$(7) \quad y = a_0 x^\alpha + a_1 x^{\alpha-1} + \dots + a_\lambda x^{\alpha-\lambda} + \rho x^{\alpha-\lambda-1}.$$

Il est aisé de voir que α est égal au degré de f moins le degré de g . Lorsque $\alpha > 0$, on peut prendre $\lambda = \alpha$; l'identité (7) n'est alors autre chose que l'identité de la division de f par g suivant les puissances décroissantes de x . On pourrait s'en rendre compte d'après la manière même dont a été calculé le développement. On peut aussi le prouver par le raisonnement suivant :

Divisons f par g suivant les puissances décroissantes de x : nous avons

$$f = gQ + R;$$

d'où

$$(8) \quad y = Q + \frac{R}{g} = Q + \frac{\rho}{x},$$

en posant

$$(9) \quad \rho = -\frac{Rx}{g}.$$

Or, R étant de degré inférieur à celui de g , Rx est de degré au plus égal à ce dernier : donc ρ reste fini pour x infini. La formule (8)

nous donne donc un développement d'ordre zéro; comme il en est de même de (7) pour $\lambda = z$, les deux développements sont identiques.

Le quotient Q s'appelle *la partie entière de la fraction*. Nous la représenterons par $E(x)$. Elle est caractérisée, d'après (7), par le fait que la différence $y - E(x)$ tend vers zéro pour $x = \infty$. Elle est nulle toutes les fois que le degré du dénominateur surpasse celui du numérateur.

Lorsque z est négatif, ou lorsqu'on veut pousser le développement (7) jusqu'aux puissances négatives, on peut procéder encore par voie de division suivant les puissances décroissantes, en utilisant l'extension dont nous avons dit un mot à la fin du n° 201. Mais, ainsi que nous l'avons fait remarquer à cet endroit, cela équivaut à faire le changement $x = \frac{1}{z}$, pour appliquer ensuite la méthode suivant les puissances croissantes, qui est la seule à laquelle nous conseillons au lecteur de toujours revenir.

214. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

— Soient $a, b, \dots, l$ les pôles de y ; $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ leurs ordres de multiplicité; $P_a\left(\frac{1}{x-a}\right), P_b\left(\frac{1}{x-b}\right), \dots, P_l\left(\frac{1}{x-l}\right)$ les parties infinies correspondantes. Soit enfin $E(x)$ la partie entière. Je dis qu'on a identiquement

$$(10) \quad y = P_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + P_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \dots + P_l\left(\frac{1}{x-l}\right) + E(x).$$

Pour le prouver, nous observons d'abord que la différence δ des deux membres est une fraction rationnelle qui reste finie quel que soit x . Cela est évident tant que x est différent de $a, b, \dots, l$. Si maintenant on suppose que x tende vers a , par exemple, on peut affirmer que δ reste encore finie, car il en est ainsi de $y - P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ et de chacun des termes restants

$$P_b\left(\frac{1}{x-b}\right), \dots, P_l\left(\frac{1}{x-l}\right), \quad E(x).$$

On conclut de là que δ ne saurait admettre aucun pôle et, par suite, ne peut que se réduire à un polynôme. Mais si l'on suppose que x croisse indéfiniment, δ tend vers zéro, car il en est ainsi de $y - E(x)$ et de chacun des termes $P_a\left(\frac{1}{x-a}\right), P_b\left(\frac{1}{x-b}\right), \dots, P_l\left(\frac{1}{x-l}\right)$. Donc δ est identiquement nul (n° 200).

Mettre y sous la forme (16), c'est ce qu'on appelle *décomposer la fraction en éléments simples*. Ces éléments simples ont pour forme générale $\frac{\Lambda}{(x-a)^n}$ ou Λx^n .

Une telle décomposition est unique, puisque nous avons vu précédemment qu'il en était ainsi pour chacune des parties $P_a, P_b, \dots, E$.

215. Méthodes de décomposition. — Pour effectuer la décomposition, on peut calculer séparément chacune des parties $P_a, P_b, \dots, P_l, E(x)$, en suivant la marche indiquée précédemment. Il convient néanmoins d'observer les simplifications suivantes :

Rappelons que pour calculer P_a , par exemple, on pose $x - a = z$. Puis on divise $f(a + z)$ par $g_1(a + z)$ ⁽¹⁾ suivant les puissances croissantes de z , en poussant la division jusqu'au moment où l'on va faire apparaître au quotient une puissance de z égale ou supérieure à 1. Le quotient obtenu donne, en revenant à la variable x et divisant par $(x - a)^2$, la partie $P_a(\frac{1}{x-a})$. Le reste R , calculé également en fonction de x et divisé par $g(x)$, donne la différence $y_1 = y - P_a = P_b + \dots + P_l + E(x)$.

Pour calculer ensuite P_b , on applique la même méthode à y_1 et l'on obtient, du même coup, la différence $y_2 = y_1 - P_b$; d'où l'on extrait P_c ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les pôles. Le reste final, s'il existe, est la partie entière $E(x)$, laquelle peut aussi se calculer directement à un moment quelconque, en appliquant la méthode de la division suivant les puissances décroissantes à l'une des fractions rationnelles y, y_1, y_2 , etc.

Il est manifeste que ce procédé est plus avantageux que celui qui consisterait à calculer séparément $P_a, P_b, \dots, E$, en partant toujours de y , car les fractions sur lesquelles on opère sont, de la sorte, de plus en plus simples. Néanmoins, cet avantage est compensé par le fait qu'on est alors obligé, dans les divisions successives, de calculer les restes partiels en entier; tandis que si, dans le calcul de P_a par exemple, on n'a pas à se préoccuper d'obtenir du même coup le reste y_1 , il suffit de faire la division de $f(a + z)$ par $g_1(a + z)$ en se limitant aux puissances de z d'exposant plus petit que 2, puisque seules ces puissances interviennent dans la détermination de P_a .

(1) $g_1(x)$ est le quotient de $g(x)$ par $(x - a)^2$.

Une autre méthode, assez pratique pour des fractions qui ne sont pas trop compliquées, est celle des *coefficients indéterminés*. Elle consiste à écrire *a priori* la forme (10) de la décomposition, à chasser les dénominateurs et à identifier les deux membres. On obtient ainsi des équations linéaires qui permettent de calculer les coefficients inconnus introduits au second membre. D'après ce qui précède, on est toujours certain d'arriver à un système compatible et à solution unique.

216. Cas des pôles simples. — Si le pôle a est simple, on peut avoir immédiatement le résidu Λ correspondant de la manière suivante. Soit

$$y = \frac{f(x)}{(x-a)g_1(x)} = \frac{\Lambda}{x-a} + y_1.$$

Multiplions les deux membres par $x-a$ et faisons ensuite $x=a$. Comme y_1 reste fini pour $x=a$, on obtient

$$(11) \quad \Lambda = \frac{f(a)}{g_1(a)}.$$

Cette méthode s'applique d'ailleurs toujours pour le calcul du coefficient de $\frac{1}{(x-a)^2}$; mais on multiplie alors par $(x-a)^2$.

Formule d'interpolation de Lagrange. — Supposons tous les pôles simples. On a alors la formule

$$(12) \quad y = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)\dots(x-l)} \\ = \frac{f(a)}{(a-b)\dots(a-l)} \frac{1}{x-a} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)} \frac{1}{x-b} + \dots \\ + \frac{f(l)}{(l-a)\dots(l-h)} \frac{1}{x-l} + E(x),$$

ce que l'on peut écrire, en posant $g(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$, et remarquant l'égalité $g'(a) = (a-b)\dots(a-l)$ et les égalités analogues (1),

$$(13) \quad f(x) = \frac{f(a)}{g'(a)} g(x) + \frac{f(b)}{g'(b)} g(x) + \dots + \frac{f(l)}{g'(l)} g(x) + E(x)g(x),$$

(1) On a, en effet, $g'(x) = (x-a)g_1'(x)$; d'où

$$g'(x) = g_1'(x) + (x-a)g_1''(x), \quad g'(a) = g_1'(a).$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule d'interpolation de Lagrange*. Elle donne le polynôme le plus général qui prend des valeurs données $f(a), f(b), \dots, f(l)$ pour $x = a, b, \dots, l$; il suffit, pour l'obtenir, de prendre pour $E(x)$ un polynôme quelconque. Si l'on veut que $f(x)$ soit de degré $m-1$, en appelant m le nombre des valeurs distinctes $a, b, \dots, l$, il faut prendre $E(x) = 0$ et le polynôme est entièrement déterminé ⁽¹⁾.

217. Décompositions réelles. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé avoir affaire à des polynômes à coefficients et à variable complexes quelconques et nous n'avons fait aucune distinction entre les quantités réelles et les quantités imaginaires. Nous allons maintenant nous placer à un point de vue plus particulier, en considérant une fraction rationnelle à coefficients tous réels et à variable réelle.

Imaginons qu'on ait effectué la décomposition en éléments simples telle que l'indique la formule (10). Le premier membre étant réel, il doit en être de même du second. Cependant, il peut très bien arriver que certains des pôles soient imaginaires, ce qui introduit nécessairement des termes complexes dans la décomposition. La somme de ces termes doit être, *a priori*, réelle.

Effectivement, on sait (n° 249) qu'à toute racine $a = x + \zeta i$ du polynôme réel $g(x)$ correspond la racine imaginaire conjuguée $b = x - \zeta i$, avec le même ordre de multiplicité. Si l'on se reporte maintenant aux calculs de $P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ et de $P_b\left(\frac{1}{x-b}\right)$, il est manifeste que le second se déduit du premier par le simple changement de i en $-i$. D'où il suit que P_b doit se déduire de P_a par le même changement. Autrement dit, à tout terme de P_a de la forme $\frac{A + Bi}{(x - x - \zeta i)^n}$ doit correspondre dans P_b le terme $\frac{A - Bi}{(x - x + \zeta i)^n}$. Ces deux éléments étant imaginaires conjugués, leur somme doit être réelle. En effectuant cette somme, on obtient une expression de la forme

$$(11) \quad \frac{(A + Bi)(x - x + \zeta i)^n + (A - Bi)(x - x - \zeta i)^n}{[(x - x)^2 + \zeta^2]^n} = \frac{\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^n},$$

$\varphi(x)$ désignant un polynôme à coefficients réels et $x^2 + px + q$ un trinôme réel à racines imaginaires.

Cette expression peut être décomposée maintenant en éléments

⁽¹⁾ Cf., au sujet du problème de l'interpolation, *Leçons*, t. I, p. 183.

réels plus simples. En effet, posons $x^2 + px + q = z$; d'où $x^2 = z - px - q$. Si l'on remplace, dans $z(x)$, x^2 par $z - px - q$ autant de fois que cela est possible, il est clair qu'on obtient un résultat de la forme $Px + Q$, P et Q désignant deux polynômes en z (1). En portant dans (14), on obtient une somme de termes tels que $\frac{\lambda x}{z^q}$ et $\frac{\mu}{z^q}$; λ et μ étant deux constantes réelles et q un nombre naturel $\leq n$. Finalement, on arrive à la décomposition réelle suivante :

Groupons, dans la décomposition de $z(x)$ en facteurs linéaires, les facteurs imaginaires conjugués. Nous avons une identité de la forme

$$(15) \quad z(x) \equiv (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots \\ \times (x-l)^\lambda (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} (x^2+p_2x+q_2)^{n_2} \dots (x^2+p_hx+q_h)^{n_h},$$

les nombres $a, b, \dots, l$ étant tous réels et les trinômes $x^2 + px + q$ ayant leurs coefficients réels et leurs racines imaginaires.

Cela posé, on peut décomposer y en une somme comprenant d'abord les polynômes $P_a, P_b, \dots, P_l$ qui correspondent aux pôles réels, ensuite des termes de la forme

$$(16) \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + p_ix + q_i)^s},$$

A et B représentant des constantes réelles et s un nombre naturel n_i , et enfin, s'il y a lieu, une partie entière $E(x)$.

On pourrait montrer, d'après ce qui précède, qu'une telle décomposition en éléments simples réels n'est possible que d'une seule manière. Mais cela ne présente pas grand intérêt et se vérifie d'ailleurs sur chaque exemple particulier (2).

(1) Il est à remarquer que $Px + Q$ est le reste de la division de $z(x)$ par $x^2 + px + q = z$. En effet, ce reste est de la forme $P'x + Q'$, P' et Q' désignant des polynômes en z . On a, quels que soient x et z ,

$$z(x) = (x^2 + px + q - z) \psi(x, z) + P'x + Q'.$$

Si l'on remplace x^2 par $z - px - q$, il vient

$$P'x + Q' = P'x + Q'.$$

C'est-à-dire qu'on obtient une seule solution, par la méthode des coefficients indéterminés, par exemple.

Pour l'effectuer, *on peut d'abord séparer les parties* $P_a, P_b, \dots, P_l, E(x)$. On est ramené ensuite à une fraction rationnelle sans pôles réels et sans partie entière, qu'il s'agit de mettre sous la forme d'une somme de termes tels que (16). A cet effet, on peut employer la méthode des *coefficients indéterminés*, qu'on applique comme au n° 215, et qu'on peut aussi utiliser pour obtenir du même coup toute la décomposition, en partant directement de la fraction rationnelle donnée.

218. On peut aussi, et dans certains cas c'est plus rapide, procéder de la manière suivante :

Soit à extraire les termes en $\frac{1}{x^2 + px + q}$ de la fraction rationnelle

$$(17) \quad \mathcal{F} = \frac{f(x)}{(x^2 + px + q)^a \varphi(x)}.$$

Posons $x^2 + px + q = z$. En remplaçant x^2 par $z - px - q$, ou mieux en divisant par $x^2 + px + q = z$, nous pouvons mettre $\mathcal{F}$ sous la forme

$$(18) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{z^a} \frac{Ax + B}{Cx + D},$$

A, B, C, D désignant des polynômes en z . Puis nous écrivons

$$(19) \quad \frac{Ax + B}{Cx + D} = \frac{Ax^2 + Bx}{Cx^2 + Dx} = \frac{A'x + B'}{C'x + D'} \\ = \frac{C'(Ax + B) - C(A'x + B')}{DC' - CD'} = \frac{A''x + B''}{D''} \quad (1),$$

Divisons $A''x + B''$ par D'' suivant les puissances croissantes de z , jusqu'au reste en z^a . Nous obtenons une identité de la forme

$$(20) \quad \frac{A''x + B''}{D''} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + \frac{z^n R}{D''},$$

(1) On a $A'x + B' = Ax + B$, $C'x + D' = Cx + D$, $A'' = C(A' - A'C) = AD - BC$, qui ne saurait être nul si $\mathcal{F}$ ne se réduit pas à une fonction de z . Donc, la transformation effectuée ne peut être illusoire.

On peut aussi écrire, en remarquant que $(x + \frac{p}{2})^2 = z + \frac{p^2}{4} - q$,

$$\frac{Ax + B}{Cx + D} = \frac{Ax + B}{C(x + \frac{p}{2}) + D} = \frac{(Ax + B) \left[C(x + \frac{p}{2}) - D \right]}{C^2(z + \frac{p^2}{4} - q) - D^2} = \frac{A'x + B'}{D''}.$$

les a étant des binômes du premier degré en x , R étant un polynôme en x et z . Portons dans (18) :

$$(21) \quad Y = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + Y_1,$$

Y_1 désignant une fraction rationnelle en x , dont le dénominateur n'est plus divisible par z .

On a ainsi extrait la partie de la décomposition relative au trinôme $x^2 - px + q$.

Si l'on ne tient pas à avoir Y_1 (ce qui arrive, par exemple, si l'on veut extraire les différentes parties de la décomposition en partant directement de Y), *on peut simplifier les calculs, en négligeant partout les termes en z de degré $\geq n$, qui n'influent pas sur le quotient (20)*. En particulier, si $n = 1$, on néglige tous les termes en z .

CHAPITRE XVIII.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES.

I

219. Soit un polynôme quelconque $f(z)$ à coefficients et à variable complexes.

Nous avons précédemment défini d'une manière précise (n° 199) ce qu'on entend par zéros ou racines de ce polynôme. Rechercher ces zéros ou racines, c'est ce qu'on appelle *résoudre l'équation*

$$(1) \quad f(z) = 0.$$

Si m est le degré du polynôme, l'équation est dite *algébrique et du $m^{\text{ième}}$ degré*. Les zéros de $f(z)$ sont aussi nommés les *racines de l'équation*. L'ordre de multiplicité conserve la même signification qu'au n° 205.

THÉORÈME. — *Toute équation algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré possède m racines.*

Ce théorème a été démontré au n° 205. Rappelons que chaque racine doit être comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

220. **Relations entre les coefficients et les racines.** — Soit l'équation

$$(2) \quad f(x) \equiv \Lambda_0 x^m + \Lambda_1 x^{m-1} + \dots + \Lambda_p x^{m-p} + \dots + \Lambda_m = 0.$$

Appelons $x_1, x_2, \dots, x_m$ ses m racines, chaque racine multiple étant répétée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Nous avons (n° 205)

$$f(x) \equiv \Lambda_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m),$$

Développons le produit, en nous reportant au n° 25. Si l'on désigne, d'une manière générale, par s_p la somme des produits p à p des m racines $x_1, x_2, \dots, x_m$, on a

$$(3) \quad f(x) = \Lambda_0 [x^m - s_1 x^{m-1} + s_2 x^{m-2} - \dots + (-1)^p s_p x^{m-p} + \dots + (-1)^m s_m].$$

Les polynômes (2) et (3) devant être identiques, on a nécessairement

$$\Lambda_1 = -\Lambda_0 s_1, \quad \Lambda_2 = \Lambda_0 s_2, \quad \dots, \quad \Lambda_p = (-1)^p \Lambda_0 s_p, \quad \dots, \quad \Lambda_m = (-1)^m \Lambda_0 s_m;$$

d'où l'on tire

$$(4) \quad s_1 = -\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}, \quad s_2 = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_0}, \quad \dots, \quad s_p = (-1)^p \frac{\Lambda_p}{\Lambda_0}, \quad \dots, \quad s_m = (-1)^m \frac{\Lambda_m}{\Lambda_0}.$$

Ces relations jouent un rôle *très important* dans la théorie des équations et sont connues sous le nom de *relations entre les coefficients et les racines*. Leurs premiers membres $s_1, s_2, \dots, s_m$ sont appelés les *fonctions symétriques élémentaires* des m nombres $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Le système (4) est équivalent au suivant :

$$(5) \quad f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = 0, \quad \dots, \quad f(x_m) = 0,$$

et le remplace avantageusement comme ayant une forme beaucoup plus simple (1). Une application classique de cette remarque est la suivante :

PROBLÈME. — *Exprimer que les racines d'une équation algébrique, dont les coefficients renferment des paramètres arbitraires, satisfont à une ou plusieurs relations données.*

(1) C'est ainsi que chaque équation (4) est linéaire par rapport à chacune des inconnues $x_1, x_2, \dots, x_m$. Faisons à ce propos la remarque suivante :

Dans certaines questions, il y a lieu de faire jouer un rôle particulier à certaines des racines, soit $x_1, x_2, \dots, x_p$. Il peut être alors avantageux d'exprimer $s_1, s_2, \dots, s_m$ au moyen des fonctions symétriques élémentaires relatives à $x_1, x_2, \dots, x_p$, d'une part, et à $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_m$, d'autre part; ce qui se fait toujours par un calcul simple, du moins tant que m et p ne sont pas très grands. Nous aurons l'occasion d'indiquer, dans la suite, quelques exemples. Pour l'instant, bornons-nous à donner les formules suivantes, que le lecteur vérifiera sans difficulté. Prenons $p = m-1$; on a

$$s_1 = \tau_1 + x_m, \quad s_2 = \tau_2 + x_m \tau_1, \quad \dots, \quad s_q = \tau_q + x_m \tau_{q-1}, \quad \dots, \quad s_m = \tau_m + x_m \tau_{m-1},$$

en appelant $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}$ les fonctions relatives à $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$.

Il suffit d'éliminer $x_1, x_2, \dots, x_m$ entre ces relations données et les relations (4). Bien entendu, on peut, si l'on veut, remplacer une ou plusieurs de celles-ci par un nombre égal d'équations choisies dans le système (5). Mais, cela est rarement avantageux.

Lorsque les coefficients vérifient les conditions requises, il arrive souvent qu'on peut résoudre l'équation, en tenant compte des relations imposées aux racines, ou tout au moins la ramener à la résolution d'une ou plusieurs équations de degré moindre. Le lecteur se rendra compte de la manière dont on procède d'après les exercices relatifs à ce Chapitre.

II. — FONCTIONS SYMÉTRIQUES DES RACINES.

221. Une fonction $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ des m variables, $x_1, x_2, \dots, x_m$ est dite *symétrique* si elle ne change pas de valeur lorsqu'on y permute les variables d'une manière quelconque. Telles sont, par exemple, les fonctions symétriques élémentaires mentionnées plus haut.

Supposons que, dans une telle fonction, *on remplace les variables par les m racines $a, b, c, \dots, l$ d'une équation algébrique donnée, de degré m* . La valeur numérique qu'on obtient est indépendante de l'ordre dans lequel on prend les racines pour faire la substitution. Elle ne dépend, en quelque sorte, que du groupe formé par ces dernières, ou, ce qui revient au même, des coefficients de l'équation. Il est donc naturel de songer *qu'on doit pouvoir la calculer sans être obligé de résoudre l'équation* ⁽¹⁾. C'est précisément ce que nous nous proposons d'établir dans le cas, du moins, où la fonction F est rationnelle.

222. **Fonctions symétriques rationnelles.** — Nous allons d'abord montrer comment on peut, de proche en proche, ramener toute fonction symétrique rationnelle à des fonctions symétriques de plus en plus simples.

⁽¹⁾ Il n'en serait, au contraire, pas de même si la fonction F n'était pas symétrique, car chaque racine jouerait alors un rôle qui lui serait propre. Il peut cependant y avoir des restrictions à apporter à cette affirmation ; mais nous ne pouvons en parler ici.

THÉORÈME I. — *Toute fonction symétrique rationnelle se ramène au quotient de deux fonctions symétriques entières.*

Soit, en effet, la fonction

$$(6) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{g(x_1, x_2, \dots, x_m)},$$

où f et g désignent deux polynômes. Si l'un d'eux est symétrique, l'autre l'est nécessairement aussi et le théorème est démontré. Sinon, la permutation de deux des variables, par exemple de x_1 et x_2 , doit changer f et g , sans toutefois changer leur quotient. On a donc

$$\begin{aligned} F &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{g(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \frac{f(x_2, x_1, \dots, x_m)}{g(x_2, x_1, \dots, x_m)} \\ &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(x_2, x_1, \dots, x_m)}{g(x_1, x_2, \dots, x_m) - g(x_2, x_1, \dots, x_m)}. \end{aligned}$$

Mais, les deux termes de la dernière fraction s'annulent identiquement pour $x_1 = x_2$ et sont par suite divisibles par $x_1 - x_2$ (n° 203). La suppression de ce facteur commun simplifie la fraction F . En recommençant la même opération autant de fois que cela est nécessaire, on obtient haut et bas des polynômes de degrés décroissants, qui finissent forcément par devenir symétriques, car, en mettant les choses au pis, l'un d'eux finit par se réduire à une constante, l'autre étant alors nécessairement symétrique.

THÉORÈME II. — *Tout polynôme symétrique est une somme de groupes homogènes.*

Nous appelons ainsi tout groupe dont les différents termes sont obtenus en remplaçant les p variables de l'un d'eux par tous les arrangements p à p des m lettres $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Cela posé, prenons dans le polynôme symétrique $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ un terme quelconque $Ax_1^{z_1}x_2^{z_2}\dots x_p^{z_p}$ ($p < m$). Si nous y remplaçons $x_1, x_2, \dots, x_p$ successivement par tous les arrangements dont il vient d'être question, nous obtenons des termes qui doivent tous se trouver dans f . Leur ensemble constitue d'ailleurs un groupe homogène de la nature précédemment définie. Si f renferme encore d'autres termes, nous prendrons un quelconque d'entre eux et nous en déduirons un nouveau groupe nécessairement contenu dans f . En continuant

de la sorte, on arrivera à épuiser tous les termes et le théorème sera démontré.

223. Calcul des groupes homogènes. — Voyons maintenant comment on peut calculer la valeur que prend un groupe homogène quand on y remplace $x_1, x_2, \dots, x_m$ par les racines $a, b, \dots, l$ de l'équation (2).

Un tel groupe se représente par le symbole

$$(7) \quad \Sigma a^{\alpha} b^{\beta} \dots e^{\varepsilon},$$

sur lequel il convient d'apporter quelques éclaircissements. Les nombres $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ sont des entiers quelconques qu'on aurait le droit de supposer tous positifs, mais pour lesquelles il n'y a pas d'inconvénient d'accepter des valeurs négatives. Les lettres $a, b, \dots, e$ qui figurent dans un terme constituent un arrangement quelconque des m racines $a, b, c, \dots, l$. Leur nombre, au plus égal à m , est dit *l'ordre du groupe*. Si les exposants $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ sont tous différents, il est évident que deux arrangements distincts donnent toujours deux termes distincts. Mais, il n'en va plus de même *lorsque deux ou plusieurs de ces exposants sont égaux*. Par exemple, si $\alpha = \beta$, les arrangements a, b, c, d, e et b, a, c, d, e donnent le même terme. De même, si $\alpha = \beta = \gamma$, les six arrangements déduits de a, b, c, d, e par permutation des lettres a, b, c donnent le même terme.

Toute *fonction symétrique simple*, ou groupe du premier ordre, est de la forme $\Sigma a^{\alpha} = a^{\alpha} + b^{\alpha} + \dots + l^{\alpha}$. C'est une somme de puissances semblables des racines de l'équation. Nous la désignerons par la notation S_{α} . L'exposant α est un entier quelconque positif, négatif ou nul. Dans ce dernier cas, on a

$$S_0 = a^0 + b^0 + \dots + l^0 = 1 + 1 + \dots + 1 = m.$$

THÉORÈME. — *Tout groupe homogène peut se calculer au moyen des fonctions symétriques simples.*

En effet, soit d'abord une *fonction symétrique double* $\Sigma \alpha^{\alpha} \beta^{\beta}$. On a

$$(8) \quad S_{\alpha} S_{\beta} = (a^{\alpha} + b^{\alpha} + c^{\alpha} + \dots + l^{\alpha})(a^{\beta} + b^{\beta} + c^{\beta} + \dots + l^{\beta}).$$

Pour effectuer ce produit, nous devons associer de toutes les

manières possibles un terme du premier facteur avec un terme du second facteur. Si nous associons deux termes de même rang, nous obtenons des produits partiels de la forme $a^x, a^\beta = a^{x+\beta}$, dont la somme est $S_{x+\beta}$. Si nous associons deux termes de rangs différents, nous obtenons des produits partiels de la forme $a^x b^\beta$, (a, b) constituant un quelconque des arrangements deux à deux des m lettres $a, b, \dots, l$. Si $x \neq \beta$, la somme de ces produits partiels est donc $\Sigma a^x b^\beta$. Si $x = \beta$, elle est égale à $2 \Sigma a^x b^x$, conformément à une remarque faite plus haut. On a donc, suivant le cas,

$$(9) \quad S_x S_\beta = S_{x+\beta} + \Sigma a^x b^\beta \quad (x \neq \beta);$$

$$(10) \quad (S_x)^2 = S_{2x} + 2 \Sigma a^x b^x;$$

d'où l'on peut toujours tirer le groupe cherché en fonction de fonctions symétriques simples.

Soit maintenant la *fonction symétrique triple* $\Sigma a^x b^\beta c^\gamma$. On peut l'introduire par la multiplication

$$(11) \quad (\Sigma a^x b^\beta) S_\gamma = (a^x b^\beta \dots) (a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma + \dots).$$

En multipliant le premier terme $a^x b^\beta$ du premier facteur successivement par $a^\gamma, b^\gamma, c^\gamma$, on obtient les trois espèces de termes

$$(12) \quad a^{x+\gamma} b^\beta, \quad a^x b^{\beta+\gamma}, \quad a^x b^\beta c^\gamma.$$

Comptons *combien de fois chacun d'eux est obtenu dans la multiplication*. Le premier est obtenu une seule fois si $\beta \neq x + \gamma$. Il est obtenu deux fois si $\beta = x + \gamma$, la deuxième fois étant fournie par le produit de $a^\beta b^x$ par b^γ . Conclusions analogues pour le deuxième terme. Quant au troisième, il est obtenu une fois si γ n'est égal ni à x , ni à β ; deux fois si $\gamma = x$ ou β (par exemple, si $\gamma = x$, on a $a^x b^\beta \times c^x$ et $c^x b^\beta \times a^x$); trois fois si $x = \beta = \gamma$ ($a^x b^x \times c^x, a^x c^x \times b^x, b^x c^x \times a^x$). Observons enfin que les deux premiers termes ne donnent naissance à des groupes distincts que si $x \neq \beta$; sinon, ils donnent deux fois le même groupe.

Dans tous les cas, en développant le produit, on obtient toujours une égalité d'où l'on peut tirer $\Sigma a^x b^\beta c^\gamma$ en fonction de fonctions symétriques simples et doubles et, par suite, d'après le cas précédent, en fonction de fonctions symétriques simples.

On serait arrivé à un résultat analogue en effectuant l'un des produits $\Sigma a^x b^\gamma, \Sigma a^\beta b^\gamma, S_x, S_x, S_\beta, S_\beta, S_\gamma$.

Pour les groupes d'ordre supérieur, on suit une marche analogue, sur laquelle il est inutile d'insister davantage.

Remarques. — I. Dans le calcul du produit qui doit introduire la fonction symétrique cherchée, il faut prendre beaucoup de précautions et compter exactement combien de fois chaque terme se reproduit dans la multiplication. Pour être sûr de ne pas se tromper, il vaut mieux écrire tout au long les deux facteurs du produit à développer, tout au moins tant qu'ils n'ont pas une longueur trop considérable.

II. Dès que l'ordre dépasse 2, il y a, comme on l'a vu, plusieurs manières de procéder. On doit, avant de commencer tout calcul, tâcher de se rendre compte de celle qui sera la plus simple.

III. Il y a quelquefois d'autres façons plus avantageuses de faire apparaître la fonction symétrique cherchée. Elles consistent à multiplier, par des facteurs symétriques convenables, une ou plusieurs des fonctions symétriques élémentaires, lesquelles se calculent immédiatement par les formules (4). Un cas très simple est, par exemple, celui des groupes d'ordre m , dont chaque terme $a^2 b^3 \dots$ $\&c$ renferme toutes les racines. Si p désigne le plus petit des exposants $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, on peut mettre en facteur dans le groupe le produit $a^p b^p \dots l^p = (s_m)^p$. Il reste alors à calculer une fonction symétrique évidemment moins compliquée que la proposée. On peut même appliquer cette remarque dans le cas d'un groupe d'ordre $< m$, quitte à introduire des exposants négatifs.

224. Calcul des fonctions symétriques simples. — Arrivons enfin au calcul des fonctions symétriques simples, qui, lui, doit se faire directement. Il existe, à cet effet, différentes méthodes; nous n'en indiquerons qu'une.

Formules de Newton. — Elle repose sur l'artifice suivant : partons de l'identité (n° 205)

$$f(x) = \lambda_0(x-a)(x-b)\dots(x-l).$$

Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres et multiplions par $f(x)$

$$(13) \quad f(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \dots + \frac{f(x)}{x-l}.$$

Telle est la *formule qui complète les formules de Newton*. Si l'on y fait successivement $\mu = 0, 1, 2, \dots$, on en tire $S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, \dots$, en fonction des sommes d'indices moindres ⁽¹⁾. Si l'on fait $\mu = -1, -2, \dots$, on obtient $S_{-1}, S_{-2}, \dots$, en fonction des sommes d'indices supérieurs.

225. Théorèmes généraux. — THÉORÈME I. — *Toute fonction symétrique rationnelle des racines d'une équation algébrique s'exprime rationnellement en fonction des coefficients de cette équation.*

Cela résulte manifestement de la méthode de calcul que nous venons de développer et qui ne nous a conduits qu'à des opérations rationnelles.

THÉORÈME II. — *Tout polynôme symétrique en $a, b, \dots, l$ peut se mettre sous la forme d'un polynôme en $s_1, s_2, \dots, s_m$, dont le degré est égal au plus fort exposant avec lequel chaque racine figure dans le polynôme proposé.*

Soit le polynôme symétrique $F(a, b, \dots, l)$. Si, dans les formules (14) et (15), on remplace, comme on en a le droit grâce à (4), Λ_0 par 1, Λ_1 par $-s_1$, Λ_2 par s_2 , ..., Λ_m par $(-1)^m s_m$, on voit que toutes les sommes $S_1, S_2, S_3, \dots$ sont des polynômes en $s_1, s_2, \dots, s_m$. D'autre part, les opérations décrites aux n^{os} 222 et 223 ne comportent que des opérations entières (additions et multiplications). Donc F peut s'exprimer sous forme entière au moyen de $s_1, s_2, \dots, s_m$; soit

$$(16) \quad F(a, b, \dots, l) = \Phi(s_1, s_2, \dots, s_m).$$

Cela posé, désignons par μ le degré de Φ . Si dans (16) on remplace $s_1, s_2, \dots, s_m$ par leurs expressions en fonction de $a, b, \dots, l$, on doit obtenir une identité. Cherchons dès lors quelle est la plus haute puissance de a qui figure dans Φ après cette substitution. Désignant par

(1) On pourrait aussi procéder comme il suit : Divisons $x^{m-\mu}(x \cdots 0)$ par $f(x)$, soit

$$x^{m-\mu} = f(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

Faisons $x = a$; nous avons $a^{m-\mu} = R(a)$. Donc, dans toute fonction symétrique, on peut remplacer chaque puissance de a d'exposant $> m-1$ par un polynôme en a de degré $\leq m-1$. D'où, etc.

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}$ les fonctions symétriques élémentaires relatives à $b, c, \dots, l$, on a

$$(17) \quad s_1 = a + \tau_1, \quad s_2 = a\tau_1 + \tau_2, \quad \dots, \quad s_m = a\tau_{m-1}.$$

Le terme de plus haut degré en a sera évidemment obtenu en portant ces expressions dans l'ensemble des termes de plus haut degré de Φ par rapport à $s_1, s_2, \dots, s_m$, soit $\Psi(s_1, s_2, \dots, s_m)$, le polynôme Ψ étant homogène et de degré μ . Or, la plus haute puissance de a qui figure dans $\Psi(a + \tau_1, a\tau_1 + \tau_2, \dots, a\tau_{m-1})$ est évidemment $\Psi(a, a\tau_1, \dots, a\tau_{m-1}) = a^\mu \Psi(1, \tau_1, \dots, \tau_{m-1})$ (n° 433). Le coefficient $\Psi(1, \tau_1, \dots, \tau_{m-1})$ ne peut d'ailleurs être nul quels que soient $b, c, \dots, l$, car il le serait quels que soient $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$, et, par suite, $\Psi(s_1, s_2, \dots, s_m)$ serait nul identiquement, ce qui est absurde. Le plus fort exposant de a dans F est donc bien égal à μ .

THÉORÈME III. — *Tout polynôme symétrique, homogène et de degré p en $a, b, \dots, l$ s'exprime par un polynôme en $s_1, s_2, \dots, s_m$ dont tous les termes ont un poids égal à p .*

Soit $\lambda_1 s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \dots s_m^{\lambda_m}$ un terme quelconque de Φ . Son degré par rapport à l'ensemble des variables $a, b, \dots, l$ doit être égal à p . Or, le degré de chacune des quantités $s_1, s_2, \dots, s_m$ est égal à son indice. Le degré du terme considéré est donc

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \dots + m\lambda_m = p.$$

Ce nombre, qui se calcule en *multipliant l'exposant de chaque variable par son indice et ajoutant tous les produits ainsi obtenus*, s'appelle le *poids* du terme considéré.

Grâce à cette définition et à ce qui vient d'être dit, le théorème est démontré.

Application : méthode des coefficients indéterminés. — Des deux théorèmes précédents on peut tirer une méthode souvent fort pratique pour le calcul des fonctions symétriques homogènes. Elle consiste à écrire l'identité (16), mais en employant au second membre des *coefficients indéterminés*. Les termes possibles sont limités par les deux restrictions du degré et du poids, imposées par les théorèmes II et III. On détermine ensuite les coefficients inconnus en

substituant dans (16) des valeurs numériques aussi simples que possible attribuées à $a, b, \dots, l$ et, par suite, à $s_1, s_2, \dots, s_m$. On fait autant de substitutions distinctes qu'il y a de coefficients à calculer.

III. — RACINES MULTIPLES.

226. Conditions de multiplicité d'une racine. — D'après le n° 205, pour que le polynôme $f(x)$ admette la racine a à l'ordre α , il faut et suffit qu'il soit divisible par $(x - a)^\alpha$ et pas par une puissance supérieure. On peut transformer de différentes manières cette condition.

Partons de l'identité

$$(18) \quad f(x) \equiv (x - a)^\alpha g(x) \quad [g(a) \neq 0].$$

Dérivons par rapport à x :

$$f'(x) \equiv (x - a)^\alpha g'(x) + \alpha(x - a)^{\alpha-1} g(x) \equiv (x - a)^{\alpha-1} h(x),$$

avec

$$h(x) \equiv (x - a) g'(x) + \alpha g(x);$$

donc

$$h(a) \equiv \alpha g(a) \neq 0.$$

Il résulte de là que a est racine d'ordre $\alpha - 1$ de $f'(x)$.

Réciproquement, s'il en est ainsi et que $f(a)$ soit nul, l'ordre de multiplicité de a pour $f(x)$ est un nombre β tel que $\beta - 1 \equiv \alpha - 1$, donc $\beta \equiv \alpha$. On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si a est une racine d'ordre α de $f(x)$, c'est une racine d'ordre $\alpha - 1$ de $f'(x)$; réciproquement, si a est racine d'ordre $\alpha - 1$ de $f'(x)$ et annule $f(x)$, c'est une racine d'ordre α de $f(x)$.*

En appliquant α fois de suite ce théorème, on a le suivant :

THÉORÈME II. — *Pour qu'une racine de $f(x)$ soit multiple d'ordre α , il faut et suffit qu'elle annule, en même temps que $f(x)$, ses $\alpha - 1$ premières dérivées, mais pas la $\alpha^{\text{ième}}$.*

227. On arrive à des conditions plus avantageuses en introduisant ce qu'on appelle les *dérivées par rapport à la variable d'homogénéité*.

Imaginons qu'on rende le polynôme $f(x)$ homogène et de degré m , grâce à l'introduction d'une nouvelle variable y , dite *variable d'homogénéité*. On obtient de la sorte un polynôme $F(x, y)$, qu'on peut définir par l'identité

$$(19) \quad F(x, y) \equiv y^m f\left(\frac{x}{y}\right);$$

de sorte qu'on a

$$(20) \quad F(x, 1) \equiv f(x).$$

Dérivons (19) par rapport à y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = m y^{m-1} f\left(\frac{x}{y}\right) - y^{m-2} x f'\left(\frac{x}{y}\right).$$

Faisons $y=1$: le premier membre $\frac{\partial F}{\partial y}$ devient un polynôme de degré $m-1$ en x , que nous désignerons par $f'_y(x)$ et qu'on appelle *dérivée de $f(x)$ par rapport à la variable d'homogénéité*. Quant au second membre, il devient $mf(x) - xf'(x)$. On a donc l'identité

$$(21) \quad f'_y \equiv mf(x) - xf'(x),$$

ou

$$(22) \quad mf(x) \equiv xf'(x) + f'_y(1).$$

Cela posé, si $f(x)$ est divisible par $(x-a)^2$, $f'(x)$ l'est par $(x-a)^{2-1}$ (théorème I); donc aussi f'_y , d'après (21). Réciproquement, si $f'(x)$ et f'_y sont divisibles par $(x-a)^{2-1}$, il en est de même de $f(x)$, d'après (22). Mais alors $f(x)$ est divisible par $(x-a)^2$, d'après la réciproque du théorème I. D'où :

THÉORÈME III. — *Pour que $f(x)$ admette le nombre a comme racine d'ordre 2, il faut et suffit que $f'(x)$ et f'_y admettent ce même nombre comme racine d'ordre 2-1.*

On peut maintenant appliquer de nouveau le théorème à $f''(x)$ et à f'_y . En l'appliquant à $f''(x)$, on introduit $f'''(x)$ et la dérivée de $f''(x)$ par rapport à la variable d'homogénéité. Pour calculer celle-ci, il faut rendre $f''(x)$ homogène, ce qui donne $\frac{\partial F}{\partial x}$; dériver par rapport à y , ce

---

(*) Cette identité n'est autre que l'identité d'Euler (n° 134).

qui donne $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$; et enfin faire $y = 1$, ce qui donne un polynôme de degré $m - 2$ en x , que nous désignerons par f_{xy}'' .

De même, en appliquant le théorème à f_y' , on introduit f_{xy} et f_{y^2}'' (obtenu en faisant $y = 1$ dans $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$). Pour que a soit racine d'ordre α de $f(x)$, il faut et suffit qu'il soit racine d'ordre $\alpha - 2$ de $f''(x)$, f_{xy}' , f_{y^2}'' .

En continuant de la sorte, on introduira les dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre $\alpha - 1$. Celles-ci doivent toutes s'annuler pour $x = a$; mais, parmi les dérivées d'ordre α , il y en a au moins une qui ne s'annule pas.

Réciproquement, si l'on part de cette hypothèse, on en déduit, d'après la réciproque du théorème III, que les dérivées d'ordre $\alpha - 2$ admettent a comme racine double; les dérivées d'ordre $\alpha - 3$ l'admettent comme racine triple, et ainsi de suite jusqu'à $f(x)$ qui doit l'admettre comme racine d'ordre α .

Finalement, on a le théorème suivant :

THÉOREME IV. — *Pour qu'un nombre soit racine multiple d'ordre α de $f(x)$, il faut et suffit qu'il annule toutes les dérivées partielles d'ordre $\alpha - 1$, sans annuler toutes celles d'ordre α .*

Rappelons encore une fois ce qu'on doit entendre ici par dérivées partielles d'ordre α . Ce sont les $\alpha + 1$ polynômes en x , de degré $m - \alpha$ (1), obtenus en faisant $y = 1$ dans $\frac{\partial^\alpha F}{\partial x^\alpha}$, $\frac{\partial^\alpha F}{\partial x^{\alpha-1} \partial y}$, ..., $\frac{\partial^\alpha F}{\partial y^\alpha}$.

Remarque. — Les théorèmes III et IV sont plus avantageux que les théorèmes I et II en ce sens que les conditions qu'ils requièrent portent sur des polynômes de degré moindre dans le premier cas que dans le second.

228. PROBLÈME. — *Exprimer qu'une équation donnée admet une racine multiple non donnée d'ordre α .*

D'après ce qui précède, il suffit d'écrire que les équations

$$(23) \quad f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad \dots, \quad f^{(\alpha-1)}(x) = 0,$$

(1) Car $\frac{\partial^\alpha F}{\partial x^\alpha}$, $\frac{\partial^\alpha F}{\partial x^{\alpha-1} \partial y}$, ... sont des polynômes homogènes de degré $m - p$ (n° 133).

ou

$$(24) \quad f^{x-1}(x) = 0, \quad f_{x^{x-2}y}^{(x-1)} = 0, \quad \dots, \quad f_{y^{x-1}}^{(x-1)} = 0,$$

ont une racine commune. Autrement dit, on éliminera x (Chap. XIX) soit entre les équations (23), soit entre les équations (24). La seconde solution est d'ailleurs préférable, en vertu de la remarque faite plus haut (1).

229. Séparation des ordres de multiplicité. — Étant donnée une équation à coefficients numériques, il est aisé de reconnaître si elle admet des racines multiples. Il suffit de prendre le p. g. c. d. entre $f(x)$ et $f'(x)$. Si $f(x)$ admet les racines $a, b, \dots, l$ aux ordres $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, ce p. g. c. d. est $(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \dots (x-l)^{\lambda-1}$, car il doit être formé au moyen des facteurs linéaires communs à $f(x)$ et à $f'(x)$ affectés des plus petits exposants qu'ils ont dans ces deux polynômes. Si p désigne le nombre des racines distinctes, son degré est $(\alpha-1) + (\beta-1) + \dots + (\lambda-1) = \alpha + \beta + \dots + \lambda - p = m - p$. Donc :

THÉORÈME. — *Pour avoir le nombre des racines distinctes de $f(x)$, il suffit de retrancher du degré de $f(x)$ celui de son p. g. c. d. avec $f'(x)$.*

Nous allons maintenant montrer qu'on peut, par des opérations rationnelles, décomposer l'équation proposée en un certain nombre d'équations donnant chacune les racines d'un ordre déterminé à l'exclusion des autres.

Soit, d'une manière générale, X_i le produit des facteurs linéaires relatifs aux racines multiples d'ordre i . On a évidemment

$$(25) \quad f = X_1 X_2^2 X_3^3 \dots X_i^i \dots X_p^p,$$

en appelant p l'ordre le plus élevé des racines de $f(x)$. Prenons le p. g. c. d. D entre f et sa dérivée; on a, d'après ce qui précède,

$$D_1 = X_2 X_3^2 \dots X_i^{i-1} \dots X_p^{p-1}.$$

Prenons de même le p. g. c. d. D_2 entre D_1 et sa dérivée; on a

$$D_2 = X_3 X_4^2 \dots X_i^{i-2} \dots X_p^{p-2}.$$

(1) On peut aussi se servir des relations entre les coefficients et les racines, en observant que le problème actuel est un cas particulier de celui qui a été traité à la fin du n° 220.

En continuant ainsi, nous obtenons les polynômes $D_0, D_1, \dots, D_{p-1}$; le polynôme D_i satisfaisant à la formule

$$(26) \quad D_i = X_{i+1} X_{i+2}^2 \dots X_p^{p-i},$$

de sorte que

$$D_{p-1} = X_p.$$

Puis, divisons f par D_1 , nous avons

$$Q_1 = \frac{f}{D_1} = X_1 X_2 X_3 \dots X_p.$$

Divisons D_1 par D_2 :

$$Q_2 = \frac{D_1}{D_2} = X_2 X_3 \dots X_p;$$

et ainsi de suite. D'une manière générale,

$$(27) \quad Q_i = \frac{D_{i-1}}{D_i} = X_i X_{i+1} \dots X_p$$

et

$$Q_p = D_{p-1} = X_p.$$

Enfin, divisons Q_1 par Q_2 , puis Q_2 par Q_3 , etc.; nous avons

$$(28) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = X_1, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{Q_i}{Q_{i+1}} = X_i, \quad \dots, \quad Q_p = X_p.$$

De là résulte la règle suivante :

RÈGLE. — On prend les *p. g. c. d.* entre $f(x)$ et sa dérivée, puis entre le polynôme obtenu et sa dérivée et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un polynôme premier avec sa dérivée. On obtient ainsi une suite de polynômes dont f est le premier. On divise chacun d'eux par le suivant, ce qui donne une deuxième suite de polynômes. On divise enfin chacun de ceux-ci par le suivant, ce qui donne une troisième et dernière suite de polynômes, dont le premier admet les racines simples de $f(x)$, le second les racines doubles, ..., le $i^{\text{ème}}$ les racines i^{uples} , ..., le dernier les racines p^{uples} d'ordre maximum.

REMARQUES. — I. Chacun des polynômes X_i n'admet que des racines simples.

II. Si une racine est seule de son ordre de multiplicité et que les coefficients de f soient entiers, elle est commensurable. En effet, les opérations précédentes étant toutes rationnelles, les polynômes X_i ont leurs coefficients commensurables. Dès lors, si l'un d'eux se réduit au premier degré, la racine correspondante est forcément rationnelle.

III. On peut simplifier un peu la recherche des polynômes D_i , en remarquant que, d'après le n° 227, le *p. g. c. d.* entre un polynôme et sa dérivée est le même que le *p. g. c. d.* entre cette dérivée et la dérivée par rapport à la variable d'homogénéité.

CHAPITRE XIX.

ÉLIMINATION.

---

230. **Racines communes à deux équations.** — Étant données deux équations

$$(1) \quad f(x) = 0, \quad g(x) = 0,$$

que nous supposons d'abord quelconques, algébriques ou transcendantes, on peut se proposer de *chercher si elles ont une ou plusieurs racines communes*. Lorsqu'on sait résoudre entièrement l'une d'elles, il suffit évidemment de *substituer successivement toutes ses racines dans l'autre* et de vérifier si, parmi les résultats obtenus, il y en a un ou plusieurs qui soient identiquement nuls.

Ce cas simple étant écarté, le problème n'est pratiquement possible que si *les deux équations sont algébriques* ou se ramènent à deux équations algébriques portant sur la même variable.

Supposons donc dorénavant que $f(x)$ et $g(x)$ soient des polynomes. S'ils ont une ou plusieurs racines communes, ils sont tous deux divisibles par les facteurs linéaires correspondants et ont un p. g. c. d. qui s'annule pour ces racines communes. Réciproquement, si f et g ont un p. g. c. d. Δ non constant, il est manifeste que toute racine de Δ annule à la fois f et g . Donc :

THÉORÈME. — *On a les racines communes à deux polynomes en annulant leur p. g. c. d.*

La solution du problème que nous nous sommes posé est donc théoriquement *très simple* quand on a affaire à deux équations algébriques. Elle l'est encore pratiquement *tant qu'il ne s'agit que d'équations à coefficients numériques* pas trop élevés. Mais il n'en va plus de même lorsque ces derniers sont littéraux en totalité ou en partie, car la recherche du p. g. c. d. devient rapidement très pénible

à cause de la complication croissante des coefficients qui s'introduisent dans les divisions successives qu'on est obligé de faire. Néanmoins, si l'on a la persévérance de pousser les calculs jusqu'au bout, on finit généralement par obtenir un reste de division R indépendant de x , mais renfermant sous une forme plus ou moins compliquée les paramètres arbitraires qui figurent dans les coefficients des deux équations. De sorte que si l'on donne à ces paramètres des valeurs numériques quelconques, le reste R n'est pas nul; le p. g. c. d. est constant; il n'y a pas de racine commune. En égalant R à zéro, on obtient une relation entre les paramètres, qui est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une ou de plusieurs racines communes. D'une manière plus précise, *pour exprimer qu'il y a p racines communes, on pousse les divisions jusqu'au moment où l'on a un diviseur de degré p ; on écrit alors que le reste correspondant est identiquement nul, ce qui donne en général p conditions*, puisque ce reste est de degré $p - 1$ et possède par conséquent p coefficients.

231. Élimination par les fonctions symétriques. — Les considérations précédentes nous conduisent à étudier d'une manière précise le problème suivant, dit *problème de l'élimination* :

Étant données deux équations algébriques ⁽¹⁾ dont les coefficients dépendent de certains paramètres arbitraires, trouver la condition nécessaire et suffisante qui doit lier ces paramètres pour que les deux équations aient au moins une racine commune.

Trouver cette condition, c'est ce qu'on appelle *éliminer l'inconnue x entre les deux équations*.

Nous venons d'indiquer une première solution, qui a l'avantage de donner du même coup la ou les racines communes ou, du moins, une équation les admettant comme racines. Mais, répétons-le, elle est rarement pratique, à part toutefois le cas où les coefficients sont presque tous numériques, surtout ceux des puissances élevées de x , qui s'introduisent dès le début dans la recherche du p. g. c. d.

Nous allons maintenant développer une seconde méthode basée sur

---

(1) On peut, si l'on veut, supprimer le mot *algébriques*; mais, pour des équations transcendentes, le problème est généralement insoluble; nous ne l'étudierons pas dans ce cas.

la théorie des fonctions symétriques et qui, si elle n'est souvent pas plus pratique que la précédente, a du moins l'avantage de se prêter très bien aux considérations théoriques.

Soient les deux équations

$$(2) \quad f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

$$(3) \quad g(x) \equiv B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \dots + B_p = 0.$$

Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les racines de la première et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ celles de la seconde. Pour que les deux équations aient une racine commune, il faut et suffit que l'une des quantités $g(\alpha_1), g(\alpha_2), \dots, g(\alpha_m)$ soit nulle ou, ce qui revient au même, que le produit

$$(4) \quad P \equiv g(\alpha_1) g(\alpha_2) \dots g(\alpha_m)$$

le soit. Or, ce produit est une fonction symétrique rationnelle des racines de (2); on peut donc le calculer par des opérations rationnelles, suivant une méthode qui a été exposée au Chapitre précédent. *La condition $P = 0$ peut donc être considérée comme résolvant le problème.* Mais il est évident que si cette solution est très simple en théorie, elle doit conduire en pratique à des calculs qui deviennent tout de suite très longs dès que les degrés m et p sont un peu élevés. *On ne l'emploie couramment, comme nous le verrons, que pour deux équations du second degré.* Néanmoins, nous allons l'étudier davantage afin d'en tirer des conséquences théoriques intéressantes.

Observons tout d'abord qu'on doit arriver au même résultat par la considération du produit

$$(5) \quad Q \equiv f(\beta_1) f(\beta_2) \dots f(\beta_p).$$

Au reste, il est très facile de le comparer au précédent. On peut, en effet, écrire (n° 203)

$$f(x) \equiv A_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m),$$

$$g(x) \equiv B_0 (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_p);$$

d'où

$$P \equiv B_0 (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \dots (\alpha_1 - \beta_p)$$

$$\times B_0 (\alpha_2 - \beta_1) \dots (\alpha_2 - \beta_p) \dots B_0 (\alpha_m - \beta_1) \dots (\alpha_m - \beta_p),$$

$$(6) \quad P \equiv B_0^m (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \dots (\alpha_m - \beta_p);$$

$$Q \equiv A_0 (\beta_2 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2) \dots (\beta_1 - \alpha_m)$$

$$\times A_0 (\beta_2 - \alpha_1) \dots (\beta_2 - \alpha_m) \dots A_0 (\beta_p - \alpha_1) \dots (\beta_p - \alpha_m),$$

$$(7) \quad Q \equiv A_0^p (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2) \dots (\beta_p - \alpha_m).$$

Les quantités $\frac{P}{B_0^m}$ et $\frac{Q}{A_0^p}$ se présentent sous la forme du produit de mp facteurs, qui sont les mêmes, au signe près, pour les deux produits. On a donc

$$\frac{P}{B_0^m} = (-1)^{mp} \frac{Q}{A_0^p},$$

ou

$$(8) \quad PA_0^p = (-1)^{mp} QB_0^m = R = (-1)^{mp}.$$

La quantité R s'appelle le *résultant des deux polynômes*.

THÉORÈME. — *Pour que deux polynômes aient au moins une racine commune, il faut et il suffit que leur résultant soit nul.*

Car l'équation $R = 0$ équivaut à $P = 0$ (ou $Q = 0$).

232. Le théorème précédent peut sembler en défaut dans les circonstances suivantes. Imaginons que, pour certaines valeurs λ_0 des paramètres λ dont dépendent les coefficients, A_0 et B_0 deviennent nuls. On peut alors constater que le résultant s'annule. D'autre part, les degrés des équations s'abaissent et ces dernières peuvent très bien n'avoir aucune racine commune.

On lève cette objection par la considération des *racines infinies*. Admettons d'une manière générale que, pour $\lambda = \lambda_0$, les q premiers coefficients $A_0, A_1, \dots, A_{q-1}$ soient nuls, A_q ne l'étant pas. L'équation (2) s'abaisse au degré $m - q$ et ne possède plus que $m - q$ racines. Mais on démontre que, si les λ tendent d'une manière continue vers les λ_0 et si les coefficients A sont des fonctions continues des λ , parmi les m racines de (2), il y en a q qui deviennent infiniment grandes. On convient alors de dire que, pour $\lambda = \lambda_0$, l'équation (2) possède q racines infinies.

Si nous revenons alors à l'hypothèse d'après laquelle A_0 et B_0 s'annulent simultanément pour $\lambda = \lambda_0$, nous voyons que les deux équations ont au moins une racine infinie commune. Comme leur résultant est encore nul, le théorème ci-dessus est encore vrai.

233. Propriétés du résultant. — La première expression du résultant $R = A_0^p g(z_1) g(z_2) \dots g(z_m)$ nous montre que c'est un polynôme homogène de degré m par rapport aux coefficients B . La seconde nous montrerait de même que c'est un polynôme homogène de degré p par rapport aux coefficients A .

Cherchons son poids (n° 225) relativement à l'ensemble des coeffi-

(1) Dans le cas où m et p sont impairs, on voit que le signe de R n'est pas déterminé, ou plutôt dépend de l'ordre dans lequel on considère les deux polynômes.

cients A et B. On pourrait, à cet effet, se servir du théorème III du n° 225. Il est un peu plus rapide d'employer l'artifice suivant, que nous empruntons à *Leçons* (t. II, p. 364).

Imaginons qu'on multiplie toutes les racines α et β par le même facteur arbitraire λ , sans changer les coefficients A_0, B_0 . D'après les formules (6) et (8), R est manifestement multiplié par λ^{mp} .

D'autre part, les relations entre les coefficients et les racines (n° 220) nous apprennent que chacun des coefficients A_i, B_i est multiplié par une puissance de λ , d'exposant égal à son indice. Tout terme du polynôme R en A_i, B_i est donc multiplié par une puissance de λ , d'exposant égal à son poids. Pour que R soit multiplié par λ^{mp} , quelle que soit la valeur de λ , il est nécessaire que tous ses termes aient pour poids mp . Donc :

THÉOREME. — *Le résultant est un polynôme par rapport aux coefficients $A_0, A_1, \dots, A_m, B_0, B_1, \dots, B_p$, dont tous les termes ont pour poids mp .*

Nous trouverons plus loin (n° 238) une application importante de cette proposition.

234. Résultant de deux trinômes du second degré. — Il importe de savoir former de mémoire le résultant de deux trinômes du second degré, car il est d'une application assez fréquente. Soient les deux équations

$$(10) \quad f(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$

$$(11) \quad g(x) = a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

On a

$$\frac{R}{a^2} = g(\alpha_1)g(\alpha_2) = (a'\alpha_1^2 + b'\alpha_1 + c')(a'\alpha_2^2 + b'\alpha_2 + c').$$

Développons et ordonnons suivant a', b', c' :

$$\begin{aligned} \frac{R}{a^2} = & a'^2(\alpha_1\alpha_2)^2 + a'b'(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + a'c'(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ & + b'^2\alpha_1\alpha_2 + b'c'(\alpha_1 + \alpha_2) + c'^2. \end{aligned}$$

Or,

$$\alpha_1\alpha_2 = -\frac{c}{a}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2};$$

d'où

$$\begin{aligned} R &= a'^2c^2 - a'b'cb \div a'c'(b^2 - 2ac) + b^2ca - b'c'ba \div c'^2a^2 \\ &= (a'^2c^2 - 2aca'c' + c'^2a^2) - (b^2a'c' + b^2ac - bb'ca' - bb'c'a), \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera aisément que cette expression est identique à la suivante

$$(12) \quad R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb').$$

C'est sous cette forme qu'il nous semble le plus commode de retenir le résultant des deux trinômes. On peut encore l'écrire autrement; mais nous ne le ferons pas, car mieux vaut connaître bien une seule formule que de mal en connaître deux.

Du reste, on retrouve rapidement l'expression (12) en raisonnant comme il suit. Considérant les équations (10) et (11) comme deux équations du premier degré par rapport aux deux inconnues x^2 et x ; nous avons, en supposant $ab' - ba' \neq 0$,

$$(13) \quad x^2 = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Si les deux équations ont une racine commune, cette racine est donnée par la seconde formule (13) et son carré par la première; on a donc nécessairement

$$\left(\frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \right)^2 = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}$$

ou

$$(14) \quad (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0.$$

On retrouve bien la condition $R = 0$, avec la forme (12) du résultant.

Notre raisonnement suppose $ab' - ba' \neq 0$. Si $ab' - ba' = 0$, les équations, considérées comme du premier degré en x^2 et x , ne sont compatibles (n° 290) que si le déterminant caractéristique $ac' - ca'$ est nul. C'est aussi la condition que donne (14). Dans ce cas, les deux équations ont leurs coefficients proportionnels et ont, par suite, les mêmes racines.

THÉORÈME. — *Si le résultant de deux trinômes du second degré à coefficients réels est négatif, les deux trinômes ont leurs racines réelles et distinctes, et se séparant mutuellement.*

En effet, le produit $g(z_1), g(z_2)$ par exemple étant négatif, les nombres z_1 et z_2 sont nécessairement réels; car, s'ils étaient imaginaires, ils seraient conjugués (n° 249); donc aussi $g(z_1)$ et $g(z_2)$, dont le produit serait dès lors positif (n° 33).

On prouverait de même la réalité de β_1 et β_2 .

Enfin, en vertu du théorème du n° 230, les nombres z_1 et z_2 comprennent une racine et une seule de $g(x)$; de sorte que si l'on range les racines des deux trinômes par ordre de grandeur croissante, on obtient l'une des dispositions $(z_1 \beta_1 z_2 \beta_2)$ ou $(\beta_1 z_1 \beta_2 z_2)$.

235. Discriminant d'un polynome. — On appelle *discriminant* du polynome $f(x)$ le quotient par Λ_0 du résultant relatif à $f(x)$ et $f'(x)$.

Si $z_1, z_2, \dots, z_m$ sont les racines de $f(x)$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m-1}$ celles de $f'(x)$, on a donc (n° 231)

$$(15) \quad D = \Lambda_0^{m-2} f'(z_1) f'(z_2) \dots f'(z_m) = m^m \Lambda_0^{m-1} f(\beta_1) f(\beta_2) \dots f(\beta_{m-1}).$$

La première expression peut se mettre sous une forme remarquable. De l'identité

$$f(x) \equiv \Lambda_0 (x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_m)$$

on déduit en effet

$$f'(z_i) = \Lambda_0 (z_i - z_1) \dots (z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1}) \dots (z_i - z_m).$$

Si l'on fait le produit des m quantités analogues, on voit que chacune des différences telles que $z_p - z_k$ y figure deux fois, une fois dans $f'(z_p)$ et une fois dans $f'(z_k)$, mais alors précédée du signe $-$. Comme il y a en tout $\frac{m(m-1)}{2}$ différences distinctes, on voit que si l'on appelle Δ le produit des carrés des différences des racines de $f(x)$, on a

$$(16) \quad D = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Lambda_0^{2m-2} \Delta.$$

Le produit Δ s'annule lorsque deux des racines sont égales et dans ce cas seulement: donc, *pour qu'un polynome ait une racine double, il faut et il suffit que son discriminant soit nul.* (Cela résulte aussi du n° 226.)

On peut observer aussi que si le polynome a toutes ses racines réelles, le discriminant est nécessairement positif ou négatif, suivant que le nombre $\frac{m(m-1)}{2}$ est pair ou impair. Mais cette condition nécessaire n'est pas en général suffisante. Elle l'est néanmoins dans le cas de l'équation du troisième degré à coefficients réels.

En effet, supposons $m = 3$ et admettons qu'une seule racine z_1 soit réelle, les deux autres z_2 et z_3 étant dès lors imaginaires conjuguées (n° 249). La

différence $z_2 - z_3$ est une imaginaire pure; son carré est négatif. Les différences $z_1 - z_2$ et $z_1 - z_3$ sont imaginaires conjuguées; leur produit est positif, et *a fortiori* le carré de ce produit. Donc, dans cette hypothèse, Δ est nécessairement négatif.

Si l'on observe maintenant que $\frac{m(m-1)}{2} = 3$ est impair, et, par conséquent, que D a le signe contraire à Δ , on voit que, *pour qu'un polynôme du troisième degré à coefficients réels ait ses trois racines réelles, il faut et suffit que son discriminant soit négatif.*

La seconde expression (15) de D peut aussi se transformer. Appelons $g(x)$ la dérivée par rapport à la variable d'homogénéité. On a (n° 227)

$$mf(\beta_i) = g(\beta_i);$$

donc

$$D = m\Lambda_0^{m-1} g(\beta_1) g(\beta_2) \dots g(\beta_{m-1}).$$

D'autre part, le résultant D' entre $f'(x)$ et $g(x)$ s'écrit

$$D' = (m\Lambda_0)^{m-1} g(\beta_1) g(\beta_2) \dots g(\beta_{m-1});$$

donc

$$(17) \quad D = \frac{D'}{m^{m-2}}.$$

Par conséquent, *le discriminant d'un polynôme peut aussi s'obtenir en divisant par m^{m-2} le résultant entre la dérivée et la dérivée par rapport à la variable d'homogénéité.*

Cet énoncé est intéressant en ce sens qu'il permet de simplifier un peu le calcul du discriminant. En particulier, il ramène le *discriminant du polynôme du troisième degré* $ax^3 + bx^2 + cx + d$ au résultant des deux trinômes du second degré $3ax^2 + 2bx + c$ et $bx^2 + 2cx + 3d$, ce qui donne, d'après les formules (12) et (17),

$$(18) \quad D = \frac{1}{3} [(9ad - bc)^2 - 4(3ac - b^2)(3bd - c^2)].$$

Dans le cas du trinôme $x^3 + px + q$, cette expression devient

$$(19) \quad D = 4p^3 + 27q^2.$$

236. Méthodes pratiques d'élimination. — Dans la pratique, on ne forme pour ainsi dire jamais le résultant de deux polynômes de degré supérieur au second. Il arrive néanmoins quelquefois qu'on se trouve dans l'obligation d'éliminer une inconnue entre deux équations du troisième et même du quatrième degré (1). On procède alors de la manière suivante.

(1) Pour des degrés supérieurs, on n'élimine pas, à moins d'y être absolument contraint, ou à moins que les équations ne présentent des particularités susceptibles d'apporter des simplifications évidentes dans les calculs.

Soit, d'une manière générale, les deux équations

$$(20) \quad f(x) = 0,$$

$$(21) \quad g(x) = 0.$$

Si elles sont vérifiées simultanément pour une certaine valeur x_0 de x , il en est de même de l'équation

$$(22) \quad \lambda f(x) + \mu g(x) = 0,$$

où λ et μ désignent deux facteurs quelconques pouvant très bien renfermer x , pourvu que ces facteurs restent finis pour $x = x_0$. Réciproquement, si les équations (21) et (22) sont vérifiées simultanément pour $x = x_0$, il en est de même de (20), à condition toutefois que λ ne s'annule pas. Donc, *on peut, au point de vue de l'élimination, remplacer l'équation (20) par la combinaison linéaire (22); mais, après l'élimination, il faut bien vérifier que la racine commune à (21) et à (22) laisse λ et μ finis et n'annule pas λ .*

Au lieu de (20), on aurait pu remplacer (21) sous la condition $\mu \neq 0$. On peut aussi introduire une deuxième combinaison linéaire :

$$(23) \quad \lambda' f(x) + \mu' g(x) = 0,$$

et éliminer x entre (22) et (23), sous la condition $\lambda\mu' - \mu\lambda' \neq 0$, moyennant laquelle le système (22), (23) est équivalent au système (20), (21).

Cela posé, on peut essayer de déterminer λ , μ , λ' , μ' de façon que les équations (22) et (23) soient plus simples que les équations proposées. Par exemple, si celles-ci sont du troisième degré, on peut choisir λ et μ pour éliminer le terme en x^3 ; l'expression (22) est alors du second degré. On peut ensuite choisir λ' et μ' pour éliminer le terme constant. En divisant par x (1), l'équation (23) s'abaisse, elle aussi, au second degré. Si $\lambda\mu' - \mu\lambda' \neq 0$, on n'a plus qu'à appliquer la formule (14).

Si f est du troisième et g du second degré, en prenant λ constant et μ de la forme kx ($k = \text{const.}$), on amènera encore (22) à être du second degré et l'on prendra le résultant de (21) et (22).

---

(1) On suppose que zero n'est pas racine commune aux équations données.

On conçoit que, quels que soient les degrés des deux équations, on puisse, par des opérations analogues aux précédentes répétées un nombre suffisant de fois, se ramener toujours à deux équations du second degré. Mais les calculs se compliquent rapidement; de plus, rappelons qu'il faut prendre des précautions au point de vue de l'équivalence du système proposé et des systèmes en lesquels on le transforme successivement.

237. Résolution de deux équations à deux inconnues. — Soient les deux équations

$$(24) \quad f(x, y) = 0,$$

$$(25) \quad g(x, y) = 0,$$

où l'on suppose que f et g sont des polynômes en x et y .

On appelle solution de ce système d'équations tout groupe de valeurs numériques qui, attribuées à x et y , annulent identiquement f et g .

Soit (x_0, y_0) une telle solution. Les deux équations en x

$$f(x, y_0) = 0, \quad g(x, y_0) = 0$$

admettent la solution commune x_0 ; donc, leur résultant est nul. Les y des solutions du système vérifient donc l'équation

$$(26) \quad R(y) = 0,$$

obtenue en éliminant x entre (24) et (25).

Réciproquement, soit y_1 une racine de cette équation. Les équations en x

$$(27) \quad f(x, y_1) = 0, \quad g(x, y_1) = 0$$

admettent au moins une racine commune x_1 , puisque leur résultant est nul. Mais alors (x_1, y_1) est une solution du système: d'où :

RÈGLE. — Pour résoudre le système, on élimine x entre les deux équations qui le composent. On résout l'équation en y obtenue et à chaque racine y_1 de celle-ci on associe la racine commune des deux équations en x que deviennent les équations proposées quand on y remplace y par y_1 .

238. Nombre de solutions — Soient m et p les degrés respectifs de f et g . En nous plaçant dans le cas le plus général, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x, y) &\equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m, \\ g(x, y) &\equiv B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \dots + B_p, \end{aligned}$$

les coefficients A et B étant des polynômes en y de degré égal à leur indice. Le résultant $R(y)$ est, nous le savons (n° 233), un polynôme en A et B , donc aussi en y . Le degré, par rapport à y de tout monôme en $A_0, A_1, \dots, B_p$ est visiblement égal à son poids par rapport à ces coefficients. Or, nous avons vu (n° 233) que le poids du résultant était mp ; donc, l'équation (26) est une équation algébrique de degré mp . Comme à chacune de ses racines correspond une solution du système, on peut énoncer le théorème suivant, dû à Bezout :

THÉORÈME. — *Deux équations algébriques à deux inconnues, de degrés m et p , admettent mp solutions.*

Il convient de signaler les difficultés suivantes, qui peuvent surgir à propos de ce théorème. D'abord, il peut arriver que les équations (27) aient, non pas une, mais plusieurs racines communes, ce qui semblerait augmenter le nombre total des solutions. Mais on démontre que dans ce cas la racine y_1 de (26) est multiple d'un ordre égal au nombre des racines communes précédentes et réciproquement, ce qui rétablit visiblement les choses.

Il peut se faire aussi que le degré δ de $R(y)$ s'abaisse, c'est-à-dire soit inférieur à mp . Dans cette circonstance, on définit des *solutions infinies* en nombre égal à $mp - \delta$. Moyennant quoi, le théorème de Bezout est général.

239. Systèmes à plusieurs inconnues. — Si l'on a trois équations à trois inconnues x, y, z , on élimine x entre la première et la deuxième, puis entre la première et la troisième. On obtient un système en y et z , qu'on résout comme ci-dessus. Si (y_1, z_1) désigne une solution de ce système, on la porte dans les équations proposées. On obtient trois équations en x , dont on sait que les deux premières ont au moins une solution commune, ainsi que la première et la troisième. Reste à voir si, parmi ces solutions communes, il y en a une qui vérifie à la fois les trois équations. Remarquons d'ailleurs

que, si cela est, (x_1, z_1) devra annuler aussi le résultant de la deuxième et de la troisième équation.

Nous nous bornons à ces indications sommaires, qui permettront au lecteur de se tirer d'affaire dans les cas simples et qui se généralisent de manière évidente pour un système renfermant un nombre quelconque d'inconnues.

Observons toutefois, pour terminer, que *dans le cas où le système est symétrique par rapport à certaines des inconnues, il peut être avantageux de substituer à celles-ci leurs fonctions symétriques élémentaires.*

CHAPITRE XX.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

---

240. Transformations du premier ordre. — Soient une équation algébrique

$$(1) \quad f(x) = 0$$

et une fonction rationnelle donnée

$$(2) \quad y = z(x).$$

Faire subir à l'équation (1) la transformation (2) c'est former l'équation en y dont les racines $y_1, y_2, \dots, y_m$ sont les valeurs que prend $z(x)$ quand on x remplace x par les racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ de $f(x)$.

L'équation transformée

$$(3) \quad g(y) = 0$$

devant admettre m racines doit, *a priori*, être de degré m . On peut remarquer tout de suite que ses coefficients, fonctions symétriques élémentaires des y_i , sont des fonctions symétriques rationnelles des x_i et, comme telles, peuvent être calculées par des opérations rationnelles. On arrive au même résultat en observant que les m paires de nombres $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ constituent les m solutions finies du système (1), (2); d'où il résulte que l'équation (3) peut être obtenue en éliminant x entre les équations (1) et (2) (n° 237).

241. Utilité d'une telle transformation. — Imaginons que l'on connaisse une racine y' de l'équation (3). Il lui correspond une ou

plusieurs racines de (1), solutions communes des équations (1) et (4) :

$$(4) \quad y' = \varphi(x).$$

Ces solutions sont données par une équation algébrique qu'on peut former par des opérations rationnelles, par exemple par une recherche de p. g. c. d. (n° 230). Leur nombre peut être prévu à l'avance : il est égal à l'ordre de multiplicité de y' pour $g(y)$. En effet, si $x_1, x_2, \dots, x_q$ sont ces racines, les q racines $y_1, y_2, \dots, y_q$ de (3) doivent se confondre avec y' , qui est donc racine multiple d'ordre q .

De là résulte la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Si l'on sait résoudre l'équation (3), on peut décomposer l'équation (1), et cela par des opérations rationnelles, en autant d'équations que l'équation (3) admet de racines distinctes, le degré de chaque équation partielle étant égal à l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de (3).*

On conçoit dès lors toute l'utilité d'une telle transformation au point de vue de la résolution de l'équation proposée. En particulier, si l'équation transformée n'a que des racines simples et des racines doubles, on se ramène à la résolution d'un certain nombre d'équations du premier et du second degré.

Une autre application, de moindre importance, consiste en le *calcul de certaines fonctions symétriques des racines de $f(x)$* . Il peut arriver, en effet, qu'une transformation convenable effectuée sur l'équation ramène la fonction symétrique proposée à une fonction symétrique beaucoup plus simple des racines de l'équation transformée, par exemple à une fonction symétrique élémentaire. C'est ainsi que, si l'on doit calculer $\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_m)$, il suffira de faire la transformation (2) et de prendre la somme des racines de (3).

242. Transformations élémentaires. — Il existe trois transformations dites *transformations élémentaires*, qui sont d'un usage fréquent. Ce sont les suivantes :

$$(I) \quad y = x + h,$$

$$(II) \quad y = kx,$$

$$(III) \quad y = \frac{1}{x}.$$

Nous allons les étudier successivement.

(I). Dans le cas de la transformation (I), l'équation transformée s'écrit immédiatement

$$f(y-h) = 0,$$

ce qu'on peut développer, si l'on veut, par la formule de Taylor (n° 115).

Une application importante de cette transformation est la suivante : *Faire disparaître de l'équation transformée le terme en y^{m-1} .*

Rien n'est en effet plus simple. On veut que la somme

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

soit nulle. Or, elle est égale à $x_1 + x_2 + \dots + x_m + mh$. Il faut donc prendre

$$h = -\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} = -\frac{A_1}{m\Lambda_0},$$

si l'on a posé, comme d'habitude,

$$f(x) = \Lambda_0 x^m + \Lambda_1 x^{m-1} + \dots + \Lambda_m.$$

Dans le cas de l'équation du troisième degré, cette simplification est particulièrement importante. Elle ramène l'équation complète à la forme

$$x^3 + px + q = 0,$$

dite *forme canonique* et qui se prête, mieux que toute autre, à l'étude et à la résolution de l'équation.

(II). La transformation (II) ne donne lieu à aucune difficulté. Dans le cas où k est quelconque, elle est utilisée assez peu souvent ; nous en verrons cependant une application au Chapitre suivant (n° 261). Pour l'instant, nous dirons seulement un mot du cas où $k = -1$, c'est-à-dire $y = -x$. L'équation transformée se forme immédiatement par le simple changement de x en $-x$; c'est pourquoi on l'appelle *la transformée en $-x$* de l'équation proposée.

Une circonstance intéressante est celle où cette dernière *ne renferme que des termes dont les exposants ont tous même parité*. La transformation considérée ne change pas l'équation, dont les racines sont, par suite, nécessairement deux à deux opposées. Dans ce cas, on peut abaisser d'au moins moitié le degré de l'équation. On commence par enlever la ou les racines nulles, s'il y en a ; après quoi il

n'y a plus au premier membre que des puissances paires de x . On fait alors la transformation évidente $y = x^2$ ⁽¹⁾, que le lecteur reconnaîtra d'ailleurs pour l'avoir déjà rencontrée à propos de l'équation bicarrée.

(III). Enfin, la transformation (II) conduit à l'équation aux inverses de l'équation proposée. Elle s'écrit immédiatement, en conservant la lettre x pour désigner l'inconnue,

$$\Lambda_m x^m + \Lambda_{m-1} x^{m-1} + \dots + \Lambda_0 = 0,$$

et admet pour racines les inverses des racines de (1).

243. Une catégorie intéressante d'équations est celle des *équations réciproques*, qui sont caractérisées par la propriété de *coïncider avec leur équation aux inverses*. Pour que l'équation (1) soit réciproque, il faut et il suffit que l'on ait (n° 205)

$$(5) \quad \frac{\Lambda_0}{\Lambda_m} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_{m-1}} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_{m-2}} = \dots = \frac{\Lambda_{m-2}}{\Lambda_2} = \frac{\Lambda_{m-1}}{\Lambda_1} = \frac{\Lambda_m}{\Lambda_0}.$$

Égalant les rapports extrêmes, nous avons

$$\Lambda_0^2 = \Lambda_m^2;$$

donc

$$\Lambda_0 = \pm \Lambda_m.$$

Par suite, la valeur commune des rapports (5) est égale à ± 1 . Donc, *pour qu'une équation soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients équidistants des extrêmes soient égaux ou bien qu'ils soient opposés*.

Dans le deuxième cas, l'équation admet d'ailleurs forcément la racine 1; car, si l'on forme $f(1)$, les termes équidistants des extrêmes se détruisent. En divisant $f(x)$ par une puissance convenable de $x - 1$, on obtient une équation qui n'est plus satisfaite pour $x = 1$ et

(1) On peut se demander comment il se fait que, contrairement à la théorie générale, l'équation en y n'ait pas même degré que l'équation en x . En réalité, l'équation transformée, si elle était formée régulièrement, par la méthode des fonctions symétriques par exemple, devrait admettre $\frac{m}{2}$ racines doubles obtenues en associant les y_i correspondant à des valeurs opposées des x_i . Elle serait de la forme $[g_1(y)]^2 = 0$, $g_1(y)$ étant précisément le polynôme qu'on obtient en remplaçant x^2 par y dans $f(x)$.

qui a encore ses racines deux à deux inverses, puisque la racine 1 ne pouvait être qu'à elle-même sa propre inverse. Elle est donc réciproque, les coefficients équidistants des extrêmes étant égaux.

Si maintenant l'équation ainsi débarrassée des racines égales à 1 est de degré impair, je dis qu'elle admet la racine $x = -1$. En effet, si l'on forme $f(-1)$, les termes équidistants des extrêmes se détruisent.

Finalement, on voit que *toute équation réciproque est, après suppression des racines +1 et -1, de la forme*

$$(6) \quad F(x) \equiv \Lambda_0 x^{2n} - \Lambda_1 x^{2n-1} + \dots \\ + \Lambda_{n-1} x^{n+1} - \Lambda_n x^n - \Lambda_{n-1} x^{n-1} + \dots - \Lambda_1 x - \Lambda_0 = 0.$$

Faisons-lui subir la transformation (4)

$$(7) \quad y = x + \frac{1}{x}.$$

Les racines $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ étant deux à deux inverses, les racines $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ sont deux à deux égales, puisque y ne change pas quand on change x en $\frac{1}{x}$. Par suite, l'équation transformée doit être de la forme

$$[G(y)]^2 = 0,$$

$G(y)$ étant un polynôme de degré n .

On peut obtenir ce dernier par l'artifice suivant : l'équation (6) peut s'écrire, en divisant par x^n ,

$$(8) \quad \Lambda_0 \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) - \Lambda_1 \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) - \dots + \Lambda_{n-1} \left(x + \frac{1}{x} \right) + \Lambda_n = 0.$$

Calculons l'expression $X_p = x^p + \frac{1}{x^p}$ en fonction de y . On a

$$X_p y = \left(x^p + \frac{1}{x^p} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}$$

ou

$$(9) \quad X_{p+1} = y X_p - X_{p-1},$$

formule de récurrence qui permettra de calculer, de proche en proche, $X_0 = 2$, $X_1 = y$, X_2 , X_3 , ..., X_n .

(*) On peut aussi faire la transformation $y = \frac{1-x}{1+x}$, qui conduit à une équation ne contenant que des termes de même parité (Cf. *Leçons*, n. 271).

Je dis que V_p est un polynôme de degré p en y . Cela est déjà vrai pour $p=0$ et $p=1$. Admettons maintenant que cela soit vrai jusqu'à une certaine valeur de p , et montrons que cela sera encore vrai pour V_{p+1} . En effet, la formule (9) prouve d'abord, de façon évidente, que V_{p+1} est un polynôme en y . En outre, V_p étant de degré p , yV_p est de degré $p+1$; comme V_{p-1} est de degré $p-1$, le terme de plus haut degré de yV_p ne peut être détruit par celui de V_{p-1} ; donc V_p est bien de degré $p+1$.

Il résulte de là que le premier membre de (8) est un polynôme de degré n en y : c'est le polynôme $G(y)$.

Si l'on connaît une racine y' de $G(y)$, on en déduira deux racines inverses de $F(x)$ par la résolution de l'équation (7), ou

$$x^2 - xy + 1 = 0.$$

On voit donc que la résolution de l'équation (6) se ramène à celles d'une équation de degré n et de n équations du second degré.

244. Transformation homographique. — Aux transformations élémentaires se rattache la *transformation homographique* :

$$(10) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

où a, b, c, d désignent quatre constantes telles que $ad - bc \neq 0$, afin que y dépende réellement de x . L'équation (10) est du premier degré par rapport à x et donne

$$(11) \quad x = \frac{b - dy}{cy - a},$$

ce qui permet d'écrire immédiatement l'équation transformée et de calculer les racines en x quand on connaît les racines en y .

Une propriété très importante est la suivante :

THÉORÈME. — *Toute transformation homographique équivaut à une succession de transformations élémentaires.*

D'abord, si c est nul, la transformation est *linéaire* :

$$y = ax + b.$$

Elle équivaut aux deux transformations élémentaires

$$z = ax, \quad y = z + b.$$

Si $c \neq 0$, en décomposant y en éléments simples (Chap. XVII), on peut écrire la formule (10) sous la forme

$$y = z + \frac{\zeta}{x - \gamma} \quad (z, \zeta, \gamma = \text{const.}),$$

ce qui équivaut aux quatre transformations élémentaires

$$z = x + \gamma, \quad u = \frac{1}{z}, \quad v = \zeta u, \quad y = v + z.$$

245. Transformations du second ordre. — On peut étendre de la manière suivante la notion de transformation d'une équation. D'une manière générale, soit une fonction rationnelle de p variables

$$(12) \quad y = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_p), \quad (p = m).$$

Imaginons qu'on y remplace les u_i successivement par tous les arrangements p à p des m racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'équation (1). On obtient de la sorte A_m^p valeurs numériques ⁽¹⁾. L'équation en y qui admet ces valeurs comme racines est dite *transformée de l'équation (1) par la transformation (12)*. Une telle transformation est dite *du $p^{\text{ième}}$ ordre*. Dans le cas où $p = 1$, on retombe sur les transformations considérées dans les numéros précédents, qui sont donc des transformations du premier ordre.

L'étude générale des transformations rationnelles d'ordre quelconque constitue un des Chapitres les plus importants et les plus savants de l'Algèbre supérieure, que nous ne pouvons aborder ici.

Contentons-nous d'observer que, pour avoir l'équation en y définie par la transformation (12), on peut, en raisonnant comme au n° 240, *éliminer $u_1, u_2, \dots, u_p$ entre (12) et*

$$(13) \quad f(u_1) = 0, \quad f(u_2) = 0, \quad \dots, \quad f(u_p) = 0.$$

Lorsque p est voisin de m et que la fonction φ présente quelque symétrie par rapport à certaines de ses variables, il peut y avoir avantage à *éliminer $u_1, u_2, \dots, u_m$ entre (12) et les relations entre les coefficients et les racines*. Ceci revient d'ailleurs à regarder l'équa-

---

⁽¹⁾ Ces valeurs peuvent ne pas être toutes distinctes. En particulier, si la fonction φ est symétrique par rapport à plusieurs des variables u_i , il y a toujours abaissement du degré de l'équation transformée.

tion (12) comme une condition imposée aux racines de (1) et à appliquer la méthode générale du n° 220.

En particulier, supposons $p = m - 1$ et la fonction φ symétrique. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}$ les fonctions symétriques élémentaires de $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$. On sait (n° 225) que φ peut s'exprimer rationnellement au moyen de ces quantités. D'autre part, si l'on applique les formules (17) du n° 225, on voit que les σ peuvent être calculés en fonction de la dernière racine u_m ; de sorte que finalement $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$ se présente sous la forme d'une fonction rationnelle de u_m . Donc :

THÉORÈME. — *Toute transformation rationnelle symétrique d'ordre $m - 1$ à effectuer sur une équation de degré m se ramène à une transformation rationnelle du premier ordre.*

On rencontre assez fréquemment des applications de ce théorème pour l'équation du troisième degré.

Nous terminerons ce Chapitre en exposant quelques transformations particulières classiques du second ordre.

246. Équations aux sommes et aux produits des racines. — Soit

$$(14) \quad y = u_1 + u_2.$$

Au lieu d'appliquer la méthode générale, il est plus élégant de procéder comme il suit. Introduisons le produit

$$(15) \quad z = u_1 u_2.$$

Les nombres u_1 et u_2 sont les racines du trinôme $x^2 - xy + z$, lequel doit diviser $f(x)$ si u_1 et u_2 sont racines de (1). Effectuons dès lors la division de $f(x)$ par $x^2 - xy + z$ suivant les puissances décroissantes de x . Nous obtenons un reste de la forme

$$P(y, z)x + Q(y, z),$$

P et Q désignant deux polynômes en y et z . Les conditions de divisibilité sont

$$(16) \quad P(y, z) = 0, \quad Q(y, z) = 0.$$

En éliminant z entre ces deux équations, on aura l'équation en y cherchée, ou *équation aux sommes des racines prises deux à deux*.

En éliminant y , on aurait au contraire *l'équation aux produits des racines prises deux à deux*.

247. Équations aux demi-sommes et aux demi-différences. — On peut aussi effectuer la transformation (14) en associant à la somme $u_1 + u_2$ la différence $u_1 - u_2$. Posons

$$y = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad z = \frac{u_1 - u_2}{2};$$

d'où

$$u_1 = y + z, \quad u_2 = y - z.$$

Écrivant que u_1 et u_2 vérifient (1), nous avons

$$(17) \quad f(y+z) = 0, \quad f(y-z) = 0.$$

Suivant qu'on élimine z ou y , on obtient *l'équation aux demi-sommes* ou *l'équation aux demi-différences* des racines prises deux à deux.

L'élimination donne lieu à la remarque suivante : les deux équations peuvent s'écrire (n° 115)

$$f(y) + zf'(y) + \frac{z^2}{2}f''(y) + \frac{z^3}{3!}f'''(y) + \frac{z^4}{4!}f^{(4)}(y) + \dots = 0,$$

$$f(y) - zf'(y) + \frac{z^2}{2}f''(y) - \frac{z^3}{3!}f'''(y) + \frac{z^4}{4!}f^{(4)}(y) + \dots = 0.$$

On obtient deux équations plus simples en les combinant par addition et soustraction

$$(18) \quad f(y) + \frac{z^2}{2}f''(y) + \frac{z^4}{4!}f^{(4)}(y) + \dots = 0,$$

$$(19) \quad f'(y) + \frac{z^2}{3!}f'''(y) + \dots = 0,$$

en enlevant la solution évidente et sans intérêt $z = 0$. Ceci montre que l'élimination de y conduit nécessairement à une équation qui ne renferme z que par son carré ; de sorte qu'on pourra poser $z^2 = \frac{t}{4}$, de façon à obtenir *l'équation aux carrés des différences des racines*.

CHAPITRE XXI.

ÉQUATIONS À COEFFICIENTS RÉELS.

---

248. Les équations que nous avons considérées jusqu'à présent pouvaient être à coefficients complexes quelconques et nous n'avons fait aucune distinction entre les racines réelles et les racines imaginaires. Nous allons dorénavant nous placer au point de vue, particulièrement important dans la pratique, des équations à coefficients réels, en envisageant spécialement la recherche des racines réelles.

249. **Racines imaginaires conjuguées.** — THÉOREME. — *Si une équation algébrique à coefficients réels admet une racine imaginaire, elle admet aussi la racine imaginaire conjuguée au même ordre de multiplicité.*

En effet, reprenons le polynôme $f(z)$ du n° 199, en supposant tous ses coefficients réels. Nous avons

$$f(x + yi) \equiv P(x, y) + iQ(x, y)$$

et

$$f(x - yi) \equiv P(x, y) - iQ(x, y),$$

car, les coefficients de f étant réels, les calculs de $f(x + yi)$ et $f(x - yi)$ portent sur des nombres imaginaires conjugués et donnent, par suite, des résultats conjugués (n° 30, remarque II).

Dès lors, si $\alpha + \beta i$ est une racine, comme on a à la fois

$$P(\alpha, \beta) = 0, \quad Q(\alpha, \beta) = 0,$$

on a aussi

$$f(\alpha - \beta i) = 0.$$

En second lieu, si l'on applique ce résultat aux dérivées successives, qui, elles aussi, ont leurs coefficients réels, il est manifeste que

la première dérivée qui ne s'annule pas à le même ordre, soit qu'on substitue $x + \beta i$, soit qu'on substitue $x - \beta i$. Donc, en vertu du théorème II du n° 226, les deux racines ont même ordre de multiplicité.

Décomposition d'un polynôme en facteurs premiers réels. — Si l'on applique la formule (27) du n° 205 à un polynôme à coefficients réels, les facteurs linéaires sont soit réels, soit deux à deux imaginaires conjugués. En groupant ces derniers, on obtient manifestement une décomposition de la forme

$$(1) \quad f(x) \equiv A_0(x - x_1)^{2_1}(x - x_2)^{2_2} \dots (x - x_r)^{2_r} \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{2_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{2_s},$$

où $x_1, x_2, \dots, x_r, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$ sont des nombres réels, les trinômes ayant en outre leurs racines imaginaires. Tous les facteurs de ce produit sont premiers, si l'on exclut tout diviseur imaginaire. La décomposition n'est possible que d'une seule manière, comme celle qui nous a servi de point de départ.

250. Résultats de substitution. — THÉORÈME. — *Si dans un polynôme à coefficients réels on substitue deux nombres réels qui ne soient pas racines, les résultats de substitution sont de même signe ou de signes contraires suivant que les deux nombres comprennent un nombre pair ou un nombre impair de racines réelles, chacune de celles-ci étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.*

Soit à comparer les signes de $f(a)$ et $f(b)$, en supposant pour fixer les idées $a < b$. Imaginons que x croisse d'une manière continue de a à b . La fonction $f(x)$ étant continue, on sait qu'elle ne peut changer de signe qu'en s'annulant (n° 59, II), c'est-à-dire lorsque x traverse une racine. Or, je dis que toutes les fois que x traverse une racine x_0 , $f(x)$ change de signe ou non suivant que l'ordre de multiplicité de cette dernière est impair ou pair. En effet, soit p cet ordre; on a

$$(2) \quad f(x) = (x - x_0)^p g(x) \quad [g(x_0) \neq 0].$$

Si x est très voisin de x_0 , $g(x)$ est très voisin de $g(x_0)$ et garde, par suite, un signe constant, puisque $g(x_0)$ n'est pas nul. Il en résulte

que $f(x)$ change de signe en même temps que $(x - x_0)^p$, c'est-à-dire dans le seul cas où p est impair.

Cela posé, lorsque x croît de a à b , $f(x)$ change de signe un nombre de fois égal au nombre des racines traversées qui ont un ordre impair. Donc $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe dans le seul cas où ces racines d'ordre impair sont en nombre pair. Or, le nombre total des racines réelles comprises entre a et b , nombre compté comme l'explique l'énoncé, a évidemment même parité que le nombre des racines d'ordre impair. Finalement le théorème est démontré.

COROLLAIRE. — *Toute équation de degré impair possède au moins une racine réelle.*

Car $f(+\infty)$ et $f(-\infty)$ ont des signes opposés.

251. Théorème de Descartes. — Le théorème de Descartes a pour but de donner des renseignements sur le nombre des racines positives. Avant de l'établir, il nous est nécessaire de donner quelques définitions.

Soit une suite quelconque de nombres réels $a, b, \dots, l$. Deux termes consécutifs présentent une *permanence* ou une *variation* suivant qu'ils ont même signe ou non. En comparant successivement tous les termes consécutifs et comptant les variations, on obtient le *nombre de variations de la suite*.

THÉORÈME. — *Si dans une suite on supprime un ou plusieurs termes intermédiaires, le nombre des variations ne change pas ou diminue d'un nombre pair.*

En effet, imaginons qu'on supprime par exemple le terme f . Considérons les deux termes voisins e et g . Les seules variations qui peuvent être modifiées sont évidemment celles du groupe efg . Or, si e et g sont de signes contraires, eg présente une variation; mais il en était de même de efg , car f a forcément le signe d'un des termes e, g et le signe contraire à l'autre. Si e et g ont même signe, eg ne présente pas de variation; tandis que efg en présente 0 ou 2, suivant que f a le signe commun de e, g , ou le signe contraire.

De toute façon, on voit que la suppression de f enlève 0 ou 2 variations. La suppression d'un nombre quelconque de termes intermédiaires enlève donc 0 ou un nombre pair de variations.

COROLLAIRE. — *Le nombre des variations d'une suite est pair ou impair suivant que les termes extrêmes sont de même signe ou de signes contraires.*

Il suffit, pour le voir, de supprimer tous les termes intermédiaires.

252. On appelle *variations d'un polynôme à coefficients réels* les variations présentées par ses coefficients lorsque le polynôme est ordonné suivant les puissances décroissantes (ou croissantes) de x .

THÉORÈME DE DESCARTES. — *Le nombre des racines positives d'un polynôme est au plus égal au nombre de ses variations et, s'il en diffère, c'est par un nombre pair.*

On a donné de ce théorème diverses démonstrations. Celle que nous allons reproduire est empruntée à *Leçons*, tome II, pages 403 et 404.

Observons d'abord qu'on peut se borner à considérer le cas où le polynôme a un terme constant, car on peut toujours se ramener à cette hypothèse en le divisant par une puissance convenable de x , ce qui ne modifie ni les racines positives, ni les variations. Cela posé, nous avons deux parties à démontrer.

1° *Le nombre des racines positives a même parité que le nombre des variations.* — En effet, le premier nombre, pour l'évaluation duquel on doit compter chaque racine un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité, est pair ou impair suivant que $f(0)$ et $f(+\infty)$ ont ou non le même signe (n° 250). Or, ces signes sont ceux du dernier et du premier coefficient (n° 123). Dès lors, on est ramené au corollaire du numéro précédent.

2° *Le nombre P des racines positives ne peut dépasser le nombre V des variations.* — C'est évident pour une équation du premier degré, pour laquelle on a visiblement $P = V$. Raisonnons maintenant *par récurrence* et prouvons que, si la propriété est exacte pour les polynômes de degré $m - 1$, elle l'est aussi pour les polynômes de degré m .

En effet, soient $x_1, x_2, \dots, x_p$ les racines positives distinctes du

polynôme $f(x)$, supposé de degré m , et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ leurs ordres respectifs de multiplicité. On a

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p.$$

Considérons maintenant la dérivée $f'(x)$. D'après le théorème I du n° 226, elle admet les racines $x_1, x_2, \dots, x_p$ aux ordres $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_p - 1$. En vertu du théorème de Rolle (n° 61), elle a au moins une racine dans chacun des $p - 1$ intervalles $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{p-1}, x_p)$. Le nombre total P' de ses racines positives est donc au moins égal à $(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \dots + (\alpha_p - 1) + (p - 1) = P - 1$. On a donc l'inégalité

$$(3) \quad P' \geq P - 1.$$

En second lieu, les coefficients de $f'(x)$ se déduisent de ceux de $f(x)$ en les multipliant par des nombres positifs, sauf pour le terme constant de $f(x)$, qui est supprimé. Il s'ensuit évidemment que les variations de $f'(x)$ sont en nombre V' égal à V ou à $V - 1$, suivant que les deux derniers termes de $f(x)$ présentent une permanence ou une variation. En tous cas, on a

$$(4) \quad V' \geq V.$$

Or, $f'(x)$ étant de degré $m - 1$, on a $P' = V'$; donc, *a fortiori*, d'après (3) et (4),

$$P - 1 \leq V, \quad P \leq V + 1.$$

Mais P ne peut être égal à $V + 1$, à cause de (1) : donc $P = V$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Le nombre des racines négatives est au plus égal au nombre des variations de $f(-x)$ et, s'il en diffère, c'est par un nombre pair.*

233. Si l'on appelle V et V' les nombres de variations de $f(x)$ et de $f(-x)$, le nombre total de racines réelles est au plus égal à $V + V'$, en supposant toutefois qu'il n'y ait pas de racine nulle. C'est une conséquence évidente du théorème de Descartes et de son corollaire. On est ainsi conduit assez naturellement à étudier les propriétés de la somme $V + V'$.

THÉORÈME. — Si m est le degré du polynôme et si $f(0) \neq 0$, on a : $V + V' = m - 2K$, K étant un entier positif ou nul.

En effet, supposons d'abord le polynôme complet. Les exposants de deux termes consécutifs quelconques diffèrent d'une unité et n'ont donc pas même parité. Il en résulte que, si ces deux termes ont le même signe dans $f(x)$, ils ont des signes opposés dans $f(-x)$, et inversement. Autrement dit, chaque couple de termes consécutifs fournit une unité dans $V + V'$. Comme il y a en tout m semblables couples, on a $V + V' = m$.

Supposons maintenant le polynôme incomplet, mais possédant toutefois un terme constant. Complétons-le par des termes intermédiaires quelconques. Soient V_1 et V'_1 les nombres de variations relatifs au polynôme ainsi obtenu. On a $V_1 + V'_1 = m$, d'après le cas examiné ci-dessus. D'autre part, le théorème du n° 251 nous apprend que $V = V_1 - 2\lambda$, $V' = V'_1 - 2\lambda'$, λ et λ' désignant deux entiers positifs ou nuls. Donc $V + V' = V_1 + V'_1 - 2\lambda - 2\lambda' = m - 2K$.

C. Q. F. D.

254. THÉORÈME. — Si $f(x)$ a toutes ses racines réelles, on a exactement

$$(5) \quad P = V, \quad N = V'.$$

Nous pouvons, d'après une remarque déjà faite (n° 252), nous borner au cas où il n'y a pas de racine nulle. On a alors

$$(6) \quad P + N = m.$$

D'autre part, $P + N \leq V + V' = m$. Ces inégalités ne sont compatibles avec (6) que si l'on a

$$P + N = V + V',$$

ou

$$(V - P) + (V' - N) = 0.$$

Aucun des deux nombres $V - P$ et $V' - N$ ne pouvant être négatif (n° 252), ils sont tous deux nuls et le théorème est démontré.

255. **Racines comprises entre deux nombres donnés.** — Le théorème de Descartes permet d'obtenir des renseignements sur le nombre des racines comprises entre deux nombres donnés a et b . Il suffit en

effet de faire la transformation homographique (n° 244) $y = \frac{x-a}{b-x}$; il est manifeste que les racines de l'équation proposée qui sont comprises entre a et b correspondent aux racines positives de l'équation transformée, à laquelle il suffit dès lors d'appliquer le théorème de Descartes. En particulier, si l'on sait que $f(x)$ a toutes ses racines réelles, comme il en est alors de même des racines en y , on pourra calculer exactement le nombre des racines en x comprises entre a et b .

256. Limites des racines. — Proposons-nous de déterminer deux nombres positifs, aussi rapprochés que possible, entre lesquels nous puissions affirmer que sont comprises toutes les racines positives. Ces deux nombres seront appelés *limites supérieure et inférieure des racines positives*. On a de même une *limite supérieure* et une *limite inférieure des racines négatives*.

On peut ramener la recherche de ces quatre limites à des recherches de limite supérieure de racines positives. En effet, pour avoir la limite inférieure des racines positives, il suffit de calculer une limite supérieure des racines positives de l'équation aux inverses. Pour ce qui concerne les racines négatives, on prendra l'équation transformée en $-x$.

Limite supérieure des racines positives. — Il existe différents procédés pour calculer cette limite. Les uns sont assez rapides, mais donnent une limite peu rapprochée de la plus grande racine; les autres donnent une limite avantageuse, mais exigent des calculs assez longs.

Nous supposons, dans tout ce qui suit, que $f(x)$ est ordonné suivant les puissances décroissantes de x et que son premier coefficient est positif. Dans ces conditions, si a est une limite supérieure des racines positives, $f(x)$ est positif dès que $x > a$. En effet, dans l'intervalle $(a, +\infty)$, $f(x)$ garde un signe constant, puisqu'il ne s'y trouve pas de racine; de plus, $f(+\infty)$ a le signe du premier coefficient, c'est-à-dire le signe $+$.

Cela posé, voici les règles qui nous semblent les plus pratiques.

257. Règle de Newton. — Si a est limite supérieure pour $f'(x)$ et rend $f(x)$ positif, c'est aussi une limite supérieure pour $f(x)$.

En effet, si x croît à partir de a , $f'(x)$ reste positif, donc $f(x)$ croît; comme $f(a) > 0$, $f(x)$ reste positif et ne peut s'annuler pour $x \geq a$.

C. Q. F. D.

Pour appliquer cette règle, on commence par chercher une limite supérieure des racines de $f'(x)$, soit A . Puis on substitue dans $f(x)$ des nombres simples croissant à partir de A jusqu'à ce qu'on obtienne un résultat positif. Le dernier nombre ainsi substitué est la limite a cherchée. Si l'on ne sait pas trouver directement la limite supérieure relative à $f'(x)$, on lui applique la même méthode, en introduisant $f''(x)$; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un polynôme dont on sache trouver la limite supérieure des racines, ce qui finit toujours par arriver, dût-on pousser jusqu'à la dérivée du premier degré.

Ce procédé donne des limites avantageuses, mais il est parfois un peu long. En voici deux autres qui reposent sur le théorème suivant :

258. THÉORÈME. — *Si $f(x)$ ne présente qu'une variation, tout nombre positif qui le rend positif est limite supérieure des racines.*

Soit le polynôme

$$(7) \quad f(x) = \Lambda_0 x^m + \Lambda_1 x^{m-1} + \dots + \Lambda_{p-1} x^{m-p+1} + (\Lambda_p x^{m-p} + \Lambda_{p+1} x^{m-p-1} + \dots),$$

où les Λ sont tous positifs. On peut écrire

$$f(x) = x^{m-p} \left[(\Lambda_0 x^p + \Lambda_1 x^{p-1} + \dots + \Lambda_{p-1} x) + \left(\Lambda_p + \frac{\Lambda_{p+1}}{x} + \dots \right) \right].$$

Supposons que x croisse à partir de $a > 0$. La première parenthèse croît, parce que tous ses termes croissent; la seconde décroît parce que tous ses termes décroissent; donc le crochet croît. Or, si $f(a) > 0$, il part d'une valeur positive; donc, il reste positif, et par suite aussi $f(x)$, puisque $x^{m-p} > 0$. Dès lors, $f(x)$ n'a pas de racine supérieure à a .

C. Q. F. D.

Cela posé, nous avons les deux règles suivantes :

RÈGLE DES GROUPEMENTS. — *On décompose $f(x)$ en une somme de polynômes $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_p(x)$, dont chacun remplit les conditions précédentes (avoir un premier coefficient positif et ne*

présenter qu'une variation). On cherche pour chacun d'eux un nombre qui le rende positif. Le plus grand de tous ces nombres, soit α , est une limite supérieure pour $f(x)$: car, pour $x > \alpha$, chacun des polynômes z est positif, donc aussi leur somme $f(x)$.

REGLE DE LAGRANGE. — Soient N la plus grande valeur absolue de coefficient négatif et p la différence entre le degré de $f(x)$ et le degré du premier terme négatif. Une limite supérieure des racines est $1 + \sqrt[p]{\frac{N}{\Lambda_0}}$.

Écrivons $f(x)$ en mettant en évidence le premier terme négatif,

$$f(x) = \Lambda_0 x^m + \Lambda_1 x^{m-1} + \dots + \Lambda_{p-1} x^{m-p+1} + (\Lambda_p x^{m-p} \pm \dots),$$

les Λ étant tous positifs jusqu'à Λ_p inclusivement, les termes non écrits dans la parenthèse ayant des signes quelconques. En supposant $x > 0$, nous augmenterons la parenthèse si nous remplaçons tous les coefficients par N , puisque nous augmenterons chaque terme. On a donc

$$f(x) > \Lambda_0 x^m + \Lambda_1 x^{m-1} + \dots + \Lambda_{p-1} x^{m-p+1} + N(x^{m-p} + x^{m-p-1} + \dots + x + 1)$$

et, *a fortiori*,

$$f(x) > \Lambda_0 x^m + N \frac{x^{m-p+1} - 1}{x - 1} = \Lambda_0 x^m + \frac{N x^{m-p+1}}{x - 1} + \frac{N}{x - 1}.$$

Si l'on suppose $x > 1$, on peut écrire, à plus forte raison,

$$f(x) > \Lambda_0 x^m + \frac{N x^{m-p+1}}{x - 1}.$$

Dans ces conditions, $f(x)$ sera certainement positif si l'on a

$$\Lambda_0 x^m + \frac{N x^{m-p+1}}{x - 1} > 0;$$

ou, en se rappelant que x et $x - 1$ sont positifs,

$$\Lambda_0 x^{p-1}(x - 1) + N > 0,$$

inégalité entraînée par la suivante

$$\Lambda_0(x - 1)^p + N > 0.$$

ou

$$(8) \quad \begin{aligned} x-1 &> \sqrt[p]{\frac{N}{\Lambda_0}}, \\ x &> 1 + \sqrt[p]{\frac{N}{\Lambda_0}}. \end{aligned}$$

Comme le second membre est > 1 , on peut affirmer que, dès que x vérifie l'inégalité (8), $f(x)$ demeure positif, et la règle est démontrée.

La règle de Lagrange est d'une application rapide, mais elle donne souvent une limite beaucoup trop élevée.

Remarque. — Quelle que soit la règle employée, on prend toujours des nombres simples pour la limite cherchée, tels que des nombres entiers ou des fractions ne présentant haut et bas qu'un chiffre significatif. Il serait absurde en effet de calculer, par exemple, la limite de Lagrange avec un grand nombre de décimales, puisque cette limite est généralement peu approchée.

259. Racines commensurables. — Étant donnée une équation à coefficients commensurables, on peut se proposer de rechercher si elle a des racines commensurables. C'est par cette question que nous terminerons ce Chapitre.

Observons d'abord qu'on peut toujours ramener l'équation à avoir tous ses coefficients entiers, en la multipliant par un entier convenable.

Soit donc l'équation

$$(9) \quad f(x) \equiv \Lambda_0 x^m + \Lambda_1 x^{m-1} + \dots + \Lambda_m = 0,$$

où les Λ sont tous entiers, Λ_0 et Λ_m étant supposés $\neq 0$. Imaginons que la fraction irréductible $\frac{\alpha}{\beta}$ soit racine. On peut alors diviser $f(x)$ par $x - \frac{\alpha}{\beta}$ ou par $1 - \frac{\alpha}{\beta}x$, suivant qu'on veut procéder suivant les puissances décroissantes ou croissantes de x (nos 203 et 204), ce qui donne lieu aux deux identités

$$(10) \quad f(x) = \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) (B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \dots + B_{m-1}),$$

$$(11) \quad f(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}x\right) (B'_0 x^m + B'_1 x^{m-1} + \dots + B'_{m-1} x^{m-1}),$$

les coefficients B et B' se calculant par la règle de la page 262. On a d'ailleurs entre eux des relations telles que la suivante :

$$(12) \quad \frac{B_k}{\beta} = -\frac{B'_{m-k-1}}{z} = C_k,$$

C_k étant le coefficient de x^{m-k-1} dans le polynome $\frac{f(x)}{\beta x - z}$. De là, nous allons déduire que *les C_k sont tous entiers*.

En effet, si l'on se reporte à la règle de division par $x - a$, on constate que les B sont obtenus par des opérations qui ne comportent que des additions et des multiplications par $\frac{z}{\beta}$. Comme le premier coefficient $B_0 = A_0$ est entier, les suivants ne peuvent, s'ils sont fractionnaires, renfermer en dénominateur que des facteurs premiers de β . De même, les B' ne peuvent renfermer en dénominateur que des facteurs premiers de z. Dès lors, si C_k était fractionnaire, son dénominateur ne pourrait contenir que des facteurs premiers appartenant à β , parce que $C_k = \frac{B_k}{\beta}$, et appartenant à z, parce que $C_k = -\frac{B'_{m-k-1}}{z}$. Comme z et β n'ont pas de facteurs communs, puisque $\frac{z}{\beta}$ a été supposée irréductible, tous les C_k sont nécessairement des nombres entiers, ainsi que nous l'avions affirmé.

Il revient au même de dire que *tous les B doivent être entiers et divisibles par β et tous les B' entiers et divisibles par z*.

En particulier, $B_0 = A_0$ doit être divisible par β , et $B'_0 = A_m$ doit l'être par z. Donc :

THÉORÈME. — *Si une fraction irréductible est racine, son numérateur doit diviser le terme constant et son dénominateur doit diviser le coefficient de la plus haute puissance de x.*

Nous pouvons maintenant énoncer la règle suivante pour la recherche des racines commensurables de $f(x)$:

RÈGLE. — *On forme le tableau des diviseurs de A_0 et le tableau des diviseurs de A_m . Puis, on divise les seconds par les premiers en les associant de toutes les manières possibles. Les fractions ainsi formées sont réduites à leur plus simple expression ; puis, précédées du signe + et du signe —, elles constituent la liste des fractions à essayer.*

Pour essayer une fraction $\frac{x}{p}$, on divise, suivant la règle de la page 262, $f(x)$ par $x - \frac{x}{p}$ ou par $1 - \frac{p}{x}x$. Dès qu'on obtient un coefficient fractionnaire, ou bien entier mais non divisible par p dans le premier cas, par x dans le second, on peut rejeter la fraction. Si, au contraire, la division se poursuit jusqu'au bout et donne un reste nul, $\frac{x}{p}$ est racine.

260. *Simplifications diverses.* — I. Lorsqu'un essai réussit, il faut bien remarquer qu'on a, du même coup, le quotient de $f(x)$ par $x - \frac{x}{p}$. C'est sur ce quotient qu'il convient de continuer les recherches, parce qu'il est plus simple que $f(x)$, comme ayant un degré moindre. En particulier, il peut arriver que tous les coefficients de ce quotient soient divisibles par un même facteur. Ayant supprimé ce facteur, il y aura lieu de rayer du tableau des fractions à essayer toutes celles dont le numérateur ou le dénominateur ne divisent pas le dernier ou le premier coefficient du quotient ainsi simplifié.

II. On peut diminuer le nombre des essais en cherchant les limites des racines, comme il a été expliqué plus haut; et aussi quelquefois en appliquant le théorème de Descartes.

III. On peut enfin supprimer également certains essais en se servant de la règle suivante, connue sous le nom de

RÈGLE D'EXCLUSION. — Pour que $\frac{x}{p}$ soit racine de $f(x)$, il faut que $f(1)$ soit divisible par $x - \frac{x}{p}$ et $f(-1)$ par $x + \frac{x}{p}$.

En effet, nous avons vu que le quotient $\frac{f(x)}{p \cdot x - x}$ est un polynôme dont les coefficients C_k sont tous entiers. Si l'on y remplace x par un nombre entier, on doit donc obtenir un résultat entier. En particulier, $\frac{f(1)}{p - 1}$ et $\frac{f(-1)}{-p - 1}$ doivent être entiers, ce qui démontre la règle.

Il est à remarquer que les nombres $f(1)$ et $f(-1)$, qu'on calcule une fois pour toutes, sont tout simplement la somme des coefficients de $f(x)$ ou de $f(-x)$ et, par suite, s'obtiennent très rapidement.

IV. Pour faire un essai, on a le choix entre la division par $x - \frac{\alpha}{\beta}$ ou par $1 - \frac{\beta}{\alpha}x$. Il y a avantage à adopter la première ou la seconde méthode *suivant que β est plus grand ou plus petit que α* , de façon à avoir plus de chances d'obtenir rapidement un coefficient fractionnaire dans le cas où $\frac{\alpha}{\beta}$ ne serait pas racine.

261. Racines entières. — Si $\Lambda_0 = 1$, $f(x)$ ne peut avoir comme racines commensurables que des racines entières, puisque le dénominateur d'une telle racine doit diviser Λ_0 . Or, on peut aisément se ramener toujours à ce cas particulier. Si l'on fait en effet subir à l'équation la transformation $y = kx$, l'équation transformée s'écrit

$$\Lambda_0 y^m + \Lambda_1 k y^{m-1} + \Lambda_2 k^2 y^{m-2} + \dots = 0.$$

Prenons $k = \Lambda_0$; nous pourrions diviser par Λ_0 et nous serions bien ramenés à une équation à coefficients entiers, de premier coefficient égal à l'unité. On peut donc dire que *la recherche des racines commensurables d'une équation à coefficients entiers peut toujours être ramenée à la recherche des racines entières d'une autre équation à coefficients entiers*.

CHAPITRE XXII.

ÉQUATIONS À COEFFICIENTS NUMÉRIQUES

---

262. Dans les Chapitres qui précèdent, nous ne nous sommes jamais occupés de la résolution des équations que nous avons eu à considérer. C'est cependant là un point de vue tout à fait essentiel dans la pratique, que nous allons maintenant envisager.

Le lecteur connaît la résolution des équations du premier et du second degré. Pour cette dernière, il existe, comme on sait, une formule toute faite qui donne les deux racines. On peut dès lors se demander si un tel résultat n'est pas généralisable. Cela est vrai pour le troisième et le quatrième degré ⁽¹⁾. Mais, à partir du cinquième degré, on ne peut, comme on dit, *résoudre l'équation par radicaux*, c'est-à-dire calculer ses racines au moyen d'un nombre fini d'additions, multiplications, divisions, extractions de racines; du moins tant que les coefficients sont quelconques. Pour certaines valeurs de ceux-ci, il peut se faire bien entendu qu'on sache résoudre, comme cela arrive par exemple si l'on a découvert un nombre suffisant de racines commensurables. Mais les cas où il en est ainsi sont exceptionnels; en général, l'équation est, comme on dit, *irréductible* et n'est pas soluble par radicaux. Nous ne pouvons en dire davantage sur ce sujet, qui constitue un des Chapitres les plus savants de l'Algèbre supérieure.

Le point de vue de la résolution par radicaux n'offre du reste aucun intérêt pratique, car dans les cas où elle est possible (équation du second degré exceptée), elle conduit à des formules tellement compliquées qu'elles sont généralement inutilisables. Même pour l'équation du second degré, la formule classique est peu commode

---

⁽¹⁾ Cf. Exercices résolus n° 1 (Chap. XVIII), n° 1 (Chap. XXI); exercices proposés n° 4 et 13 (Chap. XX).

dès qu'on a affaire à des coefficients un peu compliqués et la résolution trigonométrique est, comme on sait, bien préférable. Nous verrons (t. III) qu'il existe une méthode trigonométrique analogue pour l'équation du troisième degré. A part ces deux cas particuliers, il faut faire appel à des *méthodes générales d'approximation*, qui permettent, théoriquement du moins, de *calculer les racines de n'importe quelle équation numérique donnée, algébrique ou transcendante, avec une approximation aussi grande qu'on le désire*. C'est en cela que consiste le véritable problème de la résolution des équations numériques.

263. Séparation des racines. — Une opération préliminaire indispensable est celle de la *séparation des racines*. Elle consiste à chercher des *nombre*s *séparant les racines, c'est-à-dire partageant l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$ *en intervalles partiels à l'intérieur de chacun desquels se trouve une racine et une seule* ⁽¹⁾.

Soit à séparer les racines de l'équation

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

$f(x)$ désignant une fonction quelconque donnée, algébrique ou transcendante. La méthode générale consiste à étudier les variations de la fonction $y = f(x)$. Cette étude conduit en effet à partager l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en intervalles partiels, à l'intérieur de chacun desquels $f(x)$ varie d'une manière continue et toujours dans le même sens. Dans un tel intervalle, la fonction ne peut s'annuler qu'une fois ⁽²⁾ et l'on reconnaît qu'elle s'annule effectivement à ce fait qu'elle prend des signes opposés aux deux extrémités de l'intervalle. D'où la règle suivante :

RÈGLE. — *On étudie les variations de la fonction $f(x)$. On construit le tableau de variations. On détermine les signes* ⁽³⁾

(1) Bien entendu, s'il n'y a pas de racines, ces intervalles n'existent pas. Mais, dans ce cas, le problème de la séparation consiste précisément à prouver qu'il n'y a pas de racines.

(2) C'est là une propriété tout à fait intuitive. Dans le cas où $f'(x)$ existe dans tout l'intervalle et ne s'y annule pas, on peut la déduire du théorème de Rolle (n° 61), car si $f(x)$ s'annulait deux fois, $f'(x)$ s'annulerait au moins une fois.

(3) Les signes seuls importent; il est donc inutile, lorsqu'on n'a pas d'autre raison pour le faire, de déterminer exactement les valeurs de $f(x)$ aux limites des intervalles, si l'on peut apercevoir leurs signes.

de la fonction aux extrémités des intervalles partiels qui figurent dans ce tableau. Un intervalle renferme une ou zéro racine suivant que les signes aux extrémités sont opposés ou identiques.

Il est évident que ce procédé résout complètement le problème que nous nous étions posé, mais à condition, bien entendu, qu'on sache étudier les variations de $f(x)$, c'est-à-dire en somme résoudre la dérivée $f'(x)$, ou du moins reconnaître ses changements de signe (n° 66).

264. *Remarques.* — I. D'après la règle ci-dessus, il faut, à un moment donné, former les résultats de substitution dans $f(x)$ des racines de $f'(x)$. Ce calcul peut être simplifié dans le cas où $f(x)$ est un polynôme par ce fait qu'on peut substituer soit dans le reste de division de $f(x)$ par $f'(x)$, soit dans la dérivée par rapport à la variable d'homogénéité (n° 227). Cela résulte en effet des identités de la division ou d'Euler,

$$f(x) = f'(x)Q + R(x), \quad mf(x) \equiv xf'(x) + f_y,$$

dans lesquelles on remplacerait x par une racine de $f'(x)$.

II. Il arrive assez fréquemment qu'on ne sait pas étudier les variations de $f(x)$, mais qu'on sait étudier les variations de la fonction obtenue en multipliant ou divisant $f(x)$ par un facteur convenablement choisi. Ceci nous prouve qu'il ne faut pas toujours laisser à l'équation la forme sous laquelle elle est donnée. Il faut, par un examen préliminaire rapide, se rendre compte des difficultés qu'on rencontrera dans l'étude des variations de son premier membre et voir s'il n'est pas possible de faciliter celle-ci en multipliant ou divisant au préalable l'équation par un facteur convenable. Bien entendu, on doit, le cas échéant, tenir compte des racines qui peuvent être introduites ou supprimées par ce facteur.

III. On peut aussi quelquefois faciliter considérablement l'étude de l'équation en lui faisant subir une transformation convenable (Chap. XX) et discutant l'équation transformée. Par exemple, il peut être avantageux d'utiliser l'équation aux inverses.

IV. Lorsqu'on ne peut mettre l'équation sous une forme telle qu'on sache résoudre d'une manière élémentaire l'équation dérivée, on n'a

plus qu'à appliquer à cette dernière la méthode actuelle, ce qui introduit la dérivée seconde. On peut, de la sorte, être amené à *discuter successivement plusieurs dérivées*. Bien entendu, il faut pour chacune d'elles essayer les remarques II et III.

265. Types classiques d'équations discutables. — Voici quelques types d'équations qu'il est bon de retenir, pour lesquelles on peut toujours mener jusqu'au bout le problème de la séparation des racines.

I. *Équations trinômes.* — $x^m + p.x^n + q = 0$. — L'équation dérivée se ramène à une équation binôme; elle est donc résoluble. A ce type appartient *l'équation canonique du troisième degré*

$$(2) \quad f(x) \equiv x^3 + p.x + q = 0,$$

dont il faut connaître la discussion. La dérivée $f'(x) \equiv 3x^2 + p$ ne change de signe que si $p < 0$. Si $p \geq 0$, elle est essentiellement positive, $f(x)$ croît et n'a qu'une racine. Supposons maintenant $p < 0$. Formons le tableau de variations

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$	$+\sqrt{-\frac{p}{3}}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	f_1	f_2	$+$

Pour qu'il y ait une racine dans chaque intervalle, il faut et suffit que $f_1 > 0$, $f_2 < 0$. Ceci exige $f_1 f_2 < 0$; mais cette dernière condition nécessaire est aussi suffisante, car le tableau nous apprend que $f_1 > f_2$; par suite, si f_1 et f_2 sont de signes contraires, c'est nécessairement f_1 qui est positif et f_2 négatif. Rappelons-nous maintenant qu'on peut remplacer f_1 et f_2 par g_1 et g_2 , résultats de substitution dans $g(x) = f'_v = 2px + 3q$. On a donc la condition

$$\left(-2p\sqrt{-\frac{p}{3}} + 3q\right)\left(2p\sqrt{-\frac{p}{3}} + 3q\right) < 0,$$

$$9q^2 - 4p^2\left(-\frac{p}{3}\right) < 0,$$

$$(3) \quad 4p^3 - 27q^2 > 0.$$

Comme cette inégalité exige nécessairement $p < 0$, elle constitue *l'unique condition de réalité des trois racines de l'équation (2)*.

Si $\{p^3 + 27q^2 > 0$, il n'y a qu'une racine; si $\{p^3 + 27q^2 = 0$, il y a une racine double égale à l'une des quantités $\pm \sqrt[3]{-\frac{p}{3}}$, ou mieux égale à $-\frac{3q}{2p}(\frac{1}{3})$, et une racine simple comprise entre $\mp \sqrt[3]{-\frac{p}{3}}$ et $\pm \infty$.

II. $x^m + px^{m-n} + qx^{m-2n} + r = 0$. — L'équation dérivée

$$mx^{m-1} + (m-n)px^{m-n-1} + (m-2n)qx^{m-2n-1} = 0$$

s'écrit, après suppression des racines nulles,

$$mx^{2n} + (m-n)px^n + (m-2n)q = 0$$

et se ramène à une équation du second degré par la transformation $y = x^n$.

A ce type appartient l'équation complète du troisième degré

$$(4) \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

que nous allons discuter. Prenons la dérivée

$$(5) \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Si elle n'a pas deux racines réelles et distinctes, on n'a, comme tout à l'heure, qu'une seule racine réelle. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse contraire et soient x_1, x_2 les racines de $f'(x)$. Formons le tableau, en supposant, pour fixer les idées, $x_1 < x_2$ et $a > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$b_1 \searrow$	$b_2 \nearrow$	$+\infty$

En raisonnant comme pour l'équation canonique, on a, comme condition de réalité des trois racines, $f_1 f_2 < 0$, ou

$$(6) \quad g(x_1)g(x_2) < 0,$$

en posant

$$(7) \quad g(x) = f_3 = bx^2 + 2cx + 3d.$$

Or, $g(x_1)g(x_2)$ est, au facteur $9a^2$ près, le résultant des tri-

(*) Car elle doit annuler f_3 .

nomes (5) et (7). L'inégalité (6) peut donc s'écrire immédiatement (n° 234)

$$(8) \quad (9ad - bc)^2 - 4(3ac - b^2)(3bd - c^2) < 0.$$

Elle entraîne d'ailleurs la réalité des racines de $f'(x)$ (n° 234).

Finalement, l'inégalité (8) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (4) ait ses trois racines réelles.

III. $x^m - px^{2n} + qx^n - r = 0$ ($2n < m$). — Elle se ramène au type précédent par la considération de l'équation aux inverses. A ce type appartient l'équation

$$x^3 - px^2 + qx + r = 0,$$

à laquelle se ramène, comme on sait (n° 242, I), l'équation générale du quatrième degré.

266. Méthodes d'approximation. — La séparation étant faite, nous avons à résoudre autant de fois qu'on a découvert de racines le problème suivant :

Sachant que dans l'intervalle (a, b) l'équation (1) admet une racine et une seule, calculer cette racine avec une approximation donnée.

Voici quel est le principe général qui va nous guider. Supposons l'intervalle (a, b) assez resserré pour que la fonction $f(x)$ y soit

continue et y admette une dérivée qui garde constamment le même signe ⁽¹⁾. Construisons l'arc de courbe représentatif correspondant,

(1) Ces deux conditions sont toujours remplies si l'intervalle (a, b) est un des intervalles du tableau de variation précédemment formé pour la séparation des racines.

soit AB (fig. 39). Cet arc coupe Ox en un point unique C, dont l'abscisse est la racine cherchée.

Cela posé, imaginons qu'on remplace l'arc AB par une droite Δ qui s'en rapproche le plus possible. Cette droite coupera Ox en un point C_1 voisin de C et dont l'abscisse, donnée par une équation du premier degré, constituera une valeur approchée de la racine cherchée.

Suivant la manière de choisir la droite Δ , on obtient telle ou telle méthode d'approximation.

267. Méthode des parties proportionnelles. — En remplaçant l'arc AB par sa corde, on obtient la méthode des parties proportionnelles, ainsi nommée parce qu'elle revient à admettre que, dans l'intervalle (a, b) , la fonction $f(x)$ varie proportionnellement à x . L'équation de la droite AB est (t. II)

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Faisons $y = 0$, nous avons l'abscisse du point C_1 , soit

$$(9) \quad x_1 = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Plaçons-nous dans le cas de la figure 39. Nous voyons que x_1 est une valeur approchée de la racine dans le même sens que b (ici par excès), mais plus approchée que b .

La parallèle à Oy menée par C_1 rencontre la courbe en B_1 . Si l'on joint AB_1 , on obtient le point C_2 plus approché de C que C_1 ; l'abscisse x_2 de ce point, qui se déduit de (9) par le changement de x_1 en x_2 et de b en x_1 , est encore une valeur approchée de la racine dans le même sens que x_1 , mais plus approchée que x_1 . En remplaçant ensuite B_1 par B_2 , on obtiendra une troisième valeur approchée x_3 et ainsi de suite. La figure montre que les points $C_1, C_2, C_3, \dots$ se rapprochent de plus en plus de C et l'on conçoit qu'on finisse, au bout d'un nombre suffisant d'opérations, par obtenir un point C_n aussi voisin qu'on le voudra du point C. Autrement dit, l'application suffisamment répétée de la formule de récurrence

$$(10) \quad x_n = \frac{af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)},$$

finir par donner pour x_n une valeur aussi approchée de la racine qu'on le désire et dans le même sens que b .

268. *Remarques.* — I. Au lieu de faire jouer à B_1 le rôle de B , on aurait pu vouloir lui faire jouer le rôle de A , c'est-à-dire joindre $B_1 B$ et non $B_1 A$. Mais le point C_2 qu'on aurait obtenu ne se serait plus trouvé du même côté de C que C_1 et il aurait même pu sortir du segment $C_1 a$ (ce qui est le cas sur la figure).

Autrement dit, la deuxième valeur approchée n'aurait plus été approchée dans le même sens que la première et aurait pu être moins approchée qu'elle. Ceci nous montre que c'est nécessairement au point A qu'on doit joindre les points successifs $B_1, B_2, \dots$. On dit qu'on applique la méthode au point B , ou encore au nombre b .

II. Dans le cas de la figure 40, on voit que c'est au point A qu'il convient d'appliquer la méthode. Dans le cas de la figure 41, on rencontre des difficultés. Quel que soit le point auquel on applique la méthode, x_2 n'est plus approché dans le même sens que x_1 et l'on n'est pas certain qu'il soit plus approché.

Fig. 40.

Il s'agit de savoir reconnaître analytiquement ces différentes circonstances. A cet effet, nous observons que sur la figure 39, l'arc AB tourne constamment sa concavité vers le haut; donc (t. II) $f''(x)$ garde le signe $+$ dans tout l'intervalle (a, b) . Pour la figure 40, $f''(x)$ garde au contraire le signe $-$. Dans les deux cas, on voit que le signe constant de $f''(x)$ est opposé au signe de l'ordonnée du point auquel on applique la méthode. Quant à la figure 41, elle nous montre qu'il y a un point d'inflexion; donc, $f''(x)$ s'annule dans l'intervalle (a, b) et change de signe. De cette discussion, on peut induire la règle suivante :

Pour que la méthode soit applicable à coup sûr dans l'inter-

valle (a, b) , il faut que la dérivée seconde $f''(x)$ y conserve un signe constant. S'il en est ainsi, il faut appliquer la méthode à celui des deux nombres a et b qui, substitué dans $f(x)$, donne un résultat de signe contraire à celui de $f''(x)$.

Fig. 41.

Cette règle vient d'être établie d'une manière en quelque sorte empirique. Néanmoins, elle est entièrement rigoureuse, car on peut en donner une démonstration purement analytique, mais dont la place n'est pas dans cet Ouvrage.

269. **Méthode de Newton.** — La méthode de Newton consiste à remplacer l'arc AB par la tangente en l'une de ses extrémités. Sur la figure 42, on voit que, pour être certain d'avoir une approxi-

Fig. 42.

mation meilleure, il faut prendre la tangente en A, ou, comme on dit, *appliquer la méthode au point A ou au nombre a*. L'équation de la tangente en A est (1. II)

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Faisons $y = 0$, nous avons l'abscisse du point C_1 , soit

$$(11) \quad x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Cette valeur est plus approchée que a et dans le même sens. Remplaçons maintenant le point A par le point A_1 d'abscisse x_1 : cela nous donne une valeur x_2 plus approchée que x_1 et dans le même sens; on la déduit de (11) par le changement de x_1 en x_2 et de a en x_1 . En remplaçant ensuite A_1 par A_2 , on obtiendra une troisième valeur approchée x_3 et ainsi de suite. La figure montre que les points $C_1, C_2, C_3, \dots$ se rapprochent de plus en plus de C et peuvent en devenir aussi voisins qu'on le veut. Autrement dit, *l'application suffisamment répétée de la formule de récurrence*

$$(12) \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

finit par donner pour x_n une valeur aussi approchée de la racine qu'on le désire et dans le même sens que a .

270. Remarque. — Sur les figures 39 et 40, on voit que *la méthode actuelle s'applique à celui des points A et B auquel la méthode des parties proportionnelles ne s'applique pas.*

Quant à la figure 43, elle montre que, dans le cas où la dérivée

Fig. 43.

seconde s'annule, la méthode ne s'applique à aucun des deux points et peut donner pour x_1 une valeur beaucoup moins approchée que ne l'étaient les nombres a et b . D'où la règle suivante :

Pour que la méthode de Newton soit applicable à coup sûr dans l'intervalle (a, b) , il faut que la dérivée seconde $f''(x)$ y conserve un signe constant. S'il en est ainsi, il faut appliquer la méthode à celui des deux nombres a et b qui, substitué dans $f(x)$, donne un résultat de même signe que $f''(x)$.

Comme celle du numéro précédent, cette règle, que nous venons d'établir empiriquement, est susceptible d'une démonstration analytique entièrement rigoureuse.

271. Limite de l'erreur. — Quelle que soit la méthode employée, il est nécessaire de savoir calculer une limite supérieure de l'erreur commise en adoptant telle ou telle valeur approchée de la racine. Une première façon de procéder consiste à *appliquer simultanément les deux méthodes*, en remarquant qu'elles donnent des valeurs approchées en sens inverse. On obtient de la sorte deux suites convergentes de valeurs approchées, les unes par défaut, les autres par excès. *La différence des derniers termes calculés dans ces deux suites est évidemment une limite supérieure de l'erreur commise.*

Dans le cas de la méthode de Newton, il existe une autre manière de procéder, généralement plus avantageuse. Supposons qu'on applique la méthode au nombre a . Appelons $a + k$ la racine exacte que nous cherchons. Nous voulons une limite supérieure de la différence $\varepsilon = a + k - x_1$. A cet effet, écrivons que $f(a + k)$ est nul, mais en le développant par la formule de Taylor limitée au troisième terme :

$$(13) \quad f(a + k) = f(a) + k f'(a) + \frac{k^2}{2} f''(a + \theta k) = 0.$$

La méthode de Newton consiste en somme à supposer que k est assez petit pour que le troisième terme soit négligeable, car si l'on fait abstraction de ce dernier, l'équation (13) donne pour k une valeur qui, ajoutée à a , reproduit x_1 [formule (11)].

Nous aurons l'erreur commise en résolvant (13) par rapport à k , mais sans négliger le troisième terme, en le traitant comme un terme connu : ce qui donne

$$k = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{k^2}{2} \frac{f''(a + \theta k)}{f'(a)};$$

d'où

$$(14) \quad \varepsilon = a + k - x_1 = a + k - a - \frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{k^2}{2} \frac{f''(a + \theta k)}{f'(a)}.$$

Telle est l'erreur commise. Bien entendu, on ne la connaît pas, puisqu'on ne connaît pas k . Mais on peut avoir une limite supérieure de sa valeur absolue. Nous possédons en effet toujours un intervalle, quand ce ne serait que (a, b) , dans lequel est certainement comprise la racine. Nous avons donc une limite supérieure assurée h de $|k|$, par exemple $h = b - a$. D'autre part, soit M la plus grande valeur

de $|f'''(x)|$ dans l'intervalle dont il vient d'être question. On a évidemment

$$(15) \quad |\varepsilon| < \frac{h^2}{2} \frac{M}{|f''(a)|}.$$

Telle est la formule que nous avons en vue. Elle est très avantageuse, surtout lorsque l'intervalle (a, b) est déjà suffisamment resserré; car, dans ce cas, h étant petit, h^2 l'est beaucoup plus et l'on peut arriver tout de suite à une approximation considérable.

Remarque. — Voici une remarque assez importante sur l'application de la formule (15). On commence par y faire $h = |b - a|$; on en déduit alors une limite supérieure ε_1 de $|\varepsilon|$. Mais on peut en déduire immédiatement un intervalle plus petit que $|b - a|$ comprenant à coup sûr la racine. Si l'on suppose, pour fixer les idées, $a < b$, on est certain que la racine est $< x_1 + \varepsilon_1$. On peut donc prendre maintenant, comme seconde valeur de h , le nombre $x_1 + \varepsilon_1 - a$, qui donnera une nouvelle limite supérieure ε'_1 de l'erreur commise en prenant x_1 comme racine. Cette limite ε'_1 pourra être beaucoup plus petite que ε_1 , surtout si le nombre a était déjà très approché de la racine.

272. Conseils pratiques. — Voici comment nous conseillons au lecteur d'appliquer dans la pratique les méthodes précédentes :

1^o L'intervalle (a, b) donné par la séparation des racines est généralement beaucoup trop grand pour qu'il soit avantageux de lui appliquer directement une méthode d'approximation. Il faut commencer par le resserrer en substituant dans $f(x)$ des nombres de plus en plus rapprochés de la racine et examinant les signes des résultats obtenus.

2^o Pour faire des substitutions successives dans $f(x)$, il convient d'observer quelques simplifications possibles. D'abord, si $f(x)$ est un polynôme de degré assez élevé, il est avantageux d'utiliser la règle de division par $x - a$ (n^o 203). En second lieu, il arrive un moment où les nombres à substituer sont très voisins les uns des autres. Il est alors commode de procéder comme il suit. Soit x_0 un des nombres à substituer qui soit à peu près leur moyenne arithmétique. On a à calculer des quantités de la forme $f(x_0 \pm h)$ pour de petites valeurs de h . Dès lors, il est tout indiqué de prendre le déve-

loppement de $f(x_0 + h)$ suivant les puissances croissantes de h , par exemple au moyen de la formule de Taylor. On calcule une fois pour toutes les premiers coefficients de ce développement. On n'a plus ensuite qu'à substituer les diverses valeurs de h , en suivant la règle pratique indiquée pour le calcul numérique des séries (n° 34).

3° *Calculs auxiliaires.* — On admet généralement, pour les calculs auxiliaires, la règle empirique qui consiste à les effectuer avec deux décimales de plus que le nombre de décimales exigé pour la racine. Cela peut se justifier d'une manière plus ou moins rigoureuse par un raisonnement analogue à celui fait à la page 63 à propos des séries.

4° *Après chaque application d'une des méthodes d'approximation, on doit calculer une limite de l'erreur* et voir si elle rentre dans l'approximation demandée. Sinon, il faut appliquer une nouvelle fois la méthode.

273. Méthodes graphiques. — Il nous reste à parler des méthodes dites *graphiques*, dont l'importance pratique est tout à fait considérable. La manière de les appliquer varie d'un exemple à l'autre et peut donner lieu à des théories tout à fait ingénieuses, qu'on désigne sous le nom général de *nomographie*. Sans vouloir pénétrer plus avant dans cette science intéressante, nous allons indiquer seulement quelques procédés très simples et tout à fait courants.

En premier lieu, pour résoudre l'équation

$$(16) \quad f(x) = 0,$$

il est évident qu'il suffit de construire la courbe $y = f(x)$ et de prendre ses points d'intersection avec Ox . Le travail préparatoire à cette construction est d'ailleurs tout fait si l'on a déjà séparé les racines, puisque pour cela on a dû étudier les variations de $f(x)$. Il ne reste plus qu'à construire avec la plus grande précision possible les portions de la courbe voisine de Ox . On mesure ensuite au double-décimètre les abscisses des points de rencontre et, en tenant compte de l'échelle du dessin, on a les racines cherchées avec une approximation d'autant plus grande qu'on a dessiné plus correctement et à une plus grande échelle.

Conformément à la remarque II du n° 264, il est quelquefois

avantageux de multiplier ou diviser au préalable l'équation par un facteur convenable, de manière à simplifier la construction, quitte à tenir compte, s'il y a lieu, des racines introduites ou supprimées.

Une autre méthode, dont la précédente est du reste un cas particulier, consiste à mettre l'équation sous la forme

$$(17) \quad f(x) = g(x),$$

puis à prendre l'intersection des courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$. Les abscisses des points de rencontre sont manifestement les racines cherchées. Comme il se présente généralement différentes manières de mettre l'équation proposée sous la forme (17), il faut toujours examiner quelle est celle qui donnera lieu aux constructions les plus aisées. Par exemple, on peut essayer de se ramener à des courbes classiques de formes bien connues, telles que droite, cercle, coniques, sinusoïde, courbe exponentielle, etc. ⁽¹⁾.

REMARQUES. — I. Cette seconde méthode graphique est quelquefois très commode pour la séparation des racines.

II. Quand on a déterminé une racine a par une méthode graphique, on peut en déduire généralement une valeur x_1 beaucoup plus approchée en lui appliquant la méthode de Newton, quand bien même la condition relative à la dérivée seconde (n° 270) ne serait pas

Fig. 44.

réalisée. Cela tient à ce que le point A se trouvant déjà très près du point C, le point C_1 en sera encore beaucoup plus près, même si l'on se trouve dans le cas de la figure 44.

(1) Le lecteur trouvera une élégante méthode graphique de résolution de l'équation du quatrième degré dans *Leçons*, t. II, p. 400.

274. Résolution de deux équations à deux inconnues. -- Soit le système

$$(18) \quad f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

On peut le résoudre approximativement sans être obligé de faire aucune élimination, comme nous l'avons prescrit au n° 237.

On construit le plus exactement possible les deux courbes (18) (1. II) et l'on mesure les coordonnées de leurs points d'intersection. A chaque point correspond ainsi une solution approchée (a, b) .

On peut en déduire ensuite une *solution plus approchée par une méthode qui est l'extension de celle de Newton*. Soit $(a + h, b + k)$ la solution exacte voisine de la solution approchée (a, b) . On a

$$f(a + h, b + k) = 0, \quad g(a + h, b + k) = 0.$$

Développons par la formule de Taylor (n° 132), en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier :

$$(19) \quad \begin{cases} f(a, b) + hf'_a + kf'_b = 0, \\ g(a, b) + hg'_a + kg'_b = 0. \end{cases}$$

On obtient deux équations du premier degré en h, k ; on les résout et l'on prend comme deuxième approximation la solution $(a + h, b + k)$. A cette dernière, on peut appliquer de nouveau la même méthode, et ainsi de suite.

On conçoit qu'on puisse de même étendre la méthode de Newton à un système de 3, 4, ... équations à 3, 4, ... inconnues. Mais la difficulté est alors de trouver la première approximation, pour laquelle on ne peut plus employer la méthode graphique.

CHAPITRE XXIII.

DÉTERMINANTS.

---

275. Inversions d'une permutation. — Écrivons sur une ligne horizontale une permutation (n° 16) de n nombres différents, par exemple des n premiers nombres entiers. On dit que deux de ses termes présentent une *inversion* si celui de gauche est plus grand que celui de droite. En faisant toutes les combinaisons des termes deux à deux (n° 22), on peut compter le nombre total des inversions. Suivant que ce nombre est pair ou impair, la permutation est dite *paire* ou *impaire*.

THÉORÈME I. — *Si l'on échange deux termes, la parité change.*

1° *Les termes échangés sont consécutifs.* Il n'y a que ces deux termes dont la position relative soit changée. Leur combinaison est donc la seule qui puisse modifier le nombre des inversions, ce qui prouve, de manière évidente, que ce dernier est augmenté ou diminué d'une unité et, par suite, change de parité.

2° *Les termes échangés ne sont pas consécutifs.* Soit à comparer les deux permutations $A\alpha\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_p\beta B$ et $A\beta\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_p\alpha B$, A et B désignant les mêmes ensembles de termes. Nous pouvons passer de la première à la seconde en échangeant successivement α avec γ_1 , γ_2 , ..., γ_p , β , puis β avec γ_p , γ_{p-1} , ..., γ_1 , ce qui fait en tout $2p+1$ échanges de termes consécutifs, donc (1°) $2p+1$ changements de parité et par suite un changement définitif de parité.

THÉORÈME II. — *Si l'on supprime le premier terme α d'une permutation, le nombre des inversions est diminué de $\alpha-1$.*

Car on supprime les inversions présentées par z avec chacun des $z-1$ termes plus petits ⁽¹⁾ qui le suivent dans la permutation.

276. Définition d'un déterminant. — Imaginons n^2 quantités, que nous désignerons sous le nom général d'*éléments* et qui pourront être des nombres donnés ou des variables (n° 56). Écrivons-les suivant un Tableau carré possédant n *lignes horizontales* et n *colonnes verticales*. Numérotions les lignes de haut en bas et les colonnes de gauche à droite. Nous représenterons par la notation $a_z^{z'}$ l'élément qui se trouve à l'intersection de la $z^{\text{ième}}$ ligne avec la $z'^{\text{ième}}$ colonne; de sorte que notre Tableau s'écrit :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Cela posé, *choisissons-y arbitrairement n éléments, sous la seule condition que dans chaque ligne et dans chaque colonne figure un d'entre eux et un seul*. Formons leur produit, soit

$$(2) \quad a_z^z a_\beta^{\beta'} \dots a_\lambda^{\lambda'},$$

les différents facteurs étant du reste écrits dans un ordre quelconque. En vertu de la condition ci-dessus énoncée, les indices $z, \beta, \dots, \lambda$ constituent une permutation des nombres $1, 2, \dots, n$, de même que les indices $z', \beta', \dots, \lambda'$. Soient I et I' les nombres d'inversions correspondants. On appelle *terme du déterminant* l'expression

$$(3) \quad (-1)^{I+I'} a_z^z a_\beta^{\beta'} \dots a_\lambda^{\lambda'},$$

c'est-à-dire le produit (2) précédé du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que les permutations inférieure et supérieure ont ou n'ont pas la même parité. Il est à remarquer d'ailleurs que ce signe est indépendant de l'ordre dans lequel on écrit les facteurs dudit produit, car modifier cet ordre équivaut, comme on sait, à faire un

(1) On suppose, bien entendu, avoir affaire à une permutation des nombres $1, 2, \dots, n$. S'il s'agissait de nombres quelconques tous différents, z devrait désigner le rang que possède le terme considéré quand on écrit les nombres par ordre de grandeur croissante.

certain nombre d'échanges de termes, lesquels modifient simultanément les parités de I et de I' (n° 275) et, par suite, ne changent pas la parité de $I + I'$.

En choisissant de toutes les manières possibles les éléments $a_2^x, \dots, a_k^y$, on obtient de la sorte un certain nombre de termes. *La somme de tous ces termes est*, par définition ⁽¹⁾, *le déterminant D déduit du Tableau (1)*. On peut donc écrire

$$(4) \quad D = \sum (-1)^{I+I'} a_2^x a_3^y \dots a_k^z.$$

Nous avons vu qu'il était permis d'écrire les éléments constitutifs de chaque terme dans un ordre arbitraire. On peut profiter de cette latitude pour amener par exemple les indices supérieurs dans l'ordre naturel, auquel cas $I' = 0$. On a donc

$$(5) \quad D = \sum (-1)^I a_2^1 a_3^2 \dots a_j^n;$$

et l'on voit que la formation des différents termes équivaut à celle du Tableau des permutations des nombres $1, 2, \dots, n$. *Le nombre de ces termes est donc $n!$* (n° 18).

On appelle *terme principal* le terme $a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n$; ses éléments sont ceux de la *diagonale principale* du Tableau (1).

On appelle *ordre* d'un déterminant le nombre de ses lignes (ou colonnes).

On représente ordinairement un déterminant par le Tableau dont il est tiré, placé entre deux traits verticaux :

$$(6) \quad D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Cette notation est la seule possible quand les éléments sont numériques. Lorsqu'on représente, au contraire, ceux-ci à la manière ci-

⁽¹⁾ Le lecteur trouvera sans doute, et à juste titre, que cette définition est bien artificielle. En réalité, c'est par l'étude des équations linéaires et après des tâtonnements nombreux qu'on est arrivé à cette théorie moderne et si féconde des déterminants. Mais ce n'est pas ici le lieu d'en faire l'histoire. Le lecteur trouvera, s'il le desire, une exposition plus détaillée dans *Leçons*, n° 139.

dessus, on peut écrire, suivant trois notations abrégées également usitées,

$$(7) \quad D = \parallel a_1^1 \quad a_1^2 \quad \dots \quad a_1^n \parallel = |a_i^j| = (a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n).$$

Remarque. — Il est manifeste qu'on ne change rien à tout ce qui précède si l'on remplace les indices affectés aux lignes et aux colonnes par des nombres quelconques, à condition que ceux-ci croissent de haut en bas, pour les lignes, et de gauche à droite, pour les colonnes. Cela ne modifie en effet nullement les nombres I et I'.

277. Propriétés des déterminants. — Les déterminants jouissent de propriétés fort élégantes, que nous allons maintenant exposer.

THÉORÈME I. — *Un déterminant ne change pas de valeur quand on échange ses lignes avec ses colonnes.*

L'échange des lignes et des colonnes consiste à remplacer chaque élément par l'élément symétrique par rapport à la diagonale principale. On obtient de la sorte un déterminant $|b_i^j|$ tel que l'on ait, pour toutes les valeurs de α et α' , $b_\alpha^\alpha = a_\alpha^\alpha$. Les deux déterminants sont bien égaux, car il en est ainsi des termes correspondants $(-1)^{I+I'} a_\alpha^\alpha a_{\alpha'}^{\alpha'} \dots a_{\beta'}^{\beta'}$ et $(-1)^{I'+I} b_\alpha^\alpha b_{\alpha'}^{\alpha'} \dots b_{\beta'}^{\beta'}$.

COROLLAIRE. — *Toute propriété démontrée pour les lignes est vraie pour les colonnes et réciproquement.* Cela était d'ailleurs à prévoir d'après la définition même des déterminants, où les lignes et les colonnes jouent exactement le même rôle.

Déterminants symétriques et symétriques gauches. — Un déterminant est *symétrique* lorsque les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux. Il est *symétrique gauche* lorsque ces éléments sont opposés, ceux de la diagonale elle-même étant par suite nuls. Pour un tel déterminant, l'échange des lignes et des colonnes équivaut au changement de signe de tous les éléments. D'autre part, la formule (4) montre qu'un tel changement multiplie le déterminant par $(-1)^n$. De sorte que si n est impair, on a, en s'appuyant sur le théorème I, $D = -D$, donc $D = 0$. Par conséquent, tout déterminant symétrique gauche d'ordre impair est nul.

278. THÉORÈME II. — *Si l'on échange deux rangées parallèles, le déterminant change de signe.*

Échangeons, par exemple, dans D les lignes de rangs p et q . Nous obtenons le déterminant $D_1 = |b'_i|$, tel que $b'_i = a^i_j$ pour toutes les valeurs de i et de j , sauf pour $i = p$ ou q , auxquels cas on a $b'_p = a^p_q$, $b'_q = a^q_p$. Cela posé, prenons un terme quelconque de D et écrivons-le en mettant en évidence les éléments des lignes p et q , que nous pouvons supposer par exemple écrits les deux premiers (n° 276), soit

$$(-1)^{1+1} a^p_p a^q_q a^r_2 \dots a^s_n.$$

Faisons-lui correspondre le terme suivant de D_1

$$(-1)^{1+1} b^p_q b^q_p b^r_2 \dots b^s_n.$$

Les éléments des deux termes sont deux à deux égaux. En outre, on a visiblement $I'_1 = I$, $I_1 = I \pm 1$. Donc, les deux termes sont opposés et par suite aussi les deux déterminants.

Corollaire. — Si l'on permute les colonnes d'une manière quelconque, on obtient un déterminant $D' = ||a^p_1 a^q_2 \dots a^s_n||$, qui est égal à D, au signe près, puisque toute permutation équivaut à un certain nombre d'échanges de colonnes. Pour avoir le signe, il suffit de comparer deux termes composés des mêmes éléments. Par exemple, le terme principal de D' est $a^p_1 a^q_2 \dots a^s_n$. Le terme correspondant de D est $(-1)^I a^p_1 a^q_2 \dots a^s_n$, I désignant le nombre d'inversions de la permutation $(p, q, \dots, s)$. Donc

$$D = (-1)^I D', \quad D' = (-1)^I D.$$

THÉORÈME III. — *Tout déterminant qui a deux rangées parallèles identiques est nul.*

En effet, si l'on échange ces deux rangées, le déterminant ne change pas. Comme il doit, d'autre part (théorème II), changer de signe, il est nécessairement nul.

279. Développement d'un déterminant. — Considérons, dans le déterminant D, tous les termes qui contiennent un élément donné a^q_p . Si l'on y met cet élément en facteur, on obtient une expression de la forme $a^q_p A^q_p$, où A^q_p désigne un certain coefficient, qui, *a priori*,

ne peut renfermer aucun des éléments de la ligne p ni de la colonne q et qu'on appelle *le mineur relatif à a_p^q* .

Calculons ce mineur. A cet effet, choisissons dans l'expression (4) de D tous les termes pour lesquels on a $x = p$ et $x' = q$. La somme de ces termes est évidemment $a_p^q \Lambda_p^q$. Donc

$$a_p \Lambda_p^q = \Sigma (-1)^{l+1} a_p^{\beta} a_{\beta}^{\gamma} \dots a_l^{\lambda},$$

le signe Σ indiquant qu'on doit permuter de toutes les manières possibles les indices $\beta, \dots, \lambda$ et les indices $\beta', \dots, \lambda'$. De là, on tire

$$\Lambda_p^q = \Sigma (-1)^{l+1} a_p^{\beta} a_{\beta}^{\gamma} \dots a_l^{\lambda}.$$

Dans cette formule $(\beta, \gamma, \dots, \lambda)$ est une permutation quelconque des nombres $1, 2, \dots, n$, desquels on aurait retranché p ; nous savons (n° 275) que le nombre I_1 de ses inversions est égal à $l - (p - 1)$. De même, $(\beta', \gamma', \dots, \lambda')$ est une permutation quelconque des nombres $1, 2, \dots, n$, desquels on aurait retranché q ; le nombre I_1' de ses inversions est égal à $l' - (q - 1)$. Dès lors, on peut écrire

$$\Lambda_p^q = (-1)^{p-1+q-1} \Sigma (-1)^{I_1+1} a_p^{\beta} a_{\beta}^{\gamma} \dots a_l^{\lambda}.$$

Or, si l'on se reporte au n° 276 et, en particulier, à la remarque qui le termine, on constate que la somme Σ du second membre n'est autre que *le déterminant D_p^q déduit de D par la suppression de la ligne p et de la colonne q* .

On a donc finalement la *formule très importante*

$$(8) \quad \Lambda_p^h = (-1)^{p+q} D_p^q.$$

Développement suivant la ligne p . — On peut décomposer D en n groupes composés respectivement des termes qui contiennent $a_p^1, a_p^2, \dots, a_p^n$, puisque tout terme doit contenir un élément et un seul de la ligne p . On obtient ainsi la formule

$$(9) \quad D = a_p^1 \Lambda_p^1 + a_p^2 \Lambda_p^2 + \dots + a_p^n \Lambda_p^n,$$

qui constitue *le développement du déterminant suivant les éléments de la $p^{\text{ième}}$ ligne*.

On peut de même développer suivant les éléments d'une colonne, soit

$$(10) \quad D = a_1^q \Lambda_1^q + a_2^q \Lambda_2^q + \dots + a_n^q \Lambda_n^q$$

D'après cela, le calcul d'un déterminant d'ordre n est ramené à celui de n déterminants d'ordre $n - 1$, et, par suite, de proche en proche, à celui d'un certain nombre de déterminants du premier ordre, lesquels se réduisent chacun à leur unique élément. Telle est la véritable méthode pratique qu'on emploie ordinairement pour le calcul numérique des déterminants.

280. Par exemple, le déterminant du second ordre $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, développé suivant la première ligne, donne

$$(11) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

résultat qu'il est d'ailleurs aussi aisé d'établir directement en s'appuyant seulement sur la définition des déterminants.

Soit encore le déterminant du troisième ordre

$$(12) \quad D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Développons-le suivant la première ligne, en nous servant de (11),

$$\begin{aligned} D &= a(b'c'' - c'b'') - b(a'c'' - c'a'') + c(a'b'' - b'a'') \\ &= ab'c'' + bc'a'' - ca'b'' - cb'a'' - ba'c'' - ac'b''. \end{aligned}$$

On peut aisément retenir ce développement au moyen de la règle suivante, dite *règle de Sarrus* : Les termes positifs sont fournis par la diagonale principale et par deux triangles isocèles dont les bases sont parallèles à cette diagonale (nous les avons tracés en pointillé) ; les termes négatifs s'obtiennent de manière analogue en partant de la seconde diagonale.

281. **Conséquences diverses.** — Outre le calcul numérique des déterminants, on peut tirer des formules (9), (10) diverses applications intéressantes. Signalons d'abord *les identités* telles que la suivante

$$(13) \quad a_q^1 \Lambda_p^1 + a_q^2 \Lambda_p^2 + \dots + a_q^n \Lambda_p^n = 0, \quad p \neq q.$$

Le premier membre est, en effet, le développement, suivant la $p^{\text{ième}}$ ligne, du déterminant D dans lequel on aurait remplacé les éléments de cette $p^{\text{ième}}$ ligne par ceux de la $q^{\text{ième}}$ (*). Or, nous savons qu'un tel déterminant est nul (n° 278). On a de même

$$(14) \quad a_1^q \Lambda_1^p + a_2^q \Lambda_2^p + \dots + a_n^q \Lambda_n^p = 0.$$

THÉORÈME I. — *Si l'on multiplie tous les éléments d'une rangée par un même nombre, le déterminant est multiplié par ce nombre.*

Il suffit, pour s'en rendre compte, de développer suivant cette rangée.

THÉORÈME II. — *Tout déterminant qui a deux rangées parallèles proportionnelles est nul.*

Car on peut multiplier les éléments d'une de ces deux rangées par un nombre tel que les deux rangées deviennent identiques, auquel cas on est ramené au théorème III du n° 278.

THÉORÈME III. — *Si les éléments d'une rangée sont constitués chacun par une somme de k éléments partiels (**), on peut décomposer le déterminant en une somme de k déterminants, obtenus en réduisant successivement les éléments considérés aux 1^{er}, 2^e, ..., $k^{\text{ième}}$ éléments partiels.*

En effet, supposons par exemple qu'on ait, pour la ligne p ,

$$a_p^i = \omega_1^i + \omega_2^i + \dots + \omega_k^i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Portons dans la formule (9) :

$$(15) \quad \begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^n (\omega_1^i + \omega_2^i + \dots + \omega_k^i) \Lambda_p^i, \\ D &= \sum_{i=1}^n \omega_1^i \Lambda_p^i + \sum_{i=1}^n \omega_2^i \Lambda_p^i + \dots + \sum_{i=1}^n \omega_k^i \Lambda_p^i. \end{aligned}$$

(*) Une telle modification laisse inaltérés les mineurs $\Lambda_p^1, \Lambda_p^2, \dots, \Lambda_p^n$, puisqu'ils ne dépendent pas des éléments de la $p^{\text{ième}}$ ligne.

(**) Si certaines sommes comprennent moins de k éléments partiels, on remplace les éléments manquants par des zéros.

Or $\sum_{i=1}^n \omega_i^l \Lambda_p^i$, par exemple, n'est autre que le développement, suivant la $p^{\text{ième}}$ ligne, du déterminant D dans lequel on aurait réduit les éléments aux premiers éléments partiels. Dès lors, la formule (15) démontre le théorème.

THÉORÈME IV. — *On ne change pas la valeur d'un déterminant quand on ajoute aux éléments d'une ligne les éléments correspondants d'une autre ligne multipliés tous par un même nombre arbitraire.*

Il suffit, pour le voir, de décomposer le déterminant obtenu en deux déterminants partiels, au moyen du théorème précédent. L'un de ceux-ci est le déterminant proposé; l'autre est nul, en vertu du théorème II précédent.

Ce théorème est très utile pour la simplification de certains déterminants. C'est ainsi que, si les éléments de deux lignes sont presque tous égaux deux à deux, il y a avantage à les retrancher l'une de l'autre, car on fait apparaître de la sorte un grand nombre d'éléments nuls. Nous verrons du reste divers exemples de simplifications de cette nature dans les exercices correspondant à ce Chapitre et aussi dans la suite de cet Ouvrage.

282. Dérivée d'un déterminant. — Une application immédiate du théorème III est le calcul de la dérivée d'un déterminant dont les éléments sont des fonctions d'une certaine variable x . Supposons, par exemple, que les éléments a_i^j du déterminant (6) soient des fonctions de x , admettant des dérivées $a_i^{j'}$. Il est clair que D est aussi une fonction de x . Cherchons sa dérivée.

Donnons à x l'accroissement Δx ; D devient

$$D + \Delta D = \parallel a_i^1 + \Delta a_i^1 \quad a_i^2 + \Delta a_i^2 \quad \dots \quad a_i^n + \Delta a_i^n \parallel.$$

Chaque élément de ce déterminant est une somme de deux éléments partiels. On peut donc le décomposer en une somme de déterminants, obtenus en réduisant les éléments à leurs premiers termes pour certaines lignes et à leurs seconds termes pour les autres lignes. En prenant les premiers termes dans toutes les lignes, on obtient D; de sorte que ΔD est la somme des autres déterminants δ .

Divisons ceux-ci par Δx et cherchons la limite pour $\Delta x = 0$. A cet effet, nous divisons par Δx , dans chaque déterminant δ , une ligne formée par des accroissements, par exemple la ligne $\Delta a_i^1 \Delta a_i^2 \dots \Delta a_i^n$. A la limite, elle devient $a_i^1 a_i^2 \dots a_i^n$. S'il y a d'autres lignes d'accroissements, elles deviennent des lignes de zéros : le déterminant devient nul ⁽¹⁾. Sinon, il devient égal au déterminant obtenu en remplaçant, dans D, les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne par leurs dérivées ⁽¹⁾. La limite de $\frac{\Delta D}{\Delta x}$ est la somme de tous les déterminants analogues ⁽²⁾.

Finalement, on peut énoncer la règle suivante :

RÈGLE. — *La dérivée d'un déterminant d'ordre n est la somme des n déterminants obtenus en y remplaçant les éléments d'une ligne et d'une seule par leurs dérivées, cette ligne occupant successivement les rangs 1, 2, ..., n .*

On a évidemment une règle analogue pour les colonnes.

283. Multiplication des déterminants. — Soient deux déterminants d'ordre n , $D = [a_i^j]$ et $D' = [b_i^j]$. Considérons le déterminant Δ dont l'élément général c_i^j est donné par la formule

$$(16) \quad c_i^j = a_i^1 b_j^1 + a_i^2 b_j^2 + \dots + a_i^n b_j^n.$$

Je dis que $\Delta = D.D'$. En effet, les éléments de la première colonne de Δ sont des sommes de n éléments partiels; on peut donc, conformément au théorème III du n° 281, décomposer Δ en n déterminants partiels. Dans chacun de ceux-ci, on peut faire une décomposition analogue relativement à la deuxième colonne; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'ait plus, dans chaque déterminant, que des éléments réduits à un seul élément partiel. Il est visible que les déterminants finalement obtenus sont tous de la forme

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^p b_1^p & a_1^q b_2^q & \dots & a_1^s b_n^s \\ a_2^p b_1^p & a_2^q b_2^q & \dots & a_2^s b_n^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^p b_1^p & a_n^q b_2^q & \dots & a_n^s b_n^s \end{vmatrix}.$$

⁽¹⁾ Il faut remarquer, à ce propos, que tout déterminant est une fonction continue d'un nombre quelconque de ses éléments, comme étant un polynôme.

⁽²⁾ Le lecteur pourra les écrire tout au long en prenant, par exemple, un déterminant du troisième ordre; la démonstration lui semblera peut-être plus claire, tout en étant aussi générale.

$p, q, \dots, s$ désignant certains des nombres $1, 2, \dots, n$. En remarquant que b_1^p est en facteur dans la première colonne, b_2^q dans la seconde, ..., b_n^s dans la $n^{\text{ième}}$, on peut écrire (n° 281, théorème 1)

$$(17) \quad \delta = b_1^p b_2^q \dots b_n^s \times \overbrace{\| a_1^p \ a_1^q \ \dots \ a_1^s \|}^{\delta'}$$

Or, le déterminant δ' est nul comme ayant deux ou plusieurs colonnes identiques si deux ou plusieurs des nombres $p, q, \dots, s$ sont égaux. S'ils sont tous différents et si l'on appelle I le nombre des inversions de la permutation $(p, q, \dots, s)$, il est égal à $(-1)^I D$ (n° 278). Mettant ainsi D en facteur dans tous les déterminants δ qui ne sont pas nuls, nous avons

$$\Delta = D \cdot \Sigma (-1)^I b_1^p b_2^q \dots b_n^s.$$

Mais la somme Σ est, par définition, le déterminant D' . Donc

$$\Delta = D \cdot D', \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La multiplication telle que nous venons de l'effectuer est appelée *multiplication ligne par ligne*, en ce sens qu'on obtient l'élément général c_i^j du produit en multipliant les éléments de la ligne i de D par les éléments de même rang de la ligne j de D' et ajoutant les résultats obtenus. Mais on peut aussi effectuer le produit *colonne par colonne*, *ligne par colonne* ou *colonne par ligne*, comme on le voit en échangeant les lignes et colonnes de D et D' , de D' ou de D .

Si l'on multiplie un déterminant par lui-même, on obtient son carré. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ce carré est un déterminant symétrique, quand on effectue la multiplication ligne par ligne ou colonne par colonne.

284. Nous ne nous sommes occupés jusqu'à présent que de la multiplication de deux déterminants de même ordre. *S'ils sont d'ordres différents, on les ramène à être de même ordre* de la manière suivante.

Soit à transformer le déterminant D d'ordre n en un détermi-

nant D_1 d'ordre supérieur $n + p$. On écrit

$$(18) \quad D_1 = \begin{vmatrix} & & & & \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^p \\ & & & & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ & & & & \vdots \ \vdots \ \dots \ \vdots \\ & & & & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ & & D & & \\ & 0 \ \vdots \ \dots \ 0 & 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ & 0 \ \vdots \ \dots \ 0 & 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \\ & \vdots \ \vdots \ \dots \ \vdots & \vdots \ \vdots \ \dots \ \vdots \\ & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & \vdots \ \vdots \ \dots \ 0 \ 1 \end{vmatrix}.$$

C'est ce qu'on appelle *border* le déterminant D avec p lignes et p colonnes. Ces p lignes et p colonnes sont, comme on le voit, composées exclusivement de zéros, exception faite pour les éléments de la diagonale principale, qui sont égaux à 1. Le déterminant D_1 est bien égal à D , car si on le développe suivant la dernière colonne, on voit qu'il est égal au mineur relatif à son dernier élément, lequel est à son tour égal au mineur analogue, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne D comme mineur. Ce raisonnement prouve même qu'on ne changerait pas D_1 en remplaçant par des nombres quelconques les zéros des p dernières lignes qui sont au-dessous de la diagonale principale, ou les zéros des p dernières colonnes qui sont au-dessus de cette diagonale.

285. Multiplication des tableaux rectangulaires. — On peut donner à la multiplication des déterminants l'extension suivante, dont on peut quelquefois trouver des applications intéressantes. Soient les deux *matrices* ou *tableaux rectangulaires*, comptant p lignes et n colonnes :

$$(19) \quad (A) \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_p^1 & a_p^2 & \dots & a_p^n \end{vmatrix}, \quad (B) \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_p^1 & b_p^2 & \dots & b_p^n \end{vmatrix}.$$

Ils n'ont par eux-mêmes aucune valeur numérique. Néanmoins, nous convenons d'appeler *produit des deux tableaux* le déterminant Δ du $p^{\text{ième}}$ ordre, dont l'élément général est donné par la formule ⁽¹⁾

$$(20) \quad c_i^j = a_i^1 b_j^1 + a_i^2 b_j^2 + \dots + a_i^n b_j^n \quad (i, j = 1, 2, \dots, p).$$

(1) On multiplie toujours ligne par ligne.

Cherchons la valeur de ce déterminant. Trois cas se présentent suivant la valeur relative de p et de n .

Premier cas : $n = p$. — On retombe sur la multiplication des déterminants D et D', déduits des tableaux (A) et (B), qui sont alors carrés.

Deuxième cas : $p > n$. — Bordons chaque tableau par $p - n$ colonnes de zéros écrits à sa droite, nous obtenons deux tableaux carrés, qui donnent naissance à deux déterminants D et D', d'ordre p et visiblement nuls. Or, si l'on fait le produit DD' ligne par ligne, on obtient manifestement le déterminant Δ , qui est donc nul.

Troisième cas : $p < n$. — Comme au n° 283, décomposons Δ en une somme de déterminants tels que

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^q b_1^q & a_1^r b_2^r & \dots & a_1^s b_p^s \\ a_2^q b_1^q & a_2^r b_2^r & \dots & a_2^s b_p^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^q b_1^q & a_p^r b_2^r & \dots & a_p^s b_p^s \end{vmatrix},$$

$q, r, \dots, s$ désignant certains des nombres $1, 2, \dots, n$.

Pour que δ ne soit pas nul, il faut que ceux-ci soient tous différents, c'est-à-dire que $(q, r, \dots, s)$ soit un arrangement p à p (n° 19) des nombres $1, 2, \dots, n$. On a alors

$$(21) \quad \delta = b_1^q b_2^r \dots b_p^s \times \overbrace{\| a_1^q \ a_1^r \ \dots \ a_1^s \|}^{\delta'}.$$

Il faut faire la somme de tous les déterminants analogues. Dans ce but, souvenons-nous que, pour former le tableau des arrangements p à p de n nombres, on peut d'abord former le tableau des combinaisons p à p , en rangeant par exemple les nombres par ordre de grandeur croissante, puis faire le tableau des permutations relatif à chaque combinaison (n° 24). Dès lors, soit $(q', r', \dots, s')$ la combinaison obtenue en rangeant $q, r, \dots, s$, par ordre de grandeur croissante. Si l désigne le nombre d'inversion de $(q, r, \dots, s)$, on a (n° 278)

$$\delta = (-1)^l b_1^q b_2^r \dots b_p^s \times \overbrace{\| a_1^q \ a_1^r \ \dots \ a_1^s \|}^{\delta''}.$$

Ajoutons tous les δ obtenus en prenant pour $(q, r, \dots, s)$ les différentes permutations déduites de $(q', r', \dots, s')$; nous obtenons une somme

$$\tau = \delta'' \cdot \Sigma (-1)^l b_1^q b_2^r \dots b_p^s,$$

ou (n° 276, remarque)

$$(22) \quad \tau = \| a_1^q \ a_1^r \ \dots \ a_1^s \| \times \| b_1^q \ b_1^r \ \dots \ b_1^s \| \quad (q' < r' < \dots < s').$$

Enfin, Δ est la somme de tous les produits analogues. Finalement, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le produit des deux tableaux (A) et (B) est nul, si le nombre des lignes dépasse celui des colonnes. Sinon, il est égal à la somme de tous les produits tels que $\tau, (q', r' \dots s')$ représentant une quelconque des combinaisons p à p des nombres $1, 2, \dots, n$, où l'on suppose les nombres rangés par ordre de grandeur croissante.*

Ce théorème permet assez souvent d'obtenir des identités intéressantes. Nous en donnerons quelques exemples en exercices. Pour l'instant, indiquons seulement le suivant. Multiplions les deux tableaux

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix};$$

nous obtenons, en développant,

$$(23) \quad (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 \\ = (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2.$$

Cette identité, connue sous le nom d'*identité de Lagrange*, sert assez souvent, surtout en Géométrie analytique.

286. Règle de Laplace. — Dans ce numéro, nous désignerons d'une manière générale par $D_{p, q, \dots, s}^{p', q', \dots, s'}$ le déterminant déduit de D par la suppression des lignes $p, q, \dots, s$ et des colonnes, en nombre égal, $p', q', \dots, s'$. Un tel déterminant est dit *sous-déterminant* ou encore *mineur* ⁽¹⁾ de D. Nous désignerons par $\Delta_{p, q, \dots, s}^{p', q', \dots, s'}$ le sous-déterminant formé au contraire par les éléments communs aux lignes $p, q, \dots, s$ et aux colonnes $p', q', \dots, s'$, et qu'on appelle quelquefois *mineur complémentaire* du précédent.

Cela posé, soit $(p, q, \dots, s)$ une combinaison m à m des nombres $1, 2, \dots, n$, ($m < n$), où l'on suppose $p < q < \dots < s$. Proposons-nous de calculer la somme τ des termes de Δ , tels que les éléments des m premières lignes qui y figurent appartiennent dans leur ensemble aux colonnes $p, q, \dots, s$. On pourrait le faire directement en étendant le raisonnement fait au n° 279. Nous emploierons de préférence la méthode suivante :

La somme cherchée est évidemment indépendante des éléments des m premières lignes qui n'appartiennent pas aux colonnes $p, q, \dots, s$ et des éléments des autres lignes qui appartiennent au contraire à ces colonnes. Profitons-en

---

⁽¹⁾ Cette dernière dénomination présente l'inconvénient de donner lieu à des confusions de signes quand il s'agit des mineurs d'ordre $n - 1$, pour lesquels nous avons donné, au n° 279, une définition un peu différente.

pour annuler tous ces éléments. Nous obtenons un déterminant D_1 qui se réduit visiblement à τ . Par des échanges de colonnes, amenons les colonnes $p, q, \dots, s$ à être les premières, leur ordre relatif n'étant pas changé, pas plus que l'ordre relatif des autres colonnes. Pour cela, il suffit d'échanger successivement la colonne p avec chacune des $p-1$ colonnes précédentes, puis la colonne q avec chacune des $q-2$ colonnes précédentes, ... et enfin la colonne s avec chacune des $s-m$ colonnes précédentes, ce qui fait en tout

$$p-1+q-2+\dots+s-m = (p+q+\dots+s) - (1+2+\dots+m) \\ = (p+q+\dots+s) - \frac{m(m+1)}{2} = k \text{ échanges.}$$

On a donc

$$D_1 = (-1)^k \begin{vmatrix} a_1^p & a_1^q & \dots & a_1^s & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^p & a_m^q & \dots & a_m^s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m+1}^{p'} & \dots & a_{m+1}^{s'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n^{p'} & \dots & a_n^{s'} \end{vmatrix} = (-1)^k D_2.$$

D'autre part, bordons le sous-déterminant $\Delta_{1,2,\dots,m}^{p,q,\dots,s}$ par $n-m$ lignes et colonnes comme on l'a expliqué pour le déterminant (18). Bordons de même $D_{1,2,\dots,m}^{p,q,\dots,s}$ par m lignes et colonnes, mais que nous écrivons cette fois respectivement en haut et à gauche; puis échangeons les lignes avec les colonnes. Enfin multiplions les deux déterminants ainsi formés ligne par ligne. Nous obtenons D_2 , comme le constatera le lecteur en écrivant les déterminants, pour y voir plus clair. De là résulte que la somme τ cherchée est donnée par la formule

$$(24) \quad \tau = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + (p+q+\dots+s)} \Delta_{1,2,\dots,m}^{p,q,\dots,s} D_{1,2,\dots,m}^{p,q,\dots,s}.$$

Imaginons maintenant que, laissant fixe le nombre m , on prenne pour $(p, q, \dots, s)$ successivement toutes les combinaisons m à m des nombres $1, 2, \dots, n$. Il est clair qu'en ajoutant toutes les sommes τ correspondantes, on obtiendra le déterminant D en entier, puisque tout terme de D doit avoir un élément dans chacune des m premières lignes. On a donc la formule

$$(25) \quad D = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \sum (-1)^{p+q+\dots+s} \Delta_{1,2,\dots,m}^{p,q,\dots,s} D_{1,2,\dots,m}^{p,q,\dots,s}.$$

Elle constitue une généralisation de la formule (9), sur laquelle on retomberait en supposant $m=1$ et faisant au besoin des échanges de lignes. Elle donne une nouvelle règle, qu'on appelle *règle de Laplace*, pour le calcul d'un déterminant. Quand on l'applique, on dit qu'on *développe le déterminant suivant les m premières lignes*. On pourrait aussi développer suivant m lignes quelconques. Mais il vaut mieux se ramener au cas précédent par

des échanges convenables de lignes. Il va de soi qu'on peut développer de même suivant plusieurs colonnes.

La règle de Laplace est particulièrement commode pour le calcul des déterminants du quatrième ordre : en prenant $m = 2$, on se ramène uniquement à des calculs de déterminants du second ordre, lesquels se font très rapidement. On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} \\ = (ab' - ba')(c''d'' - d''c'') - (ac' - ca')(b''d'' - d''b'') \\ + (ad' - da')(b''c''' - c''b'') - (bd' - b'd')(a''c''' - c''a''') \\ + (bc' - cb')(a''d''' - d''a''') + (cd' - dc')(a''b''' - b''a''').$$

287. Déterminant adjoint. — On appelle *déterminant adjoint* du déterminant D le déterminant $\Delta = |\Lambda_i^j|$ formé par les mineurs.

THÉORÈME I. — On a $\Delta = D^{n-1}$.

En effet, multiplions D par Δ , ligne par ligne, l'élément général du produit est (n° 283)

$$c_i^j = a_i^1 \Lambda_j^1 + a_i^2 \Lambda_j^2 + \dots + a_i^n \Lambda_j^n,$$

c'est-à-dire zéro ou D , suivant que $i \neq j$ ou $i = j$ (n° 281). Le déterminant $D\Delta$ a donc tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont égaux à D . On a, par suite,

$$D\Delta = D^n;$$

d'où, en supposant $D \neq 0$,

$$(26) \quad \Delta = D^{n-1}.$$

Lorsque D est nul, Δ l'est aussi, et la formule (26) est encore vraie. En effet, on a, par exemple,

$$a_1^1 \Lambda_i^1 + a_1^2 \Lambda_i^2 + \dots + a_1^n \Lambda_i^n = 0,$$

et cela pour $i = 1, 2, \dots, n$. Donc Δ est nul, en vertu d'un théorème qui sera démontré au n° 292, car les $a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n$ sont supposés ne pas être tous nuls (s'ils l'étaient, tous les mineurs seraient nuls, sauf $\Lambda_1^1, \dots, \Lambda_1^n$).

THÉORÈME II. — Si x_i^j désigne le mineur de Δ relatif à A_i^j on a, en supposant $D \neq 0$, $x_i^j = a_i^j D^{n-2}$.

En effet, on a (nos 279 et 281)

$$x_i^1 A_k^1 + x_i^2 A_k^2 + \dots + x_i^n A_k^n = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ D & \text{si } i = k; \end{cases}$$

$$a_i^1 A_k^1 + a_i^2 A_k^2 + \dots + a_i^n A_k^n = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ D & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Dans tous les cas, on peut écrire

$$A_k^1(x_i^1 - a_i^1 D^{n-2}) + A_k^2(x_i^2 - a_i^2 D^{n-2}) + \dots + A_k^n(x_i^n - a_i^n D^{n-2}) = 0,$$

et cela pour $k = 1, 2, \dots, n$. On obtient de la sorte n équations linéaires et homogènes entre les n quantités $x_i^1 - a_i^1 D^{n-2}, \dots$. Comme le déterminant $\Delta = D^{n-1}$ des coefficients est supposé différent de zéro, on a nécessairement (n° 292)

$$x_i^1 - a_i^1 D^{n-2} = x_i^2 - a_i^2 D^{n-2} = \dots = x_i^n - a_i^n D^{n-2} = 0.$$

C. Q. F. D.

4

Downloaded from <http://ajphaphapublications.sagepub.com> at NANYANG TECH UNIV LIBRARY on June 11, 2015

288. Équations linéaires. — On appelle *équation linéaire* toute équation qui est du premier degré par rapport à l'ensemble des inconnues.

(1)

[illegible]

289. **Systèmes de Cramer.** — On appelle *système de Cramer* tout système comprenant *autant d'équations que d'inconnues* et tel que *le déterminant* $D = |a_i^j|$ *des coefficients ne soit pas nul*. Nous allons montrer qu'un tel système admet toujours une solution et une seule et nous apprendrons du même coup à la calculer.

Supposons donc que, pour le système (1), on ait $p = n$ et $D \neq 0$. Si les équations (1) sont vérifiées pour certaines valeurs des x , il en sera évidemment de même de toute *combinaison linéaire de ces*

équations, c'est-à-dire de toute équation obtenue en multipliant la première par une constante quelconque λ_1 , la seconde par une constante λ_2 , ..., la dernière par une constante λ_n , et ajoutant membre à membre. Essayons alors de choisir nos multiplicateurs de façon à *éliminer le plus grand nombre possible d'inconnues*. On y arrive immédiatement grâce aux propriétés élégantes des déterminants. Prenons $\lambda_1 = \Lambda_1^i$, $\lambda_2 = \Lambda_2^i$, ..., $\lambda_n = \Lambda_n^i$; nous obtenons l'équation

$$(2) \quad D \cdot x_i = b_1 \Lambda_1^i + b_2 \Lambda_2^i + \dots + b_n \Lambda_n^i,$$

car le coefficient de x_i est D , d'après la formule (10) du n° 279 et ceux des autres inconnues sont nuls d'après la formule (14) du n° 281.

Comme on le voit, on a éliminé toutes les inconnues, sauf x_i . Comme $D \neq 0$, on en tire

$$(3) \quad x_i = \frac{b_1 \Lambda_1^i + b_2 \Lambda_2^i + \dots + b_n \Lambda_n^i}{D}.$$

Donc, s'il y a une solution, elle est donnée par les formules telles que (3). Nous n'avons plus qu'à vérifier que les valeurs obtenues satisfont bien à chaque équation du système. Effectivement, si on les porte dans la $k^{\text{ième}}$, il vient

$$\sum_{i=1}^n a_k^i \frac{(b_1 \Lambda_1^i + b_2 \Lambda_2^i + \dots + b_n \Lambda_n^i)}{D} = b_k.$$

Or, le coefficient de b_j , soit $\frac{1}{D} (a_k^1 \Lambda_j^1 + a_k^2 \Lambda_j^2 + \dots + a_k^n \Lambda_j^n)$, est nul (n° 281), tant que $j \neq k$ et égal à $\frac{1}{D} = 1$ pour $j = k$. Donc l'équation est bien vérifiée.

Finalement, nous avons la proposition suivante :

THÉORÈME (de Cramer). — *Si le système (1) est un système de Cramer, il admet une solution unique donnée par les formules*

$$(4) \quad x_1 = \frac{B_1}{D}, \quad x_2 = \frac{B_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{B_n}{D},$$

où B_i désigne ce que devient le déterminant D quand on y remplace chacun des éléments de la $i^{\text{ième}}$ colonne par le terme constant b_j qui se trouve sur la même ligne dans (1).

Cette interprétation du numérateur de la fraction (3) est, en effet, évidente, car ce numérateur n'est autre que le développement, suivant la $i^{\text{ème}}$ colonne, du déterminant ci-dessus mentionné ⁽¹⁾.

Les formules (4) sont appelées *formules de Cramer*.

290. **Cas général.** — Arrivons maintenant au cas général où les nombres p et n sont quelconques et où l'on ne fait aucune hypothèse particulière sur les coefficients, si ce n'est que, dans chaque équation, il y en a au moins un qui n'est pas nul.

Nous allons d'abord donner quelques définitions fondamentales.

Considérons le *tableau rectangulaire* (carré si $p = n$) T formé par les coefficients a_i^j . De ce tableau on peut tirer des déterminants en y prenant un certain nombre de lignes et un nombre égal de colonnes. C'est ce que nous appellerons les *déterminants du tableau*. On appelle *déterminant principal* tout déterminant du tableau assujetti aux conditions suivantes :

1° Il n'est pas nul; 2° Tout déterminant du tableau qui a un ordre supérieur est nul. Il peut y avoir plusieurs déterminants principaux; mais, bien entendu, ils sont tous du même ordre ⁽²⁾.

Le déterminant principal δ étant choisi, nous appellerons *équations et variables principales* les équations et variables dont les coefficients figurent dans δ . On nomme *déterminant caractéristique relatif à une équation non principale*, par exemple la $k^{\text{ème}}$, que nous appellerons l'équation (k) , le *déterminant* δ_k obtenu en bordant (n° 284) δ , en bas par une ligne formée par les coefficients des variables principales dans l'équation (k) , à droite par une colonne formée par les termes constants des équations principales et de l'équation (k) .

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant, qu'on appelle quelquefois *théorème de Méray*, mais qui, en réalité, a été trouvé indépendamment par plusieurs auteurs, et que, pour cette

(1) Nous rappelons que $A_1^i, A_2^i, \dots, A_n^i$ sont indépendants des éléments de la $i^{\text{ème}}$ colonne.

(2) Cet ordre est appelé quelquefois le *rang* du tableau, ou du système (1). Pour reconnaître qu'un déterminant non nul d'ordre q est principal, il suffit de vérifier la nullité de tous les déterminants d'ordre $q + 1$, car, ceux-ci étant des mineurs des déterminants d'ordre $q + 2$, ces derniers seront nécessairement nuls, et ainsi de suite.

raison, et vu son importance, nous appellerons de préférence théorème fondamental :

THÉOREME FONDAMENTAL. — *Pour qu'un système soit compatible, il faut et il suffit que tous ses déterminants caractéristiques soient nuls. Lorsque cette condition est remplie, on a la solution générale en donnant des valeurs arbitraires aux variables non principales et résolvant ensuite le système des équations principales par rapport aux variables principales, au moyen des formules de Cramer.*

Nous pouvons évidemment supposer, en appelant q l'ordre du déterminant principal, qu'on a donné les numéros $1, 2, \dots, q$ aux variables et aux équations principales. Écrivons alors celles-ci de la manière suivante :

[illegible]

Écrivons maintenant une quelconque des équations non principales

$$(6) \quad X_{q+\mathbf{x}} \equiv (a_{q+\mathbf{x},1}^1 + \dots + a_{q+\mathbf{x},q}^q) + a_{q-\mathbf{x},q+1}^{q+1} + \dots + a_{q-\mathbf{x},n}^n - b_{q-\mathbf{x}} = 0.$$

Si, pour certaines valeurs des x , les équations (5) et (6) sont simultanément vérifiées, le déterminant

$$\Delta_{j-\alpha} = \begin{array}{ccc} & & \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_q \end{array} \\ & \gamma & \\ \hline \alpha_{j+\alpha}^1 & \cdots & \alpha_{j+\alpha}^q \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ X_{q-\alpha} \end{array}$$

est nul, puisque la dernière colonne n'a que des éléments nuls. Mais, d'autre part, on peut le décomposer en $n + 1$ déterminants partiels obtenus en réduisant successivement les Δ_i à chacun de leurs termes (n° 281, III). Les q premiers de ces déterminants sont identiquement nuls comme ayant la dernière colonne proportionnelle à l'une des q premières. Les $n - q$ suivants sont nuls également, parce que chacun d'eux est le produit d'une variable non principale

par un déterminant du tableau T d'ordre supérieur à celui du déterminant principal. Enfin, le dernier n'est autre que $-\delta_{q+z}$. Donc, *on a identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux x ,*

$$(7) \quad \Delta_{q+z} \equiv -\delta_{q+z}.$$

En particulier, si les équations (5) et (6) sont vérifiées, on a nécessairement $\delta_{q+z} = 0$. *Si le système (1) admet une solution, tous les déterminants caractéristiques sont donc nuls.*

Réciproquement, supposons qu'il en soit ainsi. Donnons à $x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_n$ des valeurs numériques quelconques. Puis, résolvons (5) par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_q$, en remarquant qu'on a un système de Cramer, puisque $\delta \neq 0$. Portons les valeurs obtenues dans les autres équations. Je dis qu'elles sont vérifiées. Prenons, par exemple, que Δ_{q+z} s'annule. En effet, on a, d'après (7) et grâce à l'hypothèse faite, $\Delta_{q+z} = 0$. Or, si l'on développe ce déterminant suivant la dernière colonne et si l'on tient compte de (5), on voit qu'il se réduit à $\Delta_{q+z}\delta$. Comme $\delta \neq 0$, Δ_{q+z} est nul. c. q. r. d.

291. *Remarques.* — I. Dans le cas où il y a au plus autant d'équations que d'inconnues ($p \leq n$), il peut arriver que $q = p$. Dans ce cas, il n'y a pas de déterminants caractéristiques; le système est toujours compatible. Il admet une solution ou une infinité, suivant que $n = p$ ou $n > p$.

II. Au contraire, lorsqu'il y a plus d'équations que d'inconnues, comme $q > n$, on a nécessairement $q < p$, et il y a toujours des déterminants caractéristiques. En les annulant, on obtient les conditions de compatibilité. C'est ce qu'on appelle aussi *éliminer les inconnues x_i entre les équations proposées*. En particulier, il arrive souvent qu'on a à éliminer n variables entre $n+1$ équations linéaires. Dans ce cas, on annule le déterminant d'ordre $n+1$ formé par les coefficients des inconnues et les termes constants. Mais il faut bien prendre garde que si la condition ainsi obtenue est toujours nécessaire (3), elle n'est suffisante que si le déterminant principal

(3) Si $q = n$, le déterminant en question est l'unique déterminant caractéristique et, comme tel, doit être nul. Si $q > n$, il est encore nul, car les mineurs relatifs à la dernière colonne sont tous nuls, parce que ce sont des déterminants d'ordre $n \geq q$ du tableau T.

est d'ordre n . S'il est d'ordre $q < n$, il faut annuler $n - 1 - q$ déterminants caractéristiques.

292. Équations homogènes. — Une des équations (1) est dite *homogène* si elle ne possède pas de terme constant. Le système est homogène si tous les b_i sont nuls.

Quand un système est homogène, *les déterminants caractéristiques sont toujours nuls*, puisque la dernière colonne ne comprend jamais que des zéros. Donc, *un système homogène est toujours compatible*. C'est du reste évident, *a priori*, car on a toujours la solution $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, que nous appellerons la *solution nulle*.

Pour qu'il y ait d'autres solutions que la solution nulle, il faut et suffit qu'il y ait des variables non principales, c'est-à-dire que le déterminant principal soit d'ordre inférieur au nombre des inconnues. En particulier, cela arrive toujours lorsqu'il y a moins d'équations que d'inconnues, car on a $q \leq p < n$.

Un cas assez fréquent est celui où $q = p = n - 1$. Si l'on suppose par exemple que les variables principales soient $x_2, x_3, \dots, x_n$, on peut choisir arbitrairement la valeur de x_1 . Les formules de Cramer donnent ensuite

$$x_i = \frac{\| a_1^2 \quad a_1^3 \quad \dots \quad a_1^{i-1} - a_1^1 x_1 \quad a_1^{i+1} \quad \dots \quad a_1^n \|}{\| a_1^2 \quad a_1^3 \quad \dots \quad a_1^n \|}.$$

Le numérateur contient $-x_1$ en facteur et s'écrit, en échangeant la $(i-1)^{\text{ème}}$ colonne successivement avec les $i-2$ précédentes,

$$(-1)^{i-1} x_1 \| a_1^1 \quad a_1^2 \quad \dots \quad a_1^{i-1} \quad a_1^{i+1} \quad \dots \quad a_1^n \|.$$

Désignons par D_i le déterminant déduit du tableau T par la suppression de la $i^{\text{ème}}$ colonne et multiplié par $(-1)^{i-1}$. Ce serait le mineur relatif à x_i dans le déterminant qu'on obtiendrait en complétant le tableau T par la ligne $x_1, x_2, \dots, x_n$ écrite en haut; aussi l'appellerons-nous, pour abréger, *le mineur relatif à x_i* . Nous avons, dans ces conditions,

$$x_i = \frac{x_1 D_i}{D_1};$$

d'où

$$(8) \quad \frac{x_1}{D_1} = \frac{x_2}{D_2} = \dots = \frac{x_n}{D_n}.$$

D'où la règle suivante :

La solution générale d'un système de $n - 1$ équations linéaires et homogènes à n inconnues, dont le déterminant principal est d'ordre $n - 1$, est fournie par des quantités proportionnelles aux mineurs définis ci-dessus. Par exemple, si, comme on le fait souvent, on appelle z la valeur commune des rapports (8), on a

$$(9) \quad x_1 = z D_1, \quad x_2 = z D_2, \quad \dots, \quad x_n = z D_n,$$

formules dans lesquelles z peut prendre une valeur arbitraire. Cette règle est avantageuse en ce sens qu'elle ne détruit pas la symétrie entre les variables. On l'applique en particulier très fréquemment en Géométrie analytique. Par exemple, les deux équations

$$(10) \quad \begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0, \end{cases}$$

où l'on suppose que l'un au moins des mineurs tels que $bc' - cb'$ n'est pas nul ⁽¹⁾, équivalent à

$$(11) \quad \frac{x}{bc' - cb'} = \frac{y}{ca' - ac'} = \frac{z}{ab' - ba'},$$

ou

$$(12) \quad x = z(bc' - cb'), \quad y = z(ca' - ac'), \quad z = z(ab' - ba'),$$

z étant un facteur arbitraire.

Dans le cas où $p = n$, pour qu'il y ait des solutions non nulles, il faut et suffit que le déterminant des coefficients des inconnues soit nul, car c'est la condition pour que le déterminant principal soit d'ordre inférieur à n . Écrire cette condition s'appelle aussi éliminer $x_1, x_2, \dots, x_n$ entre les n équations homogènes.

293. On peut déduire de là le théorème suivant, qui est d'un usage assez fréquent :

THÉORÈME. — *Pour qu'un déterminant soit nul, il faut et suffit qu'on puisse trouver une relation linéaire et homogène qui soit*

⁽¹⁾ Cela revient à supposer qu'on n'a pas $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, auquel cas les deux équations seraient en somme identiques, ce qui serait sans intérêt.

vérifiée par les éléments de chacune des lignes ou de chacune des colonnes ⁽¹⁾.

En effet, si l'on écrit que la relation linéaire et homogène

$$(13) \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0,$$

est vérifiée par les éléments de chaque ligne du déterminant $|a_i^j|$, on obtient, pour déterminer les coefficients inconnus λ , le système

$$(14) \quad a_1^i \lambda_1 + a_2^i \lambda_2 + \dots + a_n^i \lambda_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Pour que la relation existe, il faut et suffit que ce système admette des solutions non nulles, c'est-à-dire, d'après ce qui a été vu plus haut, que le déterminant soit nul.

Remarque. — Nous connaissons en somme déjà l'existence des relations telles que (14) quand on suppose que le déterminant est nul sans que tous ses mineurs le soient. Il nous suffit, en effet, de prendre par exemple $\lambda_1 = \Delta_1^1$, $\lambda_2 = \Delta_1^2$, ..., $\lambda_n = \Delta_1^n$ pour retomber sur les formules (9) et (13) du Chapitre précédent.

294. Résolution pratique des équations linéaires. — Les méthodes que nous venons d'exposer sont surtout théoriques et sont presque indispensables quand on a affaire à des équations à coefficients littéraux, surtout s'il y a lieu de faire une discussion. Mais, lorsqu'on a à résoudre un système à coefficients tous ou presque tous numériques, on va souvent plus vite en procédant d'une manière plus élémentaire.

Le principe général de la méthode à laquelle nous voulons faire allusion consiste à *chercher des combinaisons linéaires (n° 289) des équations proposées, dans lesquelles figurent le moins d'inconnues possible*. C'est, au fond, le principe qui nous a guidé au début du n° 289. Seulement, dans la pratique, on ne fait pas appel à la théorie des déterminants et l'on n'élimine généralement pas d'un seul coup toutes les inconnues sauf une. On procède plus ou moins par tâtonnements. Ou bien, on élimine méthodiquement une des inconnues, par exemple x_n , entre les équations proposées combinées

⁽¹⁾ Bien entendu, la relation n'est pas, en général, la même pour les lignes et pour les colonnes.

pas tous nuls, on peut résoudre (17) par rapport à f_1 , ce qui donne manifestement une expression de la forme annoncée.

296. THÉORÈME I. — *Pour que les formes $f_1, f_2, \dots, f_p$ soient indépendantes, il faut et il suffit que le déterminant principal déduit du tableau de leurs coefficients soit d'ordre égal au nombre des formes.*

Cherchons en effet à vérifier l'identité (17). Il nous faut annuler séparément les coefficients de $x_1, x_2, \dots, x_n$ (n° 200 *bis*) (4)

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^1 \lambda_1 + a_2^1 \lambda_2 + \dots + a_p^1 \lambda_p = 0, \\ a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_2 + \dots + a_p^2 \lambda_p = 0, \\ \vdots \\ a_1^n \lambda_1 + a_2^n \lambda_2 + \dots + a_p^n \lambda_p = 0. \end{array} \right.$$

Or, nous savons (n° 292) qu'un tel système linéaire et homogène n'admet des solutions non nulles que si son déterminant principal est d'un ordre inférieur au nombre p des inconnues, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Dans le cas où il y a plus de formes que de variables, les formes sont forcément dépendantes, car l'ordre du déterminant principal étant $\leq n$, il est sûrement $< p$, si $n < p$. Dans le cas de $n = p$, il faut et suffit, pour l'indépendance, que le déterminant des coefficients, qu'on appelle souvent le déterminant des n formes, soit différent de zéro.

THÉOREME II. — *Pour que plusieurs formes linéaires soient indépendantes, il faut et suffit qu'on puisse déterminer les x_i pour qu'elles prennent des valeurs numériques arbitrairement choisies.*

1^{re} La condition est suffisante. — En effet, si elle est remplie, les p formes f_i ne sauraient être liées par une relation de la forme (17), sans quoi leurs valeurs numériques seraient toujours liées par cette relation et ne pourraient pas, contrairement à l'hypothèse, être choisies arbitrairement.

(¹) Sans s'appuyer sur le théorème général auquel le lecteur est renvoyé, on peut se contenter d'annuler tous les x_i , sauf un seul d'entre eux, qui sera successivement $x_1, x_2, \dots, x_n$.

en vertu d'une propriété des déterminants adjoints (n° 287, théorème I). Donc :

THÉORÈME. — *Les modules de deux substitutions inverses sont inverses l'un de l'autre.*

298. Soit maintenant une forme linéaire quelconque des x_i , par exemple la forme (15). Si l'on y remplace les x_i par les expressions (19), on obtient évidemment une forme linéaire des y_i , qui est dite transformée de la précédente par la substitution (19).

THÉORÈME I. — *Si p formes linéaires sont indépendantes, leurs transformées le sont aussi.*

Cela résulte manifestement du théorème II du n° 296 et de ce qu'on peut toujours déterminer les y pour faire prendre aux x des valeurs données quelconques.

THÉORÈME II. — *Étant données n formes linéaires des x_i , le déterminant des formes transformées est égal au déterminant des formes proposées multiplié par le module de la substitution.*

Soient les n formes

$$(22) \quad f_i = b_i^1 x_1 + b_i^2 x_2 + \dots + b_i^n x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Leurs transformées s'écrivent

$$(23) \quad g_i = \sum_{j=1}^n b_i^j (a_j^1 y_1 + a_j^2 y_2 + \dots + a_j^n y_n) = g_i^1 y_1 + \dots + g_i^n y_n,$$

en posant

$$(24) \quad g_i^k = a_1^k b_i^1 + a_2^k b_i^2 + \dots + a_n^k b_i^n.$$

Dès lors, le déterminant $[g_i^k]$ apparaît comme étant égal au produit des déterminants $[b_i^j]$ et $[a_j^k]$, effectué ligne par colonne (n° 283)

C. Q. F. D.

Remarque. — Si l'on fait sur les g_i la substitution inverse (20), on retombe naturellement sur les f_i . En appliquant de nouveau le théorème précédent, on retrouve l'égalité $pm = 1$.

299. Substitutions orthogonales. — Parmi les substitutions linéaires, il existe une catégorie fort importante, qu'on appelle *substitutions orthogonales*, à cause de leur origine géométrique, et que nous retrouverons en Géométrie analytique (t. II). On dit que *les formules (19) définissent une substitution orthogonale si elles donnent lieu à l'identité*

$$(25) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

Imaginons donc qu'on remplace, au premier membre, les x_i par les valeurs (19) et identifions les deux membres (n° 200 bis). En égalant successivement les termes carrés et annulant les termes rectangles, on a les conditions nécessaires et suffisantes

$$(26) \quad (a_1^i)^2 + (a_2^i)^2 + \dots + (a_n^i)^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(27) \quad a_1^i a_1^j + a_2^i a_2^j + \dots + a_n^i a_n^j = 0 \quad (i \neq j = 1, 2, \dots, n).$$

Autrement dit, *la somme des carrés des éléments d'une même colonne du déterminant m doit être égale à 1 et la somme des produits des éléments de même rang de deux colonnes doit être nulle.*

On peut déduire très simplement de là les formules relatives à la substitution inverse. Pour avoir y_i , par exemple, multiplions la première ligne de (19) par a_1^i , la seconde par a_2^i , ..., la $n^{\text{ième}}$ par a_n^i et ajoutons. Le second membre se réduit manifestement à y_i , si l'on tient compte des relations telles que (26) et (27). On a donc

$$(28) \quad y_i = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \dots + a_n^i x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Autrement dit, *les coefficients de la substitution inverse s'obtiennent par un simple échange des lignes et des colonnes dans le déterminant m .* De là résultent diverses conséquences :

1° *On a pour les lignes les mêmes relations que plus haut pour les colonnes; c'est-à-dire*

$$(29) \quad (a_1^i)^2 + (a_1^j)^2 + \dots + (a_n^i)^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$(30) \quad a_1^i a_1^j + a_2^i a_2^j + \dots + a_n^i a_n^j = 0 \quad (i \neq j = 1, 2, \dots, n).$$

Il suffit, pour le voir, de remplacer, dans (25), les y_i par les expressions (28).

2° *Les deux substitutions ont même module, lequel est égal à ± 1 .*

En effet, μ se déduit de m par l'échange des lignes avec les colonnes; donc (n° 277) $\mu = m$. De plus (n° 297), $\mu m = 1$; donc $m^2 = 1$, $m = \pm 1$. On peut aussi le vérifier en élevant m au carré colonne par colonne et tenant compte de (26) et (27).

3° *Chaque mineur de m est égal ou oppose à l'élément correspondant, suivant que $m = +1$ ou -1 .*

En effet, comparons (28) à (20) et (21). Nous avons

$$a'_i = x'_i = \frac{\Lambda'_i}{m},$$

$$\Lambda'_j = m a'_j,$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE XXV.

FORMES QUADRATIQUES.

---

300. **Définitions.** — On appelle *forme quadratique des n variables* $x_1, x_2, \dots, x_n$ tout polynôme homogène et du second degré par rapport à ces variables.

La forme quadratique la plus générale peut se représenter par la notation suivante :

$$(1) \quad \omega(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i^i x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^i x_i x_j \quad (i \neq j),$$

où les a_i^i et a_{ij}^i désignent des coefficients constants quelconques. Les termes de la première somme sont appelés *termes carrés*; ceux de la seconde somme sont les *termes rectangles*; pour les avoir tous, on doit prendre pour i et j toutes les combinaisons deux à deux des nombres $1, 2, \dots, n$, sans distinguer l'ordre relatif de ces deux indices, de sorte qu'on a le droit d'écrire indifféremment a_{ij}^i ou a_{ji}^j . On peut, par exemple, assujettir i à être toujours $< j$.

Une autre notation également adoptée est la suivante :

$$(2) \quad \omega(x_i) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^i x_i x_j,$$

où l'on doit prendre pour (i, j) tous les arrangements avec répétition et deux à deux des nombres $1, 2, \dots, n$ (*Exerc.* : Chap. II, Exercice proposé n° 6), en convenant en outre de l'égalité $a_{ii}^i = a_{ii}^i$; de sorte que, lorsque $i \neq j$, a_{ij}^i (ou a_{ji}^j) représente, comme plus haut, le demi-coefficient de $x_i x_j$, et, lorsque $i = j$, a_{ii}^i représente le coefficient de x_i^2 .

On appelle *demi-dérivées* d'une forme quadratique ses demi-

et

$$(4) \quad \omega = \frac{1}{a_1^4} (f_1)^2 + \omega_1,$$

où f_1 désigne la demi-dérivée par rapport à la variable directrice et θ_1 et ω_1 des formes quadratiques où ne figure pas cette variable⁽¹⁾. Comme on le voit, *en même temps qu'on a fait apparaître un carré, on a fait disparaître une variable* de la forme quadratique restante, à savoir la variable directrice.

2° *Deux variables directrices.* — Ce sont deux variables dont le produit se trouve dans ω , leurs carrés n'y figurant pas. Si, par exemple, a_1^2 n'est pas nul, a_1^1 et a_2^2 l'étant, on peut prendre pour variables directrices simultanées x_1 et x_2 . On peut écrire alors

$$\begin{aligned} \omega &= 2a_1^2 x_1 x_2 + 2x_1 (a_1^3 x_3 + \dots + a_1^n x_n) + 2x_2 (a_2^3 x_3 + \dots + a_2^n x_n) + \theta_{12} \\ &= \frac{2}{a_1^2} [(a_1^1 x_1) (a_1^2 x_2) + (a_1^1 x_1) (a_1^3 x_3 + \dots + a_1^n x_n) \\ &\quad + (a_1^2 x_2) (a_2^3 x_3 + \dots + a_2^n x_n)] + \theta_{12} \\ &= \frac{2}{a_1^2} [a_1^2 x_2 + (a_1^3 x_3 + \dots + a_1^n x_n)] [a_1^1 x_1 + (a_2^3 x_3 + \dots + a_2^n x_n)] \\ &\quad + \theta_{12} = \frac{1}{2a_1^2} (a_1^3 x_3 + \dots + a_1^n x_n) (a_2^3 x_3 + \dots + a_2^n x_n), \end{aligned}$$

$$(5) \quad \omega = \frac{2}{a_1^2} f_1 f_2 + \omega_{12},$$

$$(6) \quad \omega = \frac{2}{a_1^2} \left[\left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right)^2 \right] + \omega_{12},$$

où f_1 et f_2 désignent les demi-dérivées par rapport aux variables directrices et θ_{12} et ω_{12} des formes quadratiques où ne figurent pas ces variables⁽²⁾. Comme on le voit, *en même temps qu'on a fait apparaître deux carrés, on a fait disparaître deux variables* de la forme quadratique restante, à savoir les variables directrices.

302. Cela posé, voici comment on procède pour effectuer la décom-

(1) Le lecteur se rend aisément compte de la marche suivie : nous groupons les termes qui renferment x_1 et nous les considérons comme les deux premiers termes du développement du carré d'un certain binôme. Nous les remplaçons par ce carré; mais nous corrigeons en retranchant les termes introduits en trop.

(2) Nous groupons les termes qui renferment x_1 et x_2 , puis x_1 , puis x_2 et nous les considérons comme les trois premiers termes du développement du produit de deux certains binômes. Nous les remplaçons par ce produit; mais nous corrigeons en retranchant les termes introduits en trop.

position totale. On commence par extraire un ou deux carrés par l'une des méthodes précédentes, suivant les valeurs numériques particulières des coefficients. Il reste une forme quadratique renfermant une ou deux variables en moins, sur laquelle on recommence la même opération, et ainsi de suite. Les formes quadratiques résiduelles successivement obtenues renferment *un nombre de variables qui diminue chaque fois d'une quantité au moins* ⁽¹⁾ *égale au nombre de carrés qu'on fait apparaître*. Il en résulte qu'au bout de n opérations au plus, on aura épuisé toute la forme quadratique proposée et l'on aura fait apparaître au plus n carrés. Donc, *la méthode de Gauss permet de décomposer toute forme quadratique en un nombre de carrés qui ne dépasse pas le nombre des variables*.

303. Je dis que *ces carrés sont indépendants*, ou, plus exactement, que les formes linéaires dont ils sont les carrés sont indépendantes. Pour le prouver, nous allons utiliser le théorème II du n° 296 et faire voir qu'on peut leur faire prendre des valeurs arbitraires. Il s'agit de montrer qu'on peut toujours résoudre, par rapport aux x_i , le système obtenu en égalant à des constantes quelconques les formes linéaires dont les carrés figurent dans la décomposition. Rangeons ces équations suivant l'ordre dans lequel ont été obtenus les carrés correspondants et groupons deux à deux celles qui proviennent de deux variables directrices simultanées. Je dis que *chaque groupe peut être résolu par rapport aux variables directrices correspondantes*. En effet, si le groupe ne renferme qu'une équation, telle que $f_1 = \text{const.}$, on peut en tirer x_1 , car le coefficient a_1^1 de cette variable dans f_1 n'est pas nul, par hypothèse. Si le groupe renferme deux équations, telles que $f_1 + f_2 = \text{const.}$ et $f_1 - f_2 = \text{const.}$, on en déduit, par addition et soustraction, $f_1 = \text{const.}$ et $f_2 = \text{const.}$. Mais de f_1 on peut tirer x_2 et de f_2 on peut tirer x_1 en fonction de $x_3, \dots, x_n$, car $a_1^2 \neq 0$.

Dès lors, pour résoudre le système, on peut procéder comme il suit : on résout le dernier groupe par rapport à la ou aux variables directrices correspondantes. Puis on porte le résultat dans le groupe

---

(1) Nous disons « au moins » parce qu'il peut se produire accidentellement, au courant des calculs, des réductions faisant disparaître d'autres variables que les variables directrices.

précédent, qu'on résout à son tour par rapport à sa ou ses variables directrices. On porte dans le groupe précédent et ainsi de suite jusqu'au premier groupe. Le système est alors résolu ⁽¹⁾.

304. *Remarques.* — I. La méthode de Gauss comporte un certain degré d'arbitraire à cause de *l'indétermination* qui existe, à chaque opération, *dans le choix de la ou des variables directrices*. Il faut *savoir en profiter* pour avoir les calculs les plus simples possible. Par exemple, si une variable ne rentre que dans un petit nombre de termes, il y a avantage à la prendre, si possible, pour variable directrice, de préférence à une autre.

II. *La méthode de Gauss ne s'applique pratiquement qu'à des formes à coefficients tous ou presque tous numériques.* Si les coefficients sont littéraux, les calculs deviennent rapidement très pénibles et s'encombrent d'hypothèses relatives à la non-nullité des coefficients des variables directrices.

305. **Théorèmes généraux sur la décomposition.** — Il existe, on vient de le voir, différentes manières d'effectuer la décomposition suivant la méthode de Gauss. En outre, on peut concevoir qu'il y ait d'autres procédés pour résoudre le problème ⁽²⁾. Quoi qu'il en soit, il existe certaines propriétés, dites *propriétés d'invariance*, qui sont indépendantes de la marche suivie pour obtenir la décomposition.

THÉOREME I. — *Le nombre des carrés indépendants en lesquels on peut décomposer une forme quadratique est égal à l'ordre du déterminant principal déduit de son discriminant* ⁽³⁾.

En effet, soit

$$(7) \quad \omega = X_1^2 - X_2^2 + \dots + X_p^2,$$

avec

$$(8) \quad X_i = x_i^1 x_1 + x_i^2 x_2 + \dots + x_i^p x_p + x_i^{p+1} x_{p+1} + \dots + x_i^n x_n,$$

les formes linéaires $X_1, X_2, \dots, X_p$ étant supposées indépendantes, de sorte que

(1) Si toutes les variables ont servi de variables directrices, c'est-à-dire si la décomposition comporte n carrés, il n'y aura évidemment qu'une solution. Sinon, les variables qui n'ont pas été directrices peuvent être choisies arbitrairement.

(2) C'est ainsi que toute substitution orthogonale (n° 299) effectuée sur la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ la transforme en une somme de n carrés.

(3) Ou encore au *rang* du discriminant (cf. p. 364, note 2).

leur nombre est n et qu'on peut supposer par exemple (n° 296, théorème I)

$$(9) \quad \parallel x_1^1 \ x_1^2 \ \dots \ x_1^p \parallel \neq 0.$$

Prenons les demi-dérivées; on a, d'une manière générale,

$$(10) \quad f_j = x_1^j X_1 + x_2^j X_2 + \dots + x_p^j X_p.$$

Cela posé, considérons les deux systèmes linéaires

$$(11) \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots, \quad X_p = 0;$$

$$(12) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_n = 0.$$

Toute solution du premier vérifie évidemment le second, grâce à (10).

Inversement, toute solution du second vérifie le premier, car les p premières équations (12), considérées comme des équations en $X_1, X_2, \dots, X_p$ au moyen des formules (10), n'admettent que la solution zéro, à cause de (9). Les systèmes (11) et (12) sont donc équivalents. Par suite, ils admettent les mêmes groupes de variables principales (n° 290). Or, on peut prendre pour variables principales du premier $x_1, x_2, \dots, x_p$, toujours à cause de (9). Donc, le déterminant formé par les p premières lignes et les p premières colonnes du discriminant est principal et le théorème est démontré.

306. Dans ce qui précède, nous ne nous occupons pas de la réalité des formes $X_1, X_2, \dots, X_p$. Plaçons-nous maintenant à ce point de vue particulier. La forme ω étant supposée à coefficients réels, ne considérons que les *décompositions réelles*, c'est-à-dire que nos carrés ne devront porter que sur des quantités réelles. Mais alors il pourra s'en trouver qui seront précédés du signe $+$ et d'autres qui seront précédés du signe $-$. Les premiers seront appelés *carrés positifs* les seconds *carrés négatifs*. Cela posé, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Quel que soit le mode de décomposition en carrés indépendants, le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs sont invariables.*

En effet, soient les deux décompositions

$$(13) \quad \omega = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \dots - Y_q^2,$$

$$(14) \quad \omega = X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_{k'}'^2 - Y_1'^2 - Y_2'^2 - \dots - Y_{q'}'^2.$$

Les deux sommes $k - q$ et $k' - q'$ sont égales, d'après le théorème précédent. Supposons alors qu'on ait, par exemple, $k > k'$; on en déduirait $q > q'$.

Considérons les deux systèmes linéaires

$$(15) \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad \dots, \quad Y_q = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_{k'} = 0;$$

$$(16) \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad \dots, \quad Y_q = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_k = 0.$$

On peut satisfaire au premier sans satisfaire au second, car si toute solution de (15) vérifiait (16), les variables non principales de (16) comprendraient toutes les variables non principales de (15). Or, les formes $Y_1, \dots, Y_q, X_1, \dots, X_k$ étant indépendantes, le nombre des premières est $n - (q + k)$. Quant au nombre des secondes, il est au moins égal à $n - (q + k')$. On aurait donc $n - (q + k) \geq n - (q + k')$, ou $k \leq k'$, ce qui est contraire à l'hypothèse $k > k'$. Dès lors, si dans (13) et (14) nous remplaçons les x_i par une solution de (15) qui ne soit pas solution de (16), on voit que, d'après (13), ω devrait être > 0 et, d'après (14), il devrait être < 0 . Ces deux inégalités étant incompatibles, l'hypothèse $k > k'$ est inadmissible. Il en va de même pour $k < k'$. Donc $k = k'$, puis $q = q'$.

C. Q. F. D.

Ce théorème est connu sous le nom de *loi d'inertie*.

Une forme quadratique réelle à n variables est dite *définie* si elle est décomposable en une somme de n carrés indépendants et de même signe. Elle conserve évidemment un signe invariable pour toutes les valeurs réelles des x_i et ne peut s'annuler que si tous les x_i sont nuls.

307. Forme polaire. — On appelle *forme polaire* (1) de ω relativement aux deux groupes de variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ et nous représenterons par la notation $\omega(x_i | x'_i)$ l'une ou l'autre des deux expressions identiques :

$$(17) \quad \omega(x_i | x'_i) = \frac{1}{2} \left(x'_1 \frac{\partial \omega}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial \omega}{\partial x'_2} + \dots + x'_n \frac{\partial \omega}{\partial x'_n} \right),$$

$$(18) \quad \omega(x_i | x'_i) = \frac{1}{2} \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right).$$

On y est conduit tout naturellement lorsqu'on se propose d'ordonner par rapport à λ, μ la quantité $\omega(\lambda x_i + \mu x'_i)$, qui est, *a priori*, un trinôme homogène et du second degré relativement à ces variables, soit

$$(19) \quad \omega(\lambda x_i + \mu x'_i) = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2,$$

(1) Cette dénomination a son origine en Géométrie analytique, dans la théorie des poles, polaires, et plans polaires, où la forme polaire joue un rôle fondamental (I, II).

A, B, C désignant certaines fonctions des x_i, x'_i , que nous allons calculer.

L'égalité (19) ayant lieu quels que soient λ et μ , faisons-y $\mu = 0, \lambda = 1$: il vient $A = \omega(x_i)$. De même, $C = \omega(x'_i)$. Pour avoir B, dérivons par rapport à μ : nous obtenons (n° 130)

$$\sum_{i=1}^n x'_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'_i} \right)_{\lambda x_i + \mu x'_i} = 2B\lambda + 2C\mu,$$

en représentant par $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x'_i} \right)_{\lambda x_i + \mu x'_i}$ ce que devient $\frac{\partial \omega}{\partial x'_i}$ quand on y remplace les x_j par les $\lambda x_j + \mu x'_j$. Faisons maintenant $\mu = 0, \lambda = 1$: nous avons

$$B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial \omega}{\partial x'_i}.$$

En dérivant (19) par rapport à λ , puis faisant $\lambda = 0, \mu = 1$, on obtiendrait de même

$$B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \omega}{\partial x'_i}.$$

Ceci nous prouve l'identité des expressions (17) et (18) et nous donne du même coup la *formule très importante* ⁽¹⁾

$$(20) \quad \omega(\lambda x_i + \mu x'_i) = \lambda^2 \omega(x_i) + 2\lambda\mu \omega(x_i | x'_i) + \mu^2 \omega(x'_i).$$

En particulier, si l'on suppose $x'_i = x_i$ et $\lambda = \mu = 1$, on trouve

$$(21) \quad \omega(x_i | x_i) = \omega(x_i),$$

ce qui n'est autre que l'identité d'Euler (n° 134).

308. A cause de son importance en Géométrie analytique, il est essentiel de savoir calculer de différentes manières la forme polaire d'une forme quadratique donnée. Tout d'abord, *si l'on tient à ce qu'elle soit ordonnée par rapport aux x_i ou aux x'_i* , on utilisera la formule (18) ou la formule (17). Il en sera de même *si un grand nombre des x_i ou des x'_i sont nuls*, circonstance qui apporte des

---

(1) On aurait pu aussi l'établir au moyen de la formule de Taylor (n° 132).

simplifications évidentes. Mais, si l'on écarte ces hypothèses, la véritable méthode pratique est la suivante :

On remarque, ce qui est évident sur (17) ou (18), que *la forme polaire d'une somme est la somme des formes polaires de chacun de ces termes* et l'on effectue le calcul terme à terme, en retenant une fois pour toutes que *les formes polaires de $a_i^j x_i^2$ et $2a_i^j x_i x_j$ sont respectivement $a_i^j x_i' x_i'$ et $a_i^j (x_i x_j + x_i' x_j')$* , comme cela résulte immédiatement des formules de définition (17) et (18).

Il arrive que la forme quadratique ω ne se présente pas sous forme ordonnée par rapport aux x_i , mais sous l'aspect d'une *forme quadratique relativement à un certain nombre de formes linéaires* $y_1, y_2, \dots, y_p$ des x_i . Dans ce cas, il faut bien se garder, si l'on n'a pas d'autres raisons de le faire, de développer ω . Nous allons, en effet, prouver qu'il est *légitime de calculer la forme polaire en regardant les y_i comme les variables indépendantes*.

D'une manière précise, soit

$$(22) \quad \omega(x_i) \equiv \theta(y_j),$$

Désignons par y_j ce que devient y_j quand on y remplace les x_i par les x_i' . Si l'on remplace maintenant x_i par $\lambda x_i + \mu x_i'$, λ et μ désignant deux paramètres quelconques, y_j devient $\lambda y_j + \mu y_j'$, comme cela résulte manifestement du fait que y_j dépend des x_i d'une façon linéaire et homogène. Dès lors, on a identiquement

$$\omega(\lambda x_i + \mu x_i') \equiv \theta(\lambda y_j + \mu y_j'),$$

ou, en se servant de (20),

$$\lambda^2 \omega(x_i) + 2\lambda \mu \omega(x_i | x_i') + \mu^2 \omega(x_i') \equiv \lambda^2 \theta(y_j) + 2\lambda \mu \theta(y_j | y_j') + \mu^2 \theta(y_j').$$

Comme ceci est vrai quels que soient λ, μ , on peut égaler les coefficients de $\lambda \mu$ (n° 200 bis), ce qui donne

$$(23) \quad \omega(x_i | x_j') \equiv \theta(y_j | y_j') \quad \text{c. q. f. d.}$$

309. **Transformations des formes quadratiques par substitution linéaire.** — Imaginons qu'on effectue sur $\omega(x_i)$ la substitution linéaire
(n° 297)

$$(24) \quad x_i = x_1^1 y_1 + x_1^2 y_2 + \dots + x_1^n y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous obtenons une forme quadratique $\theta(y_i)$, qui est dite *la transformée de*

ω par la substitution (24). On a l'identité

$$(25) \quad \omega(x_i) \equiv \theta(y_i),$$

qui a lieu quels que soient les x_i ou les y_i suivant qu'on y remplace les y_i ou les x_i par leurs valeurs en fonction des x_i ou des y_i .

Appelons $f_1, f_2, \dots, f_n$ les demi-dérivées de ω et $g_1, g_2, \dots, g_n$ celles de θ . Dérivant (25) par rapport à y_i , on a

$$(26) \quad g_i = x'_1 f_1 + x'_2 f_2 + \dots + x'_n f_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On voit que ces formules définissent une substitution linéaire dont le module μ se déduit de celui de (24) par l'échange des lignes et des colonnes et lui est par conséquent égal.

Appelons δ et δ' les discriminants de ω et θ . Par définition, δ' est le déterminant des formes (26) où l'on suppose les f_i exprimés en fonction des y_i . Or, on a

$$(27) \quad f_i = a^1_i x_1 + a^2_i x_2 + \dots + a^n_i x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On obtient donc les g_i en fonction des y_i en faisant successivement sur les formules (26) les substitutions linéaires (27) et (24) ⁽¹⁾. Appliquons alors le théorème II du n° 298. Le déterminant des formes (26) est μ par rapport aux f_i . Après la substitution (27), il devient $\mu\delta$ par rapport aux x_i . Enfin, après la substitution (24), il devient $\mu\delta'\mu = \delta\mu^2$, par rapport aux y_i . Donc :

THÉORÈME. — *Le nouveau discriminant est égal à l'ancien multiplié par le carré du module de la substitution.*

310. On peut se proposer de chercher une substitution telle que la forme θ ne renferme pas de termes rectangles. Cela équivaut évidemment à la décomposition en carrés (n° 301). Nous allons restreindre le problème en assumant la substitution à être orthogonale (n° 299).

Supposons donc qu'on ait identiquement

$$(28) \quad \omega(x_i) \equiv S_1 y_1^2 + S_2 y_2^2 + \dots + S_n y_n^2.$$

Différencions par rapport à y_i

$$(29) \quad S_i y_i \equiv \frac{1}{2} \left(x'_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + x'_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right).$$

Le second membre est la forme polaire de ω relativement aux groupes

⁽¹⁾ Les formules (27) ne définissent à proprement parler une substitution linéaire que si $\delta \neq 0$ (n° 297). Mais cette restriction est inutile ici, car elle l'est pour la démonstration du théorème II du n° 298, sur lequel nous nous appuyons.

$(x_1, \dots, x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$. On peut donc aussi écrire, en posant, pour faciliter l'écriture,

$$(30) \quad x'_1 = u_1, \quad x'_2 = u_2, \quad \dots, \quad x'_n = u_n,$$

$$(31) \quad S_i x'_i \equiv \frac{1}{2} \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial u_1} + x_2 \frac{\partial \omega}{\partial u_2} + \dots + x_n \frac{\partial \omega}{\partial u_n} \right).$$

D'autre part, on a (n° 299)

$$y_i = x'_1 x_1 + x'_2 x_2 + \dots + x'_n x_n;$$

donc

$$\frac{1}{2} \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial u_1} + \dots + x_n \frac{\partial \omega}{\partial u_n} \right) \equiv S_i (u_1 x_1 + \dots + u_n x_n).$$

D'où

$$(32) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u_1} = S_i u_1, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u_2} = S_i u_2, \quad \dots, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u_n} = S_i u_n.$$

D'une manière générale, si l'on désigne par $u_1, u_2, \dots, u_n$ les éléments d'une même colonne du déterminant Δ de (31), on doit avoir des relations de la forme

$$(33) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u_1} = S u_1, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u_2} = S u_2, \quad \dots, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial u_n} = S u_n,$$

$$(34) \quad u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 1,$$

où S désigne une inconnue auxiliaire, qui doit devenir, après la substitution, le coefficient du carré de même rang que la colonne considérée.

Les équations (33) sont linéaires et homogènes; pour que (34) puisse être vérifié, il faut que leur déterminant soit nul (n° 292), ce qui conduit, pour déterminer S , à l'équation suivante :

$$(35) \quad \Delta(S) = \begin{vmatrix} a_1^1 - S & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - S & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & \dots & a_n^n - S \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, qui est visiblement de degré n , s'appelle l'équation en S de la forme quadratique ω . On peut établir à son sujet différentes propriétés, entre autres qu'elle a toutes ses racines réelles si les a_i^j sont réels. Mais nous ne pouvons entreprendre ici cette étude, qui sera d'ailleurs faite en détail dans le Tome II, pour les cas de $n = 2$ et de $n = 3$. Voyons seulement comment de sa résolution on peut déduire la solution du problème que nous nous sommes posé.

Bonbons-nous au cas où il n'y a que des racines simples, que nous appelons $S_1, S_2, \dots, S_n$. Les équations (33), où S est supposé représenter une quelconque de ces racines, ont un déterminant principal d'ordre $n - 1$, car si tous les mineurs de $\Delta(S)$ étaient nuls, la dérivée $\Delta'(S)$, qui est, au signe près,

la somme des mineurs relatifs aux éléments de la diagonale principale (n° 282), serait également nulle et S serait racine multiple. La solution générale du système (33) est donc déterminée à un facteur près, lequel se calculera, au signe près, en portant dans (34).

Chaque racine de (35) nous fournit donc une colonne de u . Je dis maintenant qu'à deux racines différentes S et S' correspondant deux colonnes liées par la relation

$$(36) \quad u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + \dots + u_n u'_n = 0,$$

qui, avec (34), caractérise les substitutions orthogonales. En effet, en tenant compte de (33) et des équations analogues accentuées, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(u'_1 \frac{\partial \omega}{\partial u_1} + \dots + u'_n \frac{\partial \omega}{\partial u_n} \right) &= S(u_1 u'_1 - \dots - u_n u'_n), \\ \frac{1}{2} \left(u_1 \frac{\partial \omega}{\partial u'_1} - \dots - u_n \frac{\partial \omega}{\partial u'_n} \right) &= S'(u_1 u'_1 - \dots + u_n u'_n). \end{aligned}$$

Les premiers membres étant égaux (n° 307), on en déduit

$$(S - S')(u_1 u'_1 + \dots + u_n u'_n) = 0,$$

c'est-à-dire (36), puisque $S \neq S'$.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier qu'on a bien l'identité (28). Nous sommes assurés de (29). Multipliant par y_i et ajoutant toutes les équations analogues, il vient, en se servant de (24) et (21),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n S_i y_i^2 &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i \left(x_1^i \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \dots - x_n^i \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right) \\ &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \sum_{i=1}^n x_1^i y_i + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \sum_{i=1}^n x_n^i y_i \\ &\equiv \frac{1}{2} \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right) \equiv \omega(x_i), \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

311. Forme adjointe. — Supposons que le discriminant δ de $\omega(x_i)$ ne soit pas nul. Les formules

$$(37) \quad y_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_j^i x_j$$

définissent une substitution linéaire (n° 297). Les nouvelles variables y_i sont appelées *variables adjointes*. De (37), on tire (n° 297)

$$(38) \quad x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i y_j,$$

en posant

$$(39) \quad x_i^j = \frac{A_i^j}{\delta} = \frac{A_i^j}{\delta},$$

et désignant par A_i^j le mineur de δ relatif à a_i^j . Si l'on porte ces valeurs des x_i dans $\omega(x_i)$, on obtient une nouvelle forme quadratique $\Omega(y_i)$, qui est dite *la forme adjointe de la proposée*.

Au lieu de porter les x_i donnés par (38) dans $\omega(x_i)$, on peut les porter dans

$$(40) \quad \omega(x_i) \equiv \Omega(y_i) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

d'après (21). De là résulte un moyen élégant pour calculer Ω sous forme de déterminant. Éliminons les x_i entre les $n+1$ équations linéaires (37) et (40) (n° 291)

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n & y_n \\ y_1 & \dots & \dots & y_n & \Omega \end{vmatrix} = 0.$$

Pour en tirer rapidement Ω , écrivons la dernière ligne

$$y_1 + 0, \quad y_2 + 0, \quad \dots, \quad y_n + 0, \quad 0 + \Omega;$$

puis décomposons notre déterminant par la règle du n° 284 (th. III).

$$\begin{vmatrix} \delta & y_1 \\ \dots & \dots \\ \dots & y_n \\ y_1 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta & y_1 \\ \dots & \dots \\ \dots & y_n \\ 0 & \dots & 0 & \Omega \end{vmatrix} = 0.$$

Le second déterminant étant développé suivant la dernière ligne, on a

$$(41) \quad \Omega(y_i) = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} \delta & y_1 \\ \dots & \dots \\ \dots & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix}.$$

312. Nous savons que *la forme polaire se conserve* dans toute

substitution linéaire (n° 308); on a donc identiquement

$$(42) \quad \omega(x_i | x'_i) \equiv \Omega(y_i | y'_i),$$

ou

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial \Omega}{\partial y_i},$$

ou, en tenant compte de (37),

$$\sum_{i=1}^n y_i \left(x_i - \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} \right) = 0.$$

Comme ceci doit avoir lieu quels que soient les y'_i , on a

$$(43) \quad x_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}.$$

Il résulte de là que *la forme adjointe de $\Omega(y_i)$ est $\omega(x_i)$. Il y a réciprocité entre les deux formes quadratiques.*

En comparant (43) avec (38), on voit que *les coefficients de $\Omega(y_i)$ sont les x_i^l définis par la formule (39)*, ce qu'on pourrait d'ailleurs vérifier directement sur la formule (41), en développant le second membre suivant la dernière colonne, les mineurs étant à leur tour développés suivant la dernière ligne.

Signalons, pour terminer, les différentes manières d'écrire la forme polaire, d'après ce qui précède :

$$(44) \quad \begin{aligned} \omega(x_i | x'_i) \equiv \Omega(y_i | y'_i) &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial \omega}{\partial x'_i} \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \equiv \sum_{i=1}^n x'_i y'_i. \end{aligned}$$

NOTE I.

SUR LES RELATIONS DE RÉCURRENCE.

---

313. Imaginons une quantité u_n qui dépende du nombre naturel n et qui soit déterminée dès que ce nombre est connu. Il peut arriver que u_n soit donné explicitement sous la forme d'une certaine fonction de n , comme nous en avons rencontré bien des exemples dans le courant de cet Ouvrage (en particulier au Chapitre IV). Mais on peut être conduit aussi à définir u_n au moyen d'une relation de la forme

$$(1) \quad u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots),$$

où f_n désigne une fonction donnée (pouvant dépendre de n) de certaines des quantités $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots$ d'indices moindres.

Une telle relation est dite *relation de récurrence*. Elle permet évidemment de calculer, *de proche en proche*, toutes les valeurs de u_n , en supposant connues les valeurs relatives aux premiers indices.

Une relation de récurrence étant donnée, on peut se proposer de *calculer explicitement u_n en fonction de n* . C'est là un problème qui n'est pratiquement possible que dans des cas très particuliers. Nous nous bornerons ici au cas où *la relation ne porte que sur u_n et u_{n-1} et, de plus, est linéaire* ⁽¹⁾.

314. Soit donc

$$(2) \quad u_n = a_n u_{n-1} + b_n,$$

a_n et b_n désignant deux fonctions données de n .

Écrivons, les unes au-dessous des autres, la relation (2) et celles qu'on

---

⁽¹⁾ Pour le cas d'une relation linéaire à plus de deux inconnues, le lecteur pourra consulter un article de M. H. Beghin, dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (décembre 1912).

en déduisant en remplaçant n par $n-1, n-2, \dots, 1$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad u_n = a_n u_{n-1} + b_n, \\ a_n \quad u_{n-1} = a_{n-1} u_{n-2} + b_{n-1}, \\ a_n a_{n-1} \quad u_{n-2} = a_{n-2} u_{n-3} + b_{n-2}, \\ \dots\dots\dots \\ a_n a_{n-1} \dots a_3 \quad u_2 = a_2 u_1 + b_2, \\ a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 \quad u_1 = a_1 u_0 + b_1. \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant éliminer $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ entre ces n équations. A cet effet, nous multiplions par les facteurs indiqués à gauche et nous ajoutons; il vient visiblement

$$(4) \quad u_n = b_n + b_{n-1} a_n + b_{n-2} a_n a_{n-1} + \dots \\ + b_2 a_n a_{n-1} \dots a_3 + b_1 a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 u_0.$$

Comme on le voit, l'expression obtenue est assez compliquée. Elle peut néanmoins quelquefois se simplifier, quand les coefficients a et b sont convenables.

En particulier, il y a lieu d'examiner à part le cas où la *relation de récurrence est à la fois linéaire et homogène*. Les $b_1, b_2, \dots$ sont nuls et la formule (4) se réduit à

$$(5) \quad u_n = u_0 a_1 a_2 \dots a_n,$$

ce qu'on peut d'ailleurs obtenir très rapidement en multipliant *membre à membre toutes les équations* (3) et divisant, de part et d'autre, par $u_1 u_2 \dots u_{n-1}$.

315. On peut arriver quelquefois à *simplifier les calculs par un changement d'inconnue*.

Essayons, par exemple, de rendre la relation (2) homogène en posant

$$(6) \quad u_n = v_n + \Lambda \quad (\Lambda = \text{const.}).$$

L'équation (2) se transforme en

$$(7) \quad v_n = a_n v_{n-1} + (a_n - 1) \Lambda + b_n.$$

Elle sera homogène si

$$(8) \quad (a_n - 1) \Lambda + b_n = 0.$$

On conclut de là que la *relation (2) peut être rendue homogène toutes les fois que le rapport $\frac{a_n - 1}{b_n}$ est constant* (1).

(1) Ceci est toutefois en défaut si ce rapport est nul, c'est-à-dire si $a_n = 1$. Mais, dans ce cas, il suffit d'ajouter les relations (3) pour obtenir

$$u_n = u_1 + b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

En particulier, cela arrive toujours, si la relation est à coefficients constants.

Si la relation est donnée sous la forme générale

$$\alpha_n u_n + \beta_n u_{n-1} + \gamma_n = 0,$$

le criterium précédent devient $\frac{\alpha_n - \beta_n}{\gamma_n} = \text{const.}$

316. On rencontre quelquefois des *relations de récurrence non linéaires* pouvant le devenir par une transformation convenable.

D'une façon générale, si la relation peut se mettre sous la forme

$$(9) \quad a_n f(u_n) + b_n f(u_{n-1}) + c_n = 0,$$

il suffit de poser $v_n = f(u_n)$. Ayant calculé v_n , on en déduit u_n .

C'est ainsi que toute relation de la forme

$$(10) \quad (u_n)^{a_n} (u_{n-1})^{b_n} = c_n$$

se ramène à

$$(11) \quad a_n v_n + b_n v_{n-1} = d_n,$$

si l'on pose

$$v_n = \log u_n, \quad d_n = \log c_n.$$

En particulier, si $\frac{a_n - b_n}{\log c_n} = \text{const.}$, on pourra se ramener à une relation linéaire et homogène (n° 315). Ceci arrivera si a_n , b_n , c_n sont des constantes.

317. Disons un mot, pour terminer, d'une méthode qui réussit quelquefois et qu'on pourrait appeler *méthode des tâtonnements*. Elle consiste à calculer u_n pour les premières valeurs de l'indice, puis, par l'examen attentif des résultats obtenus, à deviner l'expression générale pour n quelconque. On démontre ensuite que la formule devinée est exacte en raisonnant par induction, c'est-à-dire qu'on prouve qu'elle est vraie pour $n+1$, si elle l'est pour n .

Cette méthode est quelquefois très simple; mais elle a l'inconvénient de n'offrir aucune généralité et d'exiger souvent une grande perspicacité de la part du chercheur.

NOTE II.

SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE DE QUATRE NOMBRES.

318. Étant donnés quatre nombres distincts x_1, x_2, x_3, x_4 , on appelle *rapport anharmonique* de ces quatre nombres, pris dans l'ordre où ils sont écrits, la quantité ⁽¹⁾

$$(1) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Si l'on modifie l'ordre des nombres, on obtient, *a priori*, autant de rapports anharmoniques qu'il y a de permutations de quatre lettres, c'est-à-dire 24. Mais, ces rapports ne sont pas tous distincts. Démonstrons, en effet, le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si l'on échange deux des nombres et en même temps les deux autres, le rapport anharmonique ne change pas.*

Je dis que l'on a, par exemple,

$$(2) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_4, x_3).$$

Cela s'écrit

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

ou

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1} = \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2},$$

ce qui est évident.

Le lecteur vérifiera de même les identités

$$(x_3, x_4, x_1, x_2) = (x_4, x_3, x_2, x_1) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

⁽¹⁾ Nous supposons les quatre nombres finis. Mais on peut aussi imaginer que x_4 , par exemple, croisse indéfiniment. Le rapport $\frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$ tend alors vers 1 et l'on peut écrire

$$(x_1, x_2, x_3, \infty) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

Corollaire. — Il y a au plus six rapports anharmoniques distincts.

En effet, on peut toujours supposer, grâce au théorème précédent, que le nombre x_1 est amené à la première place. Il reste alors à permuter seulement x_2, x_3, x_4 , ce qui donne six rapports.

THÉORÈME II. — Si l'on échange les deux derniers nombres (ou les deux premiers), le rapport est changé en son inverse.

Car

$$(x_1, x_2, x_4, x_3) = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1} : \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{(x_1, x_2, x_3, x_4)}.$$

Corollaire. — Il suffit de calculer les trois rapports (x_1, x_2, x_3, x_4) , (x_1, x_4, x_2, x_3) , (x_1, x_3, x_4, x_2) , obtenus en permutant circulairement x_2, x_3, x_4 . En prenant leurs inverses, on aura les trois autres.

319. Calcul de tous les rapports en fonction de l'un d'entre eux. — Partons de l'identité ⁽¹⁾

$$(3) \quad (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (x_3 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_4 - x_1)(x_3 - x_2) = 0,$$

qu'il est aisé de vérifier, soit en effectuant les calculs, soit en observant que son premier membre est un polynôme du premier degré en x_1 , qui s'annule pour les trois valeurs distinctes x_2, x_3, x_4 , donc quel que soit x_1 (n° 203, théorème I).

Divisons successivement cette identité par chacun de ses termes, nous avons, en appelant λ, μ, ν les rapports anharmoniques (x_1, x_2, x_3, x_4) , (x_1, x_3, x_4, x_2) , (x_1, x_4, x_2, x_3) :

$$1 - \frac{1}{\nu} - \mu = 0, \quad -\nu - 1 - \frac{1}{\lambda} = 0, \quad -\frac{1}{\mu} - \lambda + 1 = 0.$$

Ces trois équations doivent se réduire à deux au plus, sans quoi elles détermineraient les valeurs numériques de λ, μ, ν , indépendamment de x_1, x_2, x_3, x_4 , ce qui est évidemment absurde.

Effectivement, des deux dernières on tire

$$\nu = 1 - \frac{1}{\lambda}, \quad \mu = \frac{1}{1 - \lambda};$$

en portant dans la première, on obtient une identité.

Nous voyons finalement, en tenant compte des théorèmes I et II, que

⁽¹⁾ Géométriquement. Si l'on a quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sur un axe, on a l'identité

$$\overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_3 M_4} + \overline{M_1 M_3} \cdot \overline{M_2 M_4} + \overline{M_1 M_4} \cdot \overline{M_2 M_3} = 0.$$

si λ désigne l'un des rapports anharmoniques de quatre nombres donnés, ils sont tous compris dans la liste suivante :

$$(4) \quad \lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1 - \lambda, \quad \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

320. Proportion harmonique. — Les quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 , pris dans l'ordre où ils sont écrits, sont dits en proportion harmonique si l'on a $(x_1 x_2 x_3 x_4) = -1$ ⁽¹⁾.

D'après cette définition et les théorèmes du n° 318, la proportion harmonique subsiste si l'on échange x_1 et x_2 ou x_3 et x_4 , ou les groupes : (x_1, x_2) et (x_3, x_4) . Autrement dit, la condition d'harmonie est symétrique par rapport aux deux groupes (x_1, x_2) et (x_3, x_4) , ainsi que par rapport aux deux lettres de chaque groupe.

Du reste, cette condition peut s'écrire

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = - \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$

ou

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) = 0.$$

ou enfin

$$(5) \quad (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 2(x_1 x_2 + x_3 x_4),$$

comme le vérifiera le lecteur en développant les calculs.

Sous cette forme, les symétries précédentes sautent aux yeux.

Cas particuliers. — La condition d'harmonie est particulièrement simple dans les deux cas suivants :

Premier cas : $x_1 = 0$. — L'équation (5) s'écrit

$$x_2(x_3 + x_4) = 2x_3 x_4,$$

ou, en divisant par $x_2 x_3 x_4$,

$$(6) \quad \frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}.$$

Le nombre x_2 est dit la *moyenne harmonique* des nombres x_3 et x_4 ⁽²⁾.

(1) La liste (4) se réduit, dans ce cas, aux trois nombres $-1, 2, \frac{1}{2}$.

(2) Si, en même temps, x_2 est infini, on a $x_3 = -x_4$.

Deuxième cas : $x_2 = -x_1$. — L'équation (5) se réduit à

$$(7) \quad x_1^2 = x_3 x_4.$$

Le nombre x_1 (ainsi que x_2) est la moyenne géométrique de x_3, x_4 .

321. Condition d'harmonie des racines de deux équations du second degré. — Soient les deux équations

$$(8) \quad Ax^2 + 2Bx + C = 0, \quad A'x^2 + 2B'x + C' = 0.$$

Cherchons la condition pour que les racines de la première soient en proportion harmonique avec les racines de la seconde. Il nous suffit d'appliquer (5) en tenant compte des relations entre les coefficients et les racines (n° 220)

$$\left(-\frac{2B}{A}\right)\left(-\frac{2B'}{A'}\right) = 2\left(\frac{C}{A} + \frac{C'}{A'}\right)$$

ou

$$(9) \quad AC' + CA' - 2BB' = 0.$$

On peut remarquer que le premier membre de cette égalité n'est autre que la forme polaire (n° 307) de la forme quadratique $AC - B^2$ (discriminant du premier trinôme), relativement à $(A, B, C), (A', B', C')$.

322. Propriété fondamentale du rapport anharmonique. — L'introduction du rapport anharmonique dans la Science ⁽¹⁾ s'est surtout révélée féconde et élégante grâce au théorème suivant, dont nous ferons un fréquent usage au Tome II :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Le rapport anharmonique est invariant pour toute substitution homographique.*

D'une façon précise, soit une fonction homographique quelconque

$$(10) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Si l'on donne à x quatre valeurs distinctes, x_1, x_2, x_3, x_4 , il leur correspond quatre valeurs pour y , soient y_1, y_2, y_3, y_4 . Je dis que l'on a

$$(11) \quad (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

⁽¹⁾ Cette introduction est due au géomètre français Chasles, qui en a tiré une foule de conséquences géométriques, dont nous retrouverons quelques-unes au Tome II de cet Ouvrage.

On pourrait le vérifier par un calcul direct. Il est plus rapide et plus élégant de se rappeler que *la substitution homographique équivalent à une succession de transformations élémentaires* (n° 244) et de vérifier que *chacune de celles-ci ne modifie pas le rapport anharmonique*.

Effectivement, si l'on change x en $x + h$, le rapport (r) reste visiblement le même. De même, si l'on change x en hx . Enfin, si l'on change x en $\frac{1}{x}$, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \frac{1}{x_3} \frac{1}{x_4} \right) &= \frac{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2}} : \frac{\frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_2}} = \left(\frac{x_2}{x_1} \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \right) : \left(\frac{x_2}{x_1} \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} \right) \\ &= \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = (x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned}$$

Nous n'indiquons pas d'exercices se rapportant à cette Note, parce que les véritables applications du rapport anharmonique sont surtout géométriques et seront étudiées en détail dans le Tome II.

NOTE III.

SUR L'ÉQUATION DE RICCATI.

---

323. On appelle *équation de Riccati* toute équation différentielle de la forme

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = a + by + cy^2,$$

où a , b , c sont des fonctions données de x .

On ne sait pas l'intégrer en général. Mais, *on peut la ramener à une équation linéaire dès qu'on en connaît une intégrale particulière*.

Soit en effet y_1 une telle intégrale. Si l'on fait le changement de variable

$$(2) \quad y = y_1 + z,$$

l'équation en z est visiblement de même forme (1); mais elle doit être vérifiée pour $z = 0$, puisque (1) l'est pour $y = y_1$. Donc, elle ne renferme pas de terme indépendant de z ; c'est alors une équation de Bernoulli (n° 192), qui se ramène à une équation linéaire en posant $z = \frac{1}{u}$.

On peut vérifier toutes ces prévisions en effectuant directement le changement de variable

$$(3) \quad y = y_1 + \frac{1}{u}.$$

On trouve, en tenant compte de ce que y_1 vérifie (1),

$$(4) \quad \frac{du}{dx} + u(b + cy_1) + c = 0.$$

Cette équation s'intègre par 2, 1 ou 0 quadrature, suivant qu'on en connaît 0, 1 ou 2 intégrales particulières (n° 191). Donc :

Plus généralement, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que *toute substitution homographique transforme une équation de Riccati en une équation de Riccati*.

L'équation de Riccati s'intègre par 2, 1 ou 0 quadrature, suivant qu'on en connaît 1, 2 ou 3 intégrales particulières.

324. L'équation (4) a une intégrale générale de la forme

$$u = X + CX_1;$$

en portant dans (3), on voit que *l'intégrale générale de l'équation de Riccati est de la forme*

$$(5) \quad y = \frac{X_2 + CX_3}{X + CX_1},$$

où C désigne une constante arbitraire et X, X_1, X_2, X_3 des fonctions déterminées de x . Autrement dit, *l'intégrale générale de l'équation de Riccati est une fonction homographique de la constante d'intégration.*

Une conséquence immédiate de cette propriété est que *le rapport anharmonique de quatre intégrales particulières est constant*, c'est-à-dire indépendant de x . Il est, en effet, égal au rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de la constante d'intégration (n° 322).

325. *L'équation de Riccati est liée intimement à l'équation linéaire du second ordre.* — Soit, en effet, l'équation

$$(6) \quad A y' + B y' + C y = 0.$$

Faisons le changement de variable

$$(7) \quad \frac{y'}{y} = z.$$

Nous avons

$$y' = yz, \quad y'' = yz' + y'z = y(z' + z^2).$$

Portons dans (6) et divisons par y

$$(8) \quad z' + z^2 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A} = 0,$$

ce qui est une équation de Riccati.

Si l'on sait intégrer (8), on aura l'intégrale générale de (6) par la formule

$$(9) \quad y = e^{\int z dx},$$

déduite de (7).

Réciproquement, étant donnée une équation de Riccati, on peut la ramener à une équation linéaire du second ordre. A cet effet, il faut d'abord la ramener à la forme (8), qui est caractérisée par ce fait que le coefficient de z^2 est égal à celui de z' . On y arrive aisément par le changement de variable $y = \lambda z$, qui transforme l'équation (1) en la suivante :

$$\lambda z' - c\lambda^2 z^2 - z(b\lambda + \lambda') - a = 0.$$

En prenant $\lambda = -\frac{1}{c}$, on obtient une équation du type (8), laquelle se ramène à l'équation (6) par l'application de la formule (7). On pourrait aisément déduire de là les propriétés démontrées plus haut, en s'appuyant sur celles du n° 196.

326. Pour terminer, nous citerons encore une autre équation, qui se rencontre assez couramment, et qui se ramène à l'équation de Riccati. Nous voulons parler de l'équation

$$(10) \quad \frac{dz}{dx} = A \cos z + B \sin z + C,$$

où A, B, C sont des fonctions données de x .

Posons

$$(11) \quad \operatorname{tang} \frac{z}{2} = y;$$

il vient

$$2 \frac{dy}{dx} = A(1 - y^2) + 2By + C(1 + y^2),$$

ce qui est bien une équation de Riccati.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE.....	V
CHAPITRE I. — Nombres incommensurables. — Radicaux; exposants....	1
Nombres incommensurables.....	1
Radicaux et exposants.....	8
CHAPITRE II. — Analyse combinatoire. — Formule du binome.....	17
CHAPITRE III. — Nombres complexes.....	27
CHAPITRE IV. — Séries.....	49
Suites infinies. Limites.....	49
Séries à termes positifs.....	44
Séries à termes quelconques.....	53
Addition et multiplication des séries.....	58
Calcul numérique des séries.....	60
Conseils pratiques pour l'étude d'une série.....	63
CHAPITRE V. — Fonctions d'une variable réelle.....	65
Notion de fonction; continuité.....	65
Dérivées; variation des fonctions.....	70
Opérations sur les fonctions.....	81
Fonctions élémentaires.....	89
CHAPITRE VI. — Fonctions exponentielle et logarithmique. — Nombre e	99
Fonctions exponentielle et logarithmique.....	99
Nombre e	108
CHAPITRE VII. — Séries entières.....	118
CHAPITRE VIII. — Développements limites.....	142
CHAPITRE IX. — Infiniments petits. — Formes indéterminées.....	151
CHAPITRE X. — Fonctions de plusieurs variables.....	166
CHAPITRE XI. — Différentielles.....	172
CHAPITRE XII. — Intégrales définies et indéfinies.....	179
CHAPITRE XIII. — Calcul des quadratures.....	198
CHAPITRE XIV. — Applications des quadratures.....	215

	Pages.
CHAPITRE XV. — <i>Équations différentielles</i>	235
Équations du premier ordre.....	237
Équations du second ordre.....	243
CHAPITRE XVI. — <i>Polynômes</i>	252
Propriétés générales.....	253
Division des polynômes.....	256
Divisibilité.....	265
CHAPITRE XVII. — <i>Fractions rationnelles</i>	274
CHAPITRE XVIII. — <i>Propriétés générales des équations algébriques</i>	281
Fonctions symétriques des racines.....	283
Racines multiples.....	291
CHAPITRE XIX. — <i>Élimination</i>	296
CHAPITRE XX. — <i>Transformation des équations</i>	308
CHAPITRE XXI. — <i>Équations à coefficients réels</i>	317
CHAPITRE XXII. — <i>Équations à coefficients numériques</i>	330
CHAPITRE XXIII. — <i>Déterminants</i>	345
CHAPITRE XXIV. — <i>Équations et formes linéaires</i>	362
Équations linéaires.....	362
Formes linéaires.....	370
CHAPITRE XXV. — <i>Formes quadratiques</i>	376
NOTE I. — <i>Relations de récurrence</i>	390
NOTE II. — <i>Rapport anharmonique</i>	393
NOTE III. — <i>Équation de Riccati</i>	398

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

32755   Quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Par J. HAAG,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND.

TOME I.

ALGÈBRE ET ANALYSE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

CHAPITRE I.

NOMBRES INCOMMENSURABLES. — RADICAUX; EXPOSANTS.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Étant donnés quatre nombres incommensurables positifs A , B , A' , B' , démontrer que si l'on a

$$A > B \quad \text{et} \quad A' > B',$$

on a aussi

$$A + A' > B + B', \quad AA' > BB', \quad \frac{1}{A} < \frac{1}{B}.$$

2. Étendre aux nombres incommensurables l'identité

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_n)B = A_1B + A_2B + \dots + A_nB;$$

en déduire la règle de multiplication de deux sommes.

3. Étant données deux suites infinies (n° 37) de nombres rationnels (u_n) et (v_n) , la première non décroissante, la deuxième non croissante, on suppose que la différence $v_n - u_p$ soit positive, quels que soient n et p , et puisse être rendue aussi petite qu'on le veut, à condition de choisir n et p assez grands. Cela posé, on range dans une première classe tous les u_n et les nombres plus petits, et dans une seconde classe tous les v_n et les nombres plus grands. Montrer qu'on obtient une coupure et que, par suite, on définit un nombre commensurable ou incommensurable. Déduire de là que tout symbole décimal illimité définit un nombre déterminé.

(Prendre pour les u_n les nombres obtenus en limitant le symbole à

1, 2, ..., n décimales et pour les c_n les nombres obtenus de la même manière, mais en forçant la dernière décimale.)

4. Pour multiplier une racine $m^{\text{ième}}$ par un nombre, on peut multiplier la quantité sous le radical par la puissance $m^{\text{ième}}$ de ce nombre (c'est ce qu'on appelle *faire entrer le nombre sous le radical*). De même, si sous un radical d'indice m se trouve un facteur élevé à la puissance m , on peut le *faire sortir du radical* en le réduisant à la première puissance.

5. Simplifier les radicaux suivants :

$$\sqrt[4]{8}, \quad \sqrt[4]{27}, \quad \sqrt[5]{64}, \quad \sqrt[3]{40}, \quad \sqrt[4]{405}, \quad \sqrt[4]{980}.$$

(Utiliser l'exercice précédent. On peut aussi se servir des exposants fractionnaires. Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt[2]{2}$.)

6. Simplifier les expressions

$$\frac{\sqrt[5]{4}\sqrt[4]{8}\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}}, \quad \frac{(\sqrt[5]{9})^3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}})^2\sqrt[5]{27}}.$$

(Utiliser les exposants fractionnaires et négatifs.)

7. Ranger par ordre de grandeur croissante les trois nombres

$$\sqrt[4]{8}, \quad \sqrt[7]{32}\sqrt[5]{2}, \quad \sqrt[3]{\frac{16}{2}}.$$

(Les mettre sous forme de puissances fractionnaires de 2.)

8. Déterminer x pour que $100x - 1$ soit inférieure à $\frac{1}{1000}$.

9. Déterminer m pour que l'on ait

$$\frac{1}{2^m} < 1 - \frac{1}{1000}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^m < \frac{1}{1000} \quad (\text{E. C., 1908}) \quad (1),$$

$$2^m < \frac{1}{1000} \quad (\text{E. P., 1907}) \quad (1).$$

10. Les nombres A , B , C , a , b étant rationnels, on ne peut avoir l'égalité

$$A\sqrt[3]{a} + B\sqrt[4]{b} = C,$$

Nous désignerons dorénavant sous les rubriques E. C., E. P., L. N., les examens oraux des Ecoles Centrale, Polytechnique et Normale supérieure. Le nombre qui suivra indiquera l'année où a été posée la question mentionnée.

que si a et b sont des carrés de nombres rationnels, ou bien si $C = 0$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = -\frac{B}{A}$.

(Multiplier l'égalité par l'expression conjuguée du premier membre, c'est-à-dire $A\sqrt{a} - B\sqrt{b}$.)

11. Les nombres a et b étant rationnels, mais $\sqrt{b}$ ne l'étant pas, peut-on trouver deux nombres rationnels x et y tels que

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}?$$

(Élevant au carré et tenant compte de l'exercice précédent, on trouve

$$x + y = a, \quad 4xy = b; \quad \text{d'où} \quad (x - y)^2 = a^2 - b.$$

Le problème est donc possible seulement si $a^2 - b$ est carré parfait.)

12. Simplifier les expressions

$$\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1), \sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(2+\sqrt{3}).$$

(Utiliser l'exercice précédent.) (E. P., 1906.)

13. Montrer que la quantité $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

(Cf. *Leçons*: exercice 14). (Élever au carré ou bien utiliser l'exercice 11.)

14. Calculer les quantités

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}, \quad \sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54-30\sqrt{3}} \quad (\text{E. P., 1911}).$$

[Ce sont des nombres entiers. Les désigner par x , puis élever au cube. On obtient une équation du troisième degré en x , dont on cherche la racine positive et entière (Cf. Chapitre XXI). Pour la première expression, par exemple, on limitera les essais en remarquant que $x > \sqrt[3]{27} = 3$.]

15. Rendre rationnel le dénominateur de la fraction $\frac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}}$. (E. C., 1902.)

[Multiplier haut et bas par $(\sqrt[3]{5})^2 - \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} + (\sqrt[3]{7})^2$, en s'appuyant sur l'identité $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$.]

CHAPITRE II.

ANALYSE COMBINATOIRE. — FORMULE DU BINÔME.

EXERCICES RÉSOLUS.

I. PROBABILITÉS. — Imaginons m événements possibles et également probables; supposons que p d'entre eux satisfassent à une condition déterminée (c'est ce qu'on appelle les *événements* ou *cas favorables*). Un de ces m événements venant à se produire au hasard, la *probabilité* pour qu'il remplisse la condition considérée est, par définition, le rapport $\frac{p}{m}$.

Cela posé, on demande *quelle est la probabilité pour qu'on ait le roi en jouant à deux à l'écarté, en supposant successivement qu'on ait donné les cartes ou qu'elles aient été données par l'adversaire. Rapport de ces deux probabilités.*

Rappelons qu'à l'écarté chaque joueur a 5 cartes. De plus, le donneur en retourne une sixième, qui fixe l'atout, et qu'il a le droit de garder pour lui, à condition d'en écarter une autre quelconque. Avoir le roi, c'est avoir dans son jeu le roi d'atout. Enfin le jeu est de 32 cartes.

Cela posé, la question revient à la suivante: Dans un jeu de 32 cartes, on prend au hasard 5 cartes que nous appellerons le groupe A, puis une sixième, que nous appellerons la carte B. Quelle est la probabilité pour que, soit dans le groupe A + B, soit dans le groupe A seulement, se trouve le roi de même espèce que la carte B?

Nombre de cas possibles. — A chaque groupe A correspond une combinaison de 32 cartes 5 à 5 et réciproquement. Il y a donc C_{32}^5 manières d'obtenir ce groupe. Un groupe étant formé, il faut tirer la carte B, ce qui peut se faire de 27 manières, puisqu'il reste 27 cartes au jeu. Le nombre total de cas possibles est donc $27 \cdot C_{32}^5$.

Nombre de cas favorables. — I. *Le premier joueur a donné les cartes.*

Il peut y avoir le roi dans le groupe A. Supposons, pour fixer les idées, que B soit l'as de cœur. A chaque groupe A contenant, dans cette hypothèse, le roi de cœur, correspond une combinaison 4 à 4 des

30 cartes autres que le roi et l'as de cœur, et réciproquement. Donc, quand on tourne l'as de cœur, il y a C_{30}^1 manières d'avoir le roi. Il en va de même chaque fois que B n'est pas un roi, ce qui peut arriver 28 fois et donne, en tout, $28.C_{30}^1$ cas favorables.

Il peut arriver maintenant que B soit un roi. — Si, par exemple, B est le roi de cœur, le groupe A donne une combinaison 5 à 5 des 31 cartes autres que ce roi. Il y a donc C_{31}^5 cas où l'on tourne le roi de cœur. En tout, il y a $4.C_{31}^5$ cas où B est un roi.

Le nombre total des cas favorables est finalement $28.C_{30}^1 + 4.C_{31}^5$.

La probabilité d'avoir le roi est donc

$$(1) \quad p = \frac{28.C_{30}^1 + 4.C_{31}^5}{27.C_{32}^2} = \frac{28.30.29.28.27.5 + 4.31.30.29.28.27}{27.32.31.30.29.28},$$

ou, en divisant haut et bas par $30.29.28.27$,

$$(2) \quad p = \frac{28.5 + 4.31}{32.31} = \frac{66}{248} = \frac{33}{124} = 0.27 \quad (\text{par excès}).$$

II. *Le premier joueur n'a pas donné les cartes.* — Dans ce cas, il ne peut avoir le roi que si celui-ci se trouve dans le groupe A, puisque la carte B ne lui appartient pas. D'après ce qui précède, le nombre des cas favorables est alors $28.C_{30}^1$; la probabilité est

$$(3) \quad p' = \frac{28.C_{30}^1}{27.C_{32}^2} = \frac{28.5}{32.31} = \frac{35}{248} = 0.14 \quad (\text{par défaut}).$$

Le rapport $\frac{p}{p'}$ est égal à $\frac{66}{35} = 1.89$ (par excès).

Conclusions. — Des calculs précédents nous pouvons conclure que le joueur qui donne les cartes a un peu plus d'une chance sur quatre d'avoir le roi (p est un peu plus grand que $\frac{1}{4}$), tandis que son partenaire a un peu moins d'une chance sur sept ($p' < \frac{1}{7}$). De ce point de vue, il y a donc environ deux fois plus d'avantage à donner qu'à ne pas donner ⁽¹⁾.

(1) Quand on dit que le premier joueur a une chance sur quatre d'avoir le roi, on veut dire que *sur un très grand nombre de parties*, il y en aura approximativement le quart pour lesquelles cet événement se réalisera. Mais, il serait évidemment absurde de prétendre que sur quatre parties consécutives, il y en aura toujours une et une seule qui donnera le roi. L'expérience montre au contraire qu'on peut avoir le roi plusieurs fois de suite, ou bien ne pas l'avoir pendant très longtemps. D'une façon générale, *pour que le calcul des probabilités ait quelque signification pratique, il faut que les événements auxquels il se rapporte soient répétés un très grand nombre de fois.*

2. Combien de mots différents peut-on former avec les lettres du mot « administration » ?

Tout d'abord, nous entendons par mot un assemblage quelconque de lettres, n'ayant pas forcément une signification. Deux mots différeront par l'ordre des lettres. On a donc en somme à compter des permutations, mais dans lesquelles certaines lettres (a, n, t, i) sont répétées plusieurs fois. Ces permutations, un peu différentes de celles du n° 16, portent le nom de *permutations avec répétition* ⁽¹⁾.

Pour les compter, commençons par placer les deux lettres a . Il y a en tout 14 places. De plus, l'ordre relatif des deux lettres a n'importe pas, puisqu'en les échangeant on retombe sur le même mot. A chaque manière de placer les a correspond dès lors une combinaison 2 à 2 des 14 places possibles et réciproquement; cela nous fait donc C_{14}^2 manières. Les a étant placés, nous plaçons d dans l'une des 12 places restantes, ce qui peut se faire de C_{12}^1 manières. Il y a donc en tout $C_{14}^2 \cdot C_{12}^1$ manières de placer les deux lettres a et la lettre d . On place ensuite m dans l'une des 11 places restantes, puis les trois i dans trois des 10 places restantes, et ainsi de suite.

Finalement, on voit que le nombre des mots différents est

$$\begin{aligned} C_{14}^2 \cdot C_{12}^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^3 \cdot C_7^2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 C_1^1 \\ = \frac{14!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{14!}{8 \cdot 6} = 14 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 605\,404\,800. \end{aligned}$$

Plus généralement, le lecteur démontrera que le nombre de mots différents qu'on peut former avec α lettres a , β lettres b , ..., λ lettres l est

$$\frac{(\alpha + \beta + \dots + \lambda)!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!}.$$

3. Somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

Soit à calculer la somme

$$S_n = a^n + (a + r)^n + (a + 2r)^n + \dots + (a + pr)^n.$$

Partons de l'identité (n° 25)

$$(1) \quad (x + r)^{n+1} = x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n r + C_{n+1}^2 x^{n-1} r^2 + \dots + C_{n+1}^n x r^n + r^{n+1}.$$

Remplaçons-y successivement x par $a, a + r, a + 2r, \dots, a + pr$ et

⁽¹⁾ Il existe aussi des *arrangements* et des *combinaisons avec répétition*. (Cf. *Leçons*, exercices 117, 118.)

ajoutons en colonnes (1). Le premier membre, à l'exception de son dernier terme, est détruit par la première colonne du second membre, abstraction faite de son premier terme. La deuxième colonne du second membre devient visiblement, en y mettant $C_{n+1}^1 r$ en facteur, $C_{n+1}^1 r \cdot S_n$. La troisième colonne devient de même $C_{n+1}^2 r^2 S_{n-1}$; etc. Finalement, on a

$$(2) \quad [a + (p+1)r]^{n+1} = a^{n+1} + C_{n+1}^1 r S_n + C_{n+1}^2 r^2 S_{n-1} + \dots \\ + C_{n+1}^n r^n S_1 + r^{n+1}(p+1).$$

Cette *formule de récurrence* (Note 1) permet de calculer S_n en fonction des sommes d'indices moindres. En l'appliquant pour les valeurs successives de n , à partir de $n=1$, on aura, de proche en proche, les valeurs de $S_1, S_2, S_3, \dots$.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Former le Tableau des permutations des 5 lettres a, b, c, d, e .
2. Former le Tableau des arrangements 3 à 3 de ces 5 lettres.
3. Former le Tableau des combinaisons 3 à 3, puis 4 à 4, des lettres a, b, c, d, e, f .
4. Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot « musique » ?
5. Même question pour le mot « perpétuellement ». (*Cf.* exercice résolu n° 2.)
6. Combien d'airs différents peut-on former avec les 5 notes : *do, ré, mi, fa, sol*, en supposant d'abord qu'aucune d'elles n'est répétée et que l'air comprend quatre notes de même durée, puis que l'air comprend huit notes de même durée, un nombre quelconque d'entre elles pouvant être identiques.

(Dans le second cas, on a des *arrangements avec répétitions*. On peut former leur Tableau suivant un procédé analogue à celui du n° 20. C'est ainsi que, dans l'exemple actuel, en supposant formés tous les airs de sept notes, on aura ceux de huit en ajoutant successivement à droite de

---

(1) Nous entendons par là que nous allons grouper ensemble les termes qui seraient écrits les uns au-dessous des autres. Le lecteur est prié d'écrire effectivement les $p+1$ équations les unes au-dessous des autres, afin de mieux saisir les réductions qui se produisent dans l'addition.

chacun d'eux les cinq notes données et non pas seulement celles qui pourraient être absentes de l'air considéré.)

7. De combien de manières différentes peut-on placer 12 convives autour d'une table? Même question en supposant qu'on alterne les dames et les messieurs.

(Dans le second cas, placer d'abord les dames, puis les messieurs.)

8. On donne n points dans un plan; on les joint par des droites de toutes les manières possibles. Calculer le nombre des points d'intersection ainsi obtenus. (E. P., 1912.)

(Ne pas oublier d'enlever des points d'intersection les points proposés, dont chacun doit compter C_{n-1}^2 fois.)

9. On jette un dé non truqué; quelle est la probabilité d'amener le numéro 6, ou bien un numéro inférieur à 4?

10. On prend un domino dans un jeu complet. Quelle est la probabilité d'amener une somme supérieure à 8?

11. On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'amener 5 cartes rouges, ou bien 1, 2, 3, 4 rois?

12. Une loterie contient 300 000 numéros, dont 1000 gagnants. Une personne en prend 10. Quelle est la probabilité pour qu'elle gagne 1, 2, ..., 10 lots?

(A chaque façon de gagner p lots correspondent une combinaison des 10 numéros choisis p à p et une combinaison des $300\,000 - p$ numéros autres que ceux de ces lots $1000 - p$ à $1000 - p$.)

13. Démontrer la formule

$$C_m^p = C_{m-q}^{p-q} + C_q^1 C_{m-q}^{p-1} + C_q^2 C_{m-q}^{p-2} + \dots + C_q^q C_{m-q}^{p-q}.$$

(Généraliser le raisonnement du n° 21, en considérant les combinaisons qui renferment une ou plusieurs des q premières lettres $a, b, c, \dots, l$.)

14. Démontrer la formule du binôme par la méthode de récurrence.

15. Calculer $(x+a)^6$, $(x+a)^{10}$.

16. Calculer la somme des n premiers nombres entiers, ou impairs, ainsi que les sommes de leurs carrés et de leurs cubes.

17. Calculer la somme

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 1000.1001.1002 \quad (\text{E. P., 1911}).$$

$$[\Sigma(n-1)n(n+1) = \Sigma n(n^2-1) = \Sigma n^3 - \Sigma n].$$

18. Calculer $\Sigma n(n+2)(n+3)$. (E. C., 1909.)

19. On écrit les nombres impairs consécutifs de la manière suivante : Sur une première ligne, on écrit le premier; sur la seconde ligne, on écrit les deux suivants; sur la troisième, les trois suivants, ...

(Calculer la somme des nombres de la $n^{\text{ième}}$ ligne.) (E. P., 1908 et 1909.)

20. Calculer la somme des coefficients du binôme.

(Faire $x=1$ dans le développement de $(x+1)^m$. En faisant $x=-1$, puis $x=-1$, on a deux équations qui permettent de calculer la somme des coefficients de rang pair et la somme des coefficients de rang impair.)

21. Calculer la somme des carrés des coefficients du binôme.

(Multiplier par lui-même le développement de $(x+1)^m$ et prendre le coefficient de x^m .)

22. Développer et ordonner $(x+2y-z)^3$. $(x+y+2z+3t-1)^2$.

CHAPITRE III.

NOMBRES COMPLEXES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Calculer $z = \frac{(1+i)(1-i)^2}{(1+2i)^3} = \frac{3i(i+2)(2i+1)^2}{3+i}$.

On a (n° 30)

$$(1-i)^2 = 1 - 2i + 6i^2 = 4i^3 + i^5 = -4,$$

$$(1+2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = -11 - 2i,$$

$$\frac{(1+i)(1-i)^2}{(1+2i)^3} = 4 \frac{1+i}{11-2i} = 4 \frac{(1+i)(11+2i)}{125} = 4 \frac{13+9i}{125};$$

$$\begin{aligned} 3i(i+2)(2i+1)^2 &= 3(-1+2i)(2i+1)(2i+1) \\ &= 3(2i+1)(4i^2-1) = -15(2i+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3i(i+2)(2i+1)^2}{3+i} &= -15 \frac{1+2i}{3+i} = -15 \frac{(1+2i)(3-i)}{10} \\ &= -\frac{15}{10}(5+5i) = -\frac{15}{2}(1+i); \end{aligned}$$

$$z = \frac{(13+9i)8-15 \times 125(1+i)}{250} = -7,684 - 7,212i.$$

2. Résoudre l'équation $x^3 = 1$.

D'après le n° 36, on a

$$x = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2);$$

d'où

$$(1) \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Autrement : On a évidemment la racine $x_1 = 1$. Divisant $x^3 - 1$ par $x - 1$, nous voyons que les deux autres racines vérifient l'équation

$$(2) \quad x^2 + x + 1 = 0,$$

En résolvant, on retrouve les formules (1).

Remarque. — Si l'on appelle j la racine x_2 , par exemple, nous savons (n° 36) que l'on doit avoir $j^2 = x_3$, $j^3 = 1$. C'est ce qu'il est aisé de vérifier par un calcul direct. On peut aussi observer que, la somme des racines de (2) étant -1 , on a $x_3 = -1 - j = j^2$, puisque $j^2 + j + 1 = 0$.

3. Au point M d'affixe z , on fait correspondre le point M' d'affixe

$$(1) \quad z' = az - b,$$

où a et b désignent deux nombres complexes quelconques donnés. Quelle est la transformation géométrique ainsi définie ?

Cette transformation résulte des deux suivantes :

$$(2) \quad z'' = az, \quad z' = z'' + b.$$

Soient A et M'' les points d'affixes a et z'' (fig. 1). On a (n° 33)

$$(\widehat{Ox, OM''}) = (\widehat{Ox, OM}) + (\widehat{Ox, OA}),$$

d'où

$$(\widehat{OM, OM''}) = (\widehat{Ox, OM''}) - (\widehat{Ox, OM}) = (\widehat{Ox, OA})$$

et

$$OM'' = OM \cdot OA.$$

FIG. 1.

Il en résulte que si k et α sont le module et l'argument de a , on passe de M à M'' par une homothétie de centre O et de rapport k , suivie d'une rotation de l'angle α .

Soit maintenant B le point d'affixe b . On a (n° 31)

$$(\widehat{OM'}) = (\widehat{OM}) + (\widehat{OB}),$$

d'où

$$(\widehat{M''M'}) = (\widehat{OB}).$$

On passe de M' à M'' par la translation représentée par le vecteur (OB).

Finalement, on passe de M à M' par une homothétie, suivie d'une rotation, suivie d'une translation. La formule (1) définit donc la transformation par similitude directe la plus générale.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer les nombres complexes

$$(2+i)(-1+i) + (2i+1)^2, \quad \frac{(i-3)^2}{i+i}, \quad \frac{(i-1)^3}{(i-1)^4}.$$

[Pour le dernier, on peut remarquer que $i-1=i(i+1)$.]

2. Calculer
- $f(2+3i)$
- , sachant que

$$f(z) = z^4 + iz^3 - (1+2i)z^2 + 3z + 1 + 3i.$$

3. On pose

$$x = \frac{1+uv}{u-v}, \quad y = i \frac{1+uv}{u-v}, \quad z = \frac{u+v}{u-v}.$$

Vérifier que l'on a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Quelle est la condition pour que x, y, z soient réels?

4. Mettre sous la forme trigonométrique les nombres :
- $1, -1, i, -i, 1+i, \sqrt{3}+i, 2-3i$
- .

5. Calculer

$$\sqrt[3]{8-6i}, \quad \sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[3]{2i-\sqrt{3}}, \quad \sqrt[3]{\frac{2i+\sqrt{3}}{2i-\sqrt{3}}}, \quad \sqrt[6]{i}, \quad \sqrt[6]{i+\sqrt{3}}.$$

6. Résoudre les équations

$$x^4 - x^2 - 4 = 0, \quad x^4 - 2x^2 + 2i + 4 = 0, \quad 2x^6 - x^3 - i - 1 = 0, \\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

7. Résoudre les équations

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^4 = \frac{1+ia}{1-ia}, \quad x^3 + 3x + 2i = 0 \quad (\text{E. P., 1912}).$$

(Pour la première, on peut poser $x = \tan \varphi$, $a = \tan \alpha$, en supposant x et a réels. Pour la seconde, remarquer que i est racine.)

8. Soient deux nombres complexes
- a
- et
- b
- . Lieu des points dont l'affixe
- z
- donne au rapport
- $\frac{z-a}{z-b}$
- un module ou un argument constants.

9. Connaissant
- z, a, b, a', b'
- , construire le point dont l'affixe
- z'
- vérifie l'équation

$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{z'-a'}{z'-b'} \quad (\text{E. P., 1906}).$$

10. Soit un triangle équilatéral ABC. Calculer l'affixe de C, connaissant ceux de A et B. (E. P., 1908.)

11. Quelle est la transformation géométrique définie par l'équation $zz' = 1$?

(Cf. exercice résolu n° 3.)

12. Même question pour l'équation $z' = \frac{az + b}{cz + d}$, a, b, c, d étant des nombres complexes donnés.

[On pourra s'appuyer sur ce que la transformation homographique équivaut à des transformations élémentaires (n° 244).]

13. Étudier les variations de l'argument de

$$\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$

quand le point d'affixe z décrit une courbe fermée.

CHAPITRE IV.

SÉRIES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Nature de la série* $z(e^h - 1) + \sqrt{n^2 + 1} - n$ (E. P., 1907).

Posons $\frac{1}{n} = h$, nous avons (Chap. VII et VIII)

$$u_n = z(e^h - 1) + \frac{1}{h} \left[(1 + h^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = z \left(h + \frac{h^2}{2} + \dots \right) + \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{4} h^4 + \dots \right).$$

Si $z \neq -\frac{1}{2}$, la partie principale est $\left(z + \frac{1}{2}\right)h$; la série est *divergente*.

Si $z = -\frac{1}{2}$, la partie principale est $\frac{z}{2} h^2$; la série est *convergente*.

2. *Nature de la série* $\frac{1}{n^a (\log n)^b}$.

On ne peut trouver la partie principale de u_n . Néanmoins, appliquons la règle $n^z u_n$, après avoir remarqué que la série est à termes positifs. Nous avons

$$n^z u_n = \frac{n^{z-a}}{(\log n)^b}.$$

Si $z > a$, cette quantité augmente indéfiniment avec n ; si $z < a$, elle tend vers zéro (n° 96). On en conclut que si $a < 1$ la série est *divergente*, car on peut prendre $a < z < 1$; si $a > 1$, elle est *convergente*, car on peut prendre $a > z > 1$.

Si $a = 1$, $b < 0$, nu_n augmente indéfiniment, il y a *divergence*. Le seul cas qui nous échappe est donc celui de $a = 1$, $b > 0$. Appliquons alors le théorème III du n° 42. La série (u_n) est de même nature que la suivante, par exemple,

$$v_n = \frac{2^n}{2^n (n \log 2)^b} = \frac{1}{(n \log 2)^b} \frac{1}{n^b},$$

laquelle est *convergente* si $b > 1$, *divergente* si $b \leq 1$.

3. *Nature de la série* $\frac{n!}{n^n}$ (E. N., 1905).

La factorielle du numérateur incite à essayer la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

quantité qui tend vers $\frac{1}{e}$ (n° 91). Comme $e > 1$, il y a convergence.

4. *Nature de la série* $\frac{n^n}{x^{n^2}}$ (E. N., 1905).

D'abord, pour que le terme général tende vers zéro, il faut que $|x| > 1$. Appliquons alors la règle de Cauchy à la série des valeurs absolues, ce qui revient à supposer $x > 0$. On a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{x^n}$, quantité qui tend vers zéro (n° 96). Donc, si $|x| > 1$, la série est absolument convergente. Si $|x| = 1$, elle est divergente.

5. *Nature de la série* $(-1)^n n^z \left(\log \frac{n+1}{n-1}\right)^\beta$ (E. P., 1907).

Posant $n = \frac{1}{h}$, nous avons (n° 107, II)

$$u_n = (-1)^n h^{-z} (2h - \dots)^\beta.$$

La partie principale de u_n est

$$2^\beta (-1)^n h^{\beta-z} = 2^\beta \frac{(-1)^n}{n^{\beta-z}}.$$

Si $\beta > z + 1$, la série est absolument convergente. Si $z < \beta - z + 1$, la série des valeurs absolues est divergente; mais on a affaire à une série alternée, à laquelle s'applique le théorème du n° 48; il y a semi-convergence. Si $z \leq \beta$, le terme général ne tend pas vers zéro; la série diverge.

6. *Nature de la série* $\frac{x^n}{n!} \sin nx$ (E. P., 1907).

On a

$$|u_n| = \frac{|x|^n}{n!}.$$

Le second membre est le terme général d'une série convergente (n° 90); donc (u_n) est absolument convergente.

7. *Sachant que le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-a}{n-b}$ ($a, b = \text{const.}$), *sommer la*

série. — On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}(n+b) &= u_n(n+a) = u_n[(n-1)+(a+1)], \\ u_n(n-1+b) &= u_{n-1}(n-1+a) = u_{n-1}[(n-2)+(a+1)], \\ &\dots\dots\dots \\ u_2(2+b) &= u_1(1+a) = u_1[0+(a+1)]. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre; il vient, grâce à des réductions évidentes,

$$nu_{n+1} + \dots + b(S_{n+1} - u_1) = (a+1)S_n,$$

ou, en remplaçant S_{n+1} par $S_n + u_{n+1}$,

$$S_n(a+1+b) = (n+b)u_{n+1} - bu_1.$$

Écartons le cas où $a+1=b$, pour lequel on a $u_{n+1} = \frac{bu_1}{n+b}$, série comparable à la série harmonique et par suite divergente. Nous avons alors

$$S_n = \frac{(n+b)u_{n+1} - bu_1}{a+1-b}.$$

Si la série est convergente, $(n+b)u_{n+1} = (n+1)u_{n+1}$, $\frac{n+b}{n+1}$ doit tendre vers zéro, en vertu de la règle $n^2 u_n (n^2 u_n)^{-1}$. Donc S_n a pour limite $\frac{bu_1}{b-a-1}$.

8. Calculer, avec cinq décimales, la somme de la série

$$S = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad \text{pour} \quad x = 0,1.$$

D'abord, la série est convergente, car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x^2 \frac{2n+1}{2n+3} = x^2 + \frac{1}{100} < 1.$$

Calculons les termes successifs avec sept décimales (n° 54) :

$$u_1 = 0,1, \quad u_2 = 0,0003333, \quad u_3 = 0,0000020, \quad u_4 = 0,0000000.$$

Nous prenons donc

$$S = u_1 + u_2 + u_3 = 0,1003353.$$

Si $u_n = b - u_{n+1}$, et, par suite, nu_n ne tendaient pas vers zéro, on aurait, à partir d'un certain rang, $nu_n > k$, k désignant un certain nombre fixe non nul. Donc, etc.

L'erreur de première espèce est $< \frac{1}{10^7}$, car u_2 est seul évalué d'une manière approchée. Pour l'erreur de seconde espèce, nous nous rappelons que la convergence a été établie à l'aide de la règle de D'Alembert. Nous avons (n° 34)

$$R_3 < \frac{u_4}{1-k} = \frac{1}{7 \times 10^7 \times 0,99} \cdot \frac{2}{10^8} < \frac{1}{10^7}.$$

L'erreur totale est donc plus petite que $\frac{2}{10^7}$. Elle est d'ailleurs positive, car u_2 a été calculé par défaut et $R_3 > 0$. Donc, S est compris entre 0,1003353 et 0,1003355. *Les six premières décimales fournies par la formule (1) sont donc exactes.*

Remarque. — On aurait pu se borner à évaluer les premiers termes avec six décimales; mais le calcul n'eût pas été plus simple.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. On définit la suite (u_n) par la formule $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$, avec $u_1 = \sqrt{2}$. Démontrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

(On prouvera, par récurrence, que $u_n > u_{n-1}$ et que $u_n < 2$. La limite est la racine positive de l'équation $x^2 = 2 + x$.)

2. Même question, en supposant $u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{\Lambda}{u_{n-1}} \right)$ (E. P., 1912). ($u_n < u_{n-1}$ et $u_n > \sqrt{\Lambda}$. La limite est $\sqrt{\Lambda}$.)

3. Reconnaître les séries

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[n]{n-2}}{n^3+1}, \quad \tan^2\left(\frac{x}{n}\right), \quad \sqrt[n]{n^2+1} - \sqrt[n]{n^2-1}, \quad x \tan \frac{1}{n} - 2 \sin \frac{1}{n}, \\ & \log \cos \frac{x}{n}, \quad \frac{1}{n} \log \frac{n+z}{n-2}, \quad \log \frac{an^3+bn^2+cn+d}{(n+1)^2}, \\ & \frac{1}{e^{\sqrt[n]{n}}+a} - \frac{b}{\sqrt[n]{n}} - \frac{c}{n}, \quad e^n - \cos \frac{x}{n} + x \sin \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

[Appliquer (1°) du n° 33.]

4. Reconnaître les séries

$$\frac{3^n+1}{4^n+n^2} \quad (\text{E. G., 1911}), \quad \frac{1}{a+bx^n} \quad (\text{E. P., 1912}).$$

[Comparer à $\left(\frac{3}{4}\right)^n$, x^n , par le théorème 1 du n° 42.]

5. Reconnaître les séries

$$\frac{x^n \sqrt[n]{n}}{n^2 + 1}, \quad \frac{x^n \log n}{n} \quad (\text{E. C., 1912});$$

$$\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}, \quad \frac{n!}{n!} x^n, \quad \frac{1^3, 3^3, \dots, (2n-1)^3}{2^3, 4^3, \dots, (2n)^3} \quad (\text{E. P., 1912}),$$

(Règle de d'Alembert.)

6. Reconnaître les séries

$$\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{n^2} \quad (\text{E. C., 1912}); \quad x^n e^{-\sqrt{n}} \quad (\text{E. P., 1911});$$

$$\left(\frac{x}{\log n} \right)^n, \quad \frac{1}{n^n} \quad (\text{Règle de Cauchy}).$$

7. Reconnaître les séries

$$\frac{x^n}{n(2^n + 3^n)}, \quad \frac{x^n}{n + \log n}, \quad \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \quad (\text{E. C., 1912});$$

$$\frac{x^n}{n - \sqrt[n]{n}}, \quad \frac{n^{2x}}{x^n + \log n}, \quad \frac{x^n}{\sqrt[n]{n^{n-1} - 1}} \quad (\text{E. P., 1911 et 1912}).$$

(Théorème 1, n° 12.)

8. Reconnaître les séries

$$(-1)^n \frac{n^2}{\sqrt[n]{n^3 - 1}}, \quad (-1)^n \frac{\log n}{n}, \quad (-1)^n \frac{\sin nx}{n(n-1)}, \quad (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt[n]{n}}.$$

(Pour les deux premières, on reconnaîtra qu'on est en droit d'appliquer le théorème des séries alternées (n° 18), en cherchant le signe, pour x très grand et positif, des dérivées des fonctions $\frac{x^3+1}{x^3}, \frac{\log x}{x}$.)

9. On considère la courbe $y = \frac{\sin x}{x}$. Étudier la série formée par les aires successives qu'elle délimite avec Ox , en comptant positivement les aires au-dessus et négativement les aires au-dessous.

10. Prouver que les suites

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \dots + \frac{1}{2n}, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n,$$

$$u_n = \log 1 - \log 2 + \dots + \log n - \left(n + \frac{1}{2} \right) \log n - n$$

sont convergentes (E. P., 1908).

On prouvera que les séries de termes généraux $u_{n+1} - u_n$ sont con-

vergentes. — La limite de la seconde suite s'appelle *la constante d'Euler* (Cf. *Leçons*, n° 238).]

11. *Changement de l'ordre des termes dans une série.* — Si une série est absolument convergente, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre de ses termes sans changer sa convergence, ni sa somme. Si elle est semi-convergente, on peut, au contraire, en modifiant convenablement l'ordre de ses termes, lui donner telle somme que l'on veut.

[Considérer d'abord une série à termes positifs (Cf. *Leçons*, n° 185); puis, dans une série absolument convergente, la série des termes positifs et la série des termes négatifs.]

Pour la série semi-convergente, si l'on veut lui donner la somme S , on commence par prendre les termes positifs, dans l'ordre où ils se présentent, jusqu'à ce que leur somme dépasse S ; puis, on prend de même des termes négatifs jusqu'à ce que la somme devienne inférieure à S , et ainsi de suite.]

12. Si S est la somme de la série harmonique alternée (n° 48), la série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{2n} + \dots$$

est convergente et a pour somme $\frac{3}{2} S$.

[La somme des $3n$ premiers termes s'écrit

$$S_{3n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right),$$

en appelant S_{3n} la somme des $3n$ premiers termes de S . S'appuyer ensuite sur l'exercice 10.]

13. Multiplier les séries

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, \quad v_n = \frac{y^n}{n!}; \quad u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad v_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$u_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad v_n = \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n.$$

14. Sommer les séries

$$\frac{1}{n(n-1)(n+2)}, \quad \frac{1, 3, 5, \dots, (2n-1)}{2, 4, 6, \dots, 2(n-1)}.$$

(Cf. exercice résolu n° 7.)

15. Sommer les séries

$$\arctan \frac{1}{2n^2}, \quad \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}, \quad \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (\text{E. P., 1912}).$$

[Plus généralement, pour sommer une série de la forme

$$\arctan \frac{1}{2n^2 + \zeta n + \gamma}$$

ou

$$\log \left(1 - \frac{1}{2n^2 + \zeta n + \gamma} \right),$$

on met son terme général sous la forme

$$\arctan \frac{an + b}{cn + d} = \arctan \frac{a(n-1) + b}{c(n-1) + d}$$

ou

$$\log \frac{an + b}{cn + d} = \log \frac{a(n-1) + b}{c(n-1) + d}.$$

16. Sommer la série $u_n = \log \cos \frac{x}{2^n}$.

(Se ramener à la limite du produit $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$.)

17. Calculer à $_{1000}$ près la série $\left(\frac{1}{2n} \right)^n$ .18. Calculer à $_{1000}$ près les séries $\frac{\sin n \frac{\pi}{3}}{n!}$, $(-1)^n \frac{(0,41)^n}{n}$ .19. Calculer avec cinq décimales la série $\frac{\pi}{10} - \frac{\left(\frac{\pi}{10} \right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10} \right)^5}{5!} - \dots$.

CHAPITRE V.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Calculer la dérivée de $y = \arctang \left(\frac{x-a}{1-ax} \right)$.* — Nous avons affaire à une fonction de fonction (n° 74). Si l'on pose $u = \frac{x-a}{1-ax}$, on a $y = \arctang u$. D'où (nos 74 et 78)

$$y' = \frac{1}{1+u^2} u'.$$

Or (n° 70)

$$u' = \frac{(1-ax)(x+a)' - (x+a)(1-ax)'}{(1-ax)^2} = \frac{1-ax + a(x+a)}{(1-ax)^2} = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \frac{(x+a)^2}{(1-ax)^2}} \cdot \frac{1+a^2}{(1-ax)^2} = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2 + (x+a)^2} \\ &= \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Telle est la dérivée demandée.

Dans la pratique, lorsqu'on a acquis quelque habitude du calcul des dérivées, on se dispense de poser, ainsi que nous l'avons fait, $u = \frac{x+a}{1-ax}$. On le fait mentalement et l'on écrit directement

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a}{1-ax} \right)^2} \cdot \frac{1-ax + a(x+a)}{(1-ax)^2} = \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Remarque. — Le lecteur n'est pas sans avoir remarqué la simplicité du résultat obtenu. Il doit même observer que la dérivée calculée est identique à celle de la fonction $\arctang x$ (n° 78). D'où il résulte que la différence $y - \arctang x$ doit être constante (n° 61). C'est ce qu'il est aisé de vérifier.

Posons

$$\text{arc tang } x = x, \quad y - \text{arc tang } x = \beta = y - x.$$

Pour prouver que β est constant, il suffit de faire voir que $\text{tang } \beta$ l'est. Or

$$\text{tang } \beta = \text{tang}(y - x) = \frac{\text{tang } y - \text{tang } x}{1 + \text{tang } y \text{ tang } x}.$$

D'autre part,

$$\text{tang } y = \frac{x + a}{1 - ax}, \quad \text{tang } x = x;$$

d'où

$$\text{tang } \beta = \frac{\frac{x+a}{1-ax} - x}{1 + \frac{(x+a)x}{1-ax}} = \frac{a(1+x^2)}{1+x^2} = a = \text{const.}$$

On aurait pu aussi poser *a priori*

$$\beta = \text{arc tang } a, \quad a = \text{tang } \beta; \quad x = \text{arc tang } x, \quad x = \text{tang } x.$$

D'où

$$\text{tang } y = \frac{x+a}{1-ax} = \frac{\text{tang } x + \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } x \text{ tang } \beta} = \text{tang}(x + \beta);$$

d'où

$$y = x + \beta + k\pi, \quad y - x = \beta + k\pi, \\ y - \text{arc tang } x = \text{arc tang } a + k\pi = \text{const.}$$

La valeur de l'entier k est d'ailleurs aisée à calculer, si l'on observe que y , $\text{arctang } x$, $\text{arctang } a$ sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ (n° 78). Suivant que $\text{arctang } x + \text{arctang } a$ est compris entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$, ou entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ou entre $+\frac{\pi}{2}$ et π , on a $k = 1$, 0, ou -1 .

2. Calculer $\sin 31^\circ$ à $\frac{1}{100}$ près.

Ce calcul peut se faire aisément comme application de la formule des accroissements finis. On a, en effet ⁽¹⁾,

$$\sin 31^\circ = \sin 30^\circ + \frac{\pi}{180} \cos \lambda,$$

λ désignant un arc compris entre 30° et 31° . On ne connaît pas λ ; mais

⁽¹⁾ Ne pas oublier que, dans l'application de la formule, l'accroissement d'un degré doit être évalué en radians.

on sait que $\cos \lambda$ est plus petit que $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et plus grand que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc, on a la double inégalité

$$0,5 + \frac{\pi}{180} \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 31^\circ < 0,5 + \frac{\pi}{180} \frac{\sqrt{3}}{2};$$

d'où, *a fortiori*,

$$\sin 31^\circ > 0,5 + \frac{3,14 \times 1,4}{180 \times 2} = 0,5 + \frac{1,57 \times 7}{900} = 0,5 + \frac{10,99}{900} > 0,512$$

et

$$\sin 31^\circ < 0,5 + \frac{3,142 \times 1,8}{180 \times 2} = 0,5 + \frac{3,142}{200} < 0,516.$$

On a donc $\sin 31^\circ = 0,51$, à $\frac{1}{100}$ près, et $\sin 31^\circ = 0,514$, à $\frac{1}{1000}$ près.

3. Étudier la dérivée *n^{ème}* de $y = \frac{1}{1+x^2}$.

On a

$$(1) \quad y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}, \quad y''' = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

On peut induire la formule générale

$$(2) \quad y^{(n)} = \frac{P_n}{(1+x^2)^{n+1}},$$

où P_n désignerait un polynôme de degré n , ne renfermant que des termes de même parité⁽¹⁾.

Pour prouver la généralité de cette formule, procédons par récurrence. Admettant l'égalité (2), nous avons

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \frac{(1+x^2)^{n+1} P'_n - P_n (n+1)(1+x^2)^n 2x}{(1+x^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{(1+x^2) P'_n - 2(n+1)x P_n}{(1+x^2)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}}{(1+x^2)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Le numérateur est un polynôme en x . Son degré est $n+1$, si le terme en x^{n+1} de $(1+x^2) P'_n$ n'est pas détruit par le terme analogue de $2(n+1)x P_n$. Or, si $a_n x^n$ est le terme de plus haut degré de P_n , celui de P_{n+1} est

$$n a_n x^{n-1} - 2(n+1) a_n x^{n+1} = -(n+2) a_n x^{n+1},$$

(1) Cette dernière propriété est évidente *a priori* si l'on remarque que y est une fonction paire, donc y' une fonction impaire, y'' une fonction paire, etc.

qui ne peut être nul. Donc P_{n+1} est bien de degré $n+1$. En outre, P_n ne renfermant que des termes de même parité, il en est de même de P'_n , $(1+x^2)P_n$, $2(n+1)xP_n$, donc de P_{n+1} . Les propriétés prévues sont donc exactes. De plus, nous avons la *formule de récurrence*

$$(3) \quad P_{n+1} = (1+x^2)P'_n - 2(n+1)xP_n.$$

Il est aisé de *calculer le terme de plus haut degré* $a_n x^n$ de P_n . Nous venons de voir, en effet, qu'on avait

$$(4) \quad a_{n+1} = -(n+2)a_n;$$

formule de récurrence linéaire et homogène, qui donne (Note 1, n° 344), en remarquant que $a_0 = 1$,

$$(5) \quad a_n = (-1)^n (n+1)!.$$

Je dis maintenant que *le polynôme P_n a toutes ses racines réelles et distinctes*. En effet, ceci est manifestement vrai pour $n=1, 2, 3$. Pour montrer que c'est général, admettons la propriété pour P_n et prouvons qu'elle a encore lieu pour P_{n+1} . Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines de P_n . Pour $x = \alpha_p$ et α_{p+1} , la fonction $y^{(n)}$ s'annule. Comme elle est continue et que sa dérivée $y^{(n+1)}$ est toujours finie, cette dernière s'annule entre α_p et α_{p+1} , en vertu du théorème de Rolle (n° 64). Il s'ensuit que P_{n+1} a au moins une racine dans chacun des $n+1$ intervalles $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \dots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$.

En second lieu, $y^{(n)}$ s'annule pour $x = \pm \infty$, car le degré du dénominateur de la fraction (2) surpasse celui du numérateur (n° 426, II). Donc, $y^{(n+1)}$ a aussi au moins une racine entre $-\infty$ et α_1 et entre α_n et $+\infty$ (1).

Nous trouvons en tout au moins $n+1$ racines réelles et distinctes (2) pour P_{n+1} . On sait, d'autre part (n° 219) qu'il ne peut y en avoir davantage. Ceci prouve que, dans chacun des $n+1$ intervalles précédemment considérés, il y a une racine et une seule.

Finalement, les racines de P_{n+1} sont toutes réelles, distinctes et séparées par celles de P_n .

On obtient des résultats intéressants *en appliquant la formule de Leibniz* (n° 69) au produit

$$(6) \quad y(1+x^2) = 1.$$

(1) Nous admettons ici que le théorème de Rolle s'étend au cas où l'intervalle (a, b) devient infini, ce qui est à peu près évident si l'on imagine que b tende vers $+\infty$, ou bien a vers $-\infty$.

(2) Elles sont distinctes, parce que *séparées par les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$* .

Prenant la dérivée $(n+2)^{\text{ième}}$ des deux membres et remarquant que les dérivées de $1-x^2$ sont nulles dès le troisième ordre, nous avons

$$(7) \quad x^{n+2} (1-x^2) = 2(n+2)x^{n+1} - (n+2)(n+1)x^n = 0;$$

ou, d'après (2),

$$(8) \quad P_{n+2} - 2(n+2)xP_{n+1} - (n+2)(n+1)(1-x^2)P_n = 0.$$

Cette relation de recurrence ne renferme pas de dérivée [comme (3)], mais intéresse trois polynômes consécutifs. On peut la combiner avec (3). Si l'on y remplace P_{n+2} par $(1+x^2)P_{n+1} - 2(n+2)xP_{n+1}$, elle se réduit à

$$(9) \quad P_{n+1} - (n+1)(n+2)P_n = 0.$$

En dérivant (3) et tenant compte de (9) on a maintenant

$$(10) \quad (1-x^2)P_n' - 2nxP_n' + n(n+1)P_n = 0,$$

équation différentielle linéaire du second ordre (n° 196), qui va nous permettre de calculer sans peine les coefficients de P_n (Cf. exercice résolu n° 1, Ch. XV).

Soit $a_p x^p$ le terme général. Annulons le coefficient de x^p dans (10)

$$a_{p+2}(p+2)(p+1) - a_p p(p-1) - 2npa_p + n(n+1)a_p = 0,$$

ou

$$(11) \quad a_p = - \frac{(p+1)(p+2)}{(n-p)(n+1-p)} a_{p+2}.$$

D'autre part, nous savons qu'il n'y a que des termes de même parité et nous connaissons a_n . Nous avons alors

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= - \frac{(n+1)n}{2 \cdot 3} a_n, \\ a_{n-4} &= - \frac{(n+3)(n+2)}{4 \cdot 5} a_{n-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-2q} &= - \frac{(n+2q-1)(n+2q-2)}{(2q-1)(2q)} a_{n-2q-2}. \end{aligned}$$

Multipliant membre à membre et tenant compte de (5), nous avons

$$\begin{aligned} a_{n-2q} &= (-1)^{q+q} \frac{(n+1)! n! (n+1)(n+2) \dots (n+2q-1)}{(2q-1)!} \\ &= (-1)^{2+q} \frac{(n+1)! n!}{(2q-1)!(n+2q)!}. \end{aligned}$$

4. Étudier les variations de la fonction $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ (E. P., 1911).

La fonction est définie et continue quel que soit x . Elle admet pour période 2π (n° 66); de sorte qu'il suffit de prendre pour intervalle de variation un intervalle quelconque de longueur 2π . De plus, la fonction est impaire; par suite, si l'on a pris pour intervalle initial $(-\pi, +\pi)$, on est ramené à l'intervalle $(0, \pi)$, quitte à faire une symétrie par rapport à l'origine. Pour réduire encore, essayons le changement $x \mapsto \pi - x$; il ne modifie pas y . Cela nous indique une symétrie par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$ et réduit notre intervalle de variation à $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (1). Ce dernier ne peut plus être diminué, car le changement $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ modifie la valeur absolue de y .

Prenons maintenant la dérivée

$$y' = \cos x + \cos 3x.$$

Elle s'annule pour

$$\cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x),$$

d'où

$$3x = 2k\pi \pm (\pi - x) = (2k + 1)\pi \pm x.$$

La seule racine de cette équation comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ est $\frac{\pi}{4}$, comme le constatera aisément le lecteur. D'ailleurs, pour $x = 0$, $y' = 2$, et pour $x = \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{4}$, $y' = -\frac{1}{2}$; donc y' est > 0 entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ et < 0 entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Nous pouvons maintenant dresser le Tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
y'	2	+	0	—	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

D'où la courbe ci-contre ($f_2^x, 2$), que l'on complètera par une symétrie

(1) Quand x décrit cet intervalle, $\pi - x$ varie de π à $\frac{\pi}{2}$; la réunion des deux intervalles donne bien l'intervalle $(0, \pi)$.

par rapport à B.y, puis par une symétrie par rapport à O, et enfin par les translations $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ..., suivant O.x.

Fig. 2.

5. Variations de $y = \frac{\arcsin x}{4x^2 - 1}$.

La fonction n'est définie que dans l'intervalle $(-1, +1)$, à cause du numérateur. Elle est impaire, ce qui réduit notre intervalle à $(0, +1)$, tout en indiquant, pour la courbe représentative, une symétrie par rapport à l'origine. Elle devient infinie pour $x = \frac{1}{2}$.

Prenons la dérivée

$$(1) \quad y' = \frac{\frac{4x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} - 8x \arcsin x}{(4x^2 - 1)^2}.$$

Il nous faut le signe du numérateur N. Or, nous ne savons pas trouver directement ses racines, qui sont données par une équation transcendante. Nous devons alors expliquer une des méthodes indiquées au Chapitre XXII.

On songe tout d'abord à étudier les variations de N. Mais, en prenant mentalement sa dérivée, on constate que $\arcsin x$ ne disparaît pas; on serait donc encore conduit à la résolution d'une équation transcendante. On évite au contraire cette difficulté, en mettant x en facteur dans N, soit

$$(2) \quad N = x \left(\frac{4x^2 - 1}{x\sqrt{1 - x^2}} - 8 \arcsin x \right) = xz,$$

et étudiant les variations de z .

Cette nouvelle fonction est définie et continue dans tout l'intervalle

(0, +1), les bornes exceptées. On a maintenant ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} z &= \frac{8x^2\sqrt{1-x^2} - (1-x^2-1)\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{x^2(1-x^2)} - \frac{8}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(1-x^2-1)(2x^2-1)}{x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

quantité qui change de signe pour $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous formons le Tableau auxiliaire suivant, où nous indiquons seulement les signes de z ,

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
z		+	-	+
z	-	-	-	+

On voit que z s'annule, en passant du négatif au positif, pour une certaine valeur x_1 comprise entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1 ⁽²⁾. Nous pouvons à présent dresser le Tableau des variations de y :

x	0	$\frac{1}{2}$	x_1	1
y'	-1	-	- 0 +	+ ∞
y	0	1	+ ∞	$\frac{\pi}{6}$

On a d'ailleurs

$$x_1 = \frac{\arcsin x_1}{4x_1^2 - 1},$$

(1) Nous nous servons, pour ce calcul, de la dérivée d'un radical (n° 94).

(2) Elle est même comprise entre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et 1, car, pour $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, z est égal à

$$\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8\pi}{3} = \frac{8}{3}(\sqrt{3} - \pi) < 0.$$

ou, en se rappelant que x_1 annule z ,

$$y_1 = \frac{1}{8x_1 \sqrt{1-x_1^2}}.$$

Nous traçons enfin la courbe représentative, qui a l'allure suivante (fig. 3). Le point A est un *point d'arrêt*: la tangente y est parallèle

Fig. 3.

à O y. La tangente en O est la deuxième bissectrice. La droite $x = \frac{1}{2}$ est asymptote. Ajoutons enfin qu'en faisant la symétrie signalée au début, on obtient la courbe tracée en pointillé.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Soit une fonction $f(x)$, qui, dans l'intervalle (a, b) , admet une dérivée dont la valeur absolue reste inférieure à un nombre fixe A. Étant donné un nombre positif ε , déterminer un nombre η tel que l'oscillation de la fonction soit inférieure à ε dans tout intervalle plus petit que η .

(Cf. n° 39, Théorème IV. — Appliquer la formule des accroissements finis.)

2. Calculer approximativement, à l'aide de la formule des accroissements finis, les quantités suivantes : $\sin 59^\circ$, $\cos 46^\circ$, $\arctan 1,023$, $(1,001)^7 - 2(1,001)^3$.

3. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions finies et continues dans l'intervalle (a, b) , y admettant des dérivées finies et ne pouvant s'annuler

simultanément: si enfin $g(b) \neq g(a)$, on a

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

en appelant c un nombre compris entre a et b .

[Généralisation de la formule des accroissements finis. Se démontre d'une manière analogue, en considérant la fonction

$$f(x) - f(a) - k[g(x) - g(a)].$$

4. Calculer les dérivées des fonctions

$$\frac{ax+b}{cx+d}, \quad \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}, \quad \frac{x^4+3x^3-x+2}{x^3-x-1}, \quad \sin^3 x \cos x, \\ \operatorname{tang}\left(\frac{x+1}{1-2x^2}\right), \quad \operatorname{arc} \sin \frac{x}{x^2+1}, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x^3-1}{x+2}, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang}[(\sin x^2)^3].$$

5. Calculer les dérivées des fonctions suivantes et expliquer les résultats (Cf. exercice résolu n° 1) :

$$\operatorname{arc} \cos(2x^2-1), \quad \operatorname{arc} \sin(3x-4x^3), \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{x}, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{2x}{1-x^2},$$

$$\operatorname{arc} \sin(\cos x), \quad \operatorname{arc} \sin(\alpha \cos x + \beta \sin x)$$

sachant que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$,

$$\operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2}, \quad \operatorname{arc} \cos \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$\operatorname{arc} \sin(a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a^2}), \quad \operatorname{arc} \sin 2x\sqrt{1-x^2},$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

6. Calculer les dérivées $n^{\text{ième}}$ des fonctions $x^n \sin x$, $\sin x \cos x$, $(x-a)^n(x-b)^n$.

[Employer la formule de Leibniz (n° 69). Pour la deuxième fonction, on comparera le résultat avec celui qu'on obtiendrait en dérivant $\frac{1}{2} \sin 2x$. Pour la troisième, on examinera le cas de $a = b$ et l'on en déduira la somme des carrés des coefficients du binôme.]

7. Étudier la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}$.

(Cf. exercice résolu n° 3.)

8. Étudier la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $y = \sin(x^2) + \cos(x^2)$.

[Elle est de la forme $P_n \sin(x^2) + Q_n \cos(x^2)$, P_n et Q_n désignant

deux polynômes de degré n , dont on pourra calculer les termes de plus haut degré.]

9. Calculer $\arcsin x$ et $\arccos x$, pour $x = 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$, ainsi que $\arctan x$ et $\operatorname{arccot} x$, pour $x = 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}, +\infty$.

10. Calculer, à l'aide des Tables, $\arcsin(-0.258)$, $\arccos(0.586)$, $\arctan(-8.231)$.

11. Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} & 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad x^3 - 9x^2 - 21x - 2, \quad x^3 + px - q, \quad x^2 + p - \frac{q}{x}, \\ & (x^2 + 1)^3(x + 2), \quad \frac{x^2 - 2x}{x + 1}, \quad \frac{x^3 + 1}{x(x - 1)}, \quad \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, \quad \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}, \quad \sin^3 x + \cos^3 x, \\ & \sin^4 x \cos x, \quad \tan x - 2 \cot x, \quad \sin 2x = m \cos x, \quad \frac{\sin x}{\sin a} + \frac{\sin a}{\sin x}, \quad \frac{\sin 2x}{1 + \cos x}, \\ & \arcsin \frac{x}{2} - \arcsin \frac{1}{x}, \quad \arctan x, \arctan \frac{1}{x}, \quad \arctan \frac{x - 2}{x^2 - 1}, \quad \frac{\sin x}{x}, \\ & \frac{\tan x}{x}, \quad \frac{\arcsin x}{x}, \quad \frac{\arctan x}{x}, \quad \frac{\arctan x}{1 - x^2}, \quad x \sin \frac{1}{x}, \quad x^2 \tan x. \end{aligned}$$

12. Calculer la dérivée de la fonction $\frac{i}{5} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$.

13. Calculer la dérivée logarithmique de la fonction $\cos x + i \sin x$.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHMIQUE. NOMBRE e .

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *La fonction exponentielle est la seule fonction continue satisfaisant à l'identité fonctionnelle*

$$(1) \quad f(x)f(y) = f(x+y).$$

Cette proposition, qui est en quelque sorte une réciproque de la formule (2) du n° 81, peut s'établir comme il suit :

Si dans (1) on fait $x = 0$, on a

$$f(0)f(y) = f(y),$$

d'où

$$(2) \quad f(0) = 1.$$

Si l'on fait maintenant $x = y$, on a

$$[f(x)]^2 = f(2x).$$

Plus généralement, je dis que, si n est un entier positif, on a

$$(3) \quad [f(x)]^n = f(nx).$$

En effet, ceci est vrai pour $n = 2$. Procédons dès lors par récurrence. Admettons

$$[f(x)]^{n-1} = f[(n-1)x].$$

En multipliant les deux membres par $f(x)$, il vient

$$[f(x)]^n = f[(n-1)x]f(x) = f[(n-1)x + x] = f(nx).$$

La formule est donc vraie pour toutes les valeurs entières et positives de n . Je dis qu'elle l'est également pour n fractionnaire positif. Soit à

démontrer

$$(4) \quad [f(x)]^{\frac{p}{q}} = f\left(\frac{p}{q}x\right).$$

A cet effet, élevons les deux membres à la puissance q :

$$[f(x)]^p = \left[f\left(\frac{p}{q}x\right)\right]^q = f\left(\frac{p}{q}x \cdot q\right) = f(px),$$

ce que nous savons être exact.

Je dis maintenant qu'on a encore (3) quand n est incommensurable et positif. En effet, imaginons que $\frac{p}{q}$ tende vers n , ce qui est possible (n° 5). On aura constamment (4). Mais, le premier membre tend vers $[f(x)]^n$, d'après la continuité de la fonction exponentielle. Le second membre tend vers $f(nx)$ parce qu'on suppose la fonction $f(x)$ continue. Donc, à la limite, on a bien (3).

Enfin, je dis que l'égalité a encore lieu pour $n < 0$. Soit $n' = -n$ ($n > 0$). Il faut prouver que

$$[f(x)]^{-n} = f(-nx).$$

ou

$$\frac{1}{[f(x)]^n} = f(-nx).$$

D'après ce qui précède, ceci revient à

$$1 = f(nx)f(-nx) = f(nx - nx) = f(0),$$

ce qui est vrai. [Équation (2).]

Finalement, l'identité (3) a lieu quels que soient x et n . Si nous y faisons $x = 1$ et si nous posons $f(1) = a$, nous obtenons $f(n) = a^n$, ou, en changeant n en x ,

$$f(x) = a^x. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

2. Limite de $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ pour $x = 0$.

L'exposant devient infini, $\cos x$ tend vers 1. On a une expression de la forme $(1 + x)^{\beta}$ (n° 92). On a

$$\beta = \frac{1}{x^2}, \quad x = \cos x - 1 = -\frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2},$$

d'où

$$x\beta = \frac{-\frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

La limite demandée est

$$e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3. Dérivée de $\log(x + \sqrt{x^2 + a})$.

On a

$$y' = \frac{1 + (\sqrt{x^2 + a})'}{x + \sqrt{x^2 + a}}.$$

Or $\sqrt{x^2 + a} = (x^2 + a)^{\frac{1}{2}}$ a pour dérivée (nos 71 et 94)

$$\frac{1}{2}(x^2 + a)^{\frac{1}{2} - 1} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} \quad (1).$$

Donc

$$y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

4. Différences tabulaires dans les Tables de logarithmes.

La formule des accroissements finis (n° 62) permet d'avoir aisément une valeur approchée de ces différences. On a

$$\delta = \log_{10}(x + 1) - \log_{10} x = M[\log(x + 1) - \log x] \quad (\text{n° 88}).$$

Or, d'après la formule des accroissements finis, on peut écrire

$$\log(x + 1) - \log x = \frac{1}{x + \theta} \quad (0 < \theta < 1).$$

Donc, δ est compris entre $\frac{M}{x+1}$ et $\frac{M}{x}$. Chacun de ces nombres est approché de δ à moins de

$$M\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{M}{x(x+1)} = \frac{1}{2x^2}.$$

Cherchons par exemple la différence relative aux nombres 3586 et 3587. On a

$$\delta = \frac{M}{3587},$$

D'une façon générale, on a la formule suivante, qu'il est commode de savoir par cœur, vu son application fréquente :

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{x'}{\sqrt[n]{x^n}}.$$

avec une erreur par défaut inférieure à

$$\frac{1}{2(3586)^2} < \frac{1}{20000000} = \frac{1}{2 \cdot 10^7}.$$

Si, dans l'évaluation du quotient $\frac{M}{3587}$, on commet une erreur par excès moindre que $\frac{1}{2 \cdot 10^7}$, l'erreur totale sera toujours inférieure à cette même quantité. Or, si ε est l'erreur commise sur M , l'erreur sur le quotient est $\frac{\varepsilon}{3587}$. Prenons donc $\frac{\varepsilon}{3587} < \frac{1}{2 \cdot 10^7}$; il suffit que $\varepsilon < \frac{2 \cdot 10^7}{3587} = \frac{1}{10^4}$. Autrement dit, nous prenons $M = 0,4343$ (n° 88). Nous avons alors

$$\delta = \frac{0,4343}{3587} = 0,00012108, \dots$$

Nous sommes assurés que δ est compris entre 0,00012103 et 0,00012113. Si l'on se contente de tables à 5 décimales, la différence tabulaire doit être 0,00012, c'est-à-dire 12. C'est ce que le lecteur vérifiera sur une table.

3. Étudier les variations de $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

La fonction n'est définie que pour $1 + \frac{1}{x} > 0$, c'est-à-dire $x > 0$, ou bien $x < -1$.

Calculons la dérivée. Nous pourrions le faire en appliquant le théorème des fonctions composées (n° 130). Il est plus simple de *passer par le logarithme*

$$\begin{aligned} \log y &= x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right), \\ \frac{y'}{y} &= \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} = z. \end{aligned}$$

Le signe de y' est celui de z , car y est essentiellement positif. Nous ne savons pas résoudre l'équation $z = 0$; étudions dès lors les variations de z (Chap. XXII). Nous avons

$$z' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}.$$

Lorsque x croît de $-\infty$ à -1 , z' reste > 0 ; donc z croît, d'ailleurs à partir de zéro, et par suite demeure > 0 . Quant x croît de 0 à $+\infty$,

z' reste < 0 ; donc z décroît, d'ailleurs jusqu'à zéro, et par suite demeure > 0 .

Finalement, y' est toujours > 0 ; la fonction y croît dans tout intervalle où elle est continue.

Pour $x = \pm \infty$, $y = e$ (n° 91). Quand x tend vers $-\infty$, $1 + \frac{1}{x}$ tend vers zéro, $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ vers $-\infty$, $\log y$ vers $+\infty$, donc y vers $+\infty$. Quand x tend vers zéro par valeurs positives, $1 + \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, $\log y$ tend vers zéro (n° 96) ⁽¹⁾; donc y tend vers $e^0 = 1$.

On a finalement le Tableau

x	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$
y	e	e	$+\infty$	1	e

D'où la courbe ci-dessous (fig. 4). Le point A(0, 1) est un *point d'arrêt*. La tangente en ce point est Oy, car y' y est infini.

6. Limite de $y = \frac{(\log x)^m}{x^m}$, pour $x = +\infty$.

Posons $\log x = z$; il faut chercher la limite, pour $z = +\infty$, de

$$y = \frac{(z)^m}{e^{mz}}.$$

On sait en effet que c'est le facteur rationnel qui l'emporte sur le logarithme. Du reste, on peut écrire

$$\log y = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1 - \frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)x.$$

Le premier facteur tend vers zéro (n° 96, 5°), le second vers 1; donc $\log y$ tend vers zéro.

Passons au logarithme

$$\log y = e^z \log z - m z = z \left(\frac{e^z}{z} \log z - m \right).$$

Pour $z = +\infty$, $\frac{e^z}{z}$ tend vers $+\infty$ (n° 96), ainsi que $\log z$; donc aussi la parenthèse, et, par suite, $\log y$. D'où il résulte enfin que la limite cherchée est $+\infty$.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Trouver les fonctions continues satisfaisant aux identités fonctionnelles

$$f(x) + f(y) = f(xy), \quad f(x) + f(y) = f(x+y), \quad f(x)f(y) = f(xy).$$

[Cf. exercice résolu n° 1. On établira les identités

$$n f(x) = f(x^n), \quad n f(x) = f(n x), \quad [f(x)]^n = f(x^n).$$

Puis, on posera $x^n = z$ pour la première et la dernière, $x = 1$ pour la deuxième.

On peut aussi se ramener à l'identité (1) de l'exercice ci-dessus mentionné. Pour la première, considérer la fonction inverse de $f(x)$. Pour la seconde, poser $e^{f(x)} = \varphi(x)$. Pour la troisième, poser $f(e^x) = \varphi(x)$. Pour la première, on peut aussi poser $e^{f(x)} = \varphi(x)$.]

2. Étant donnés deux nombres positifs a et ε , déterminer η tel que l'inégalité $|x - x'| < \eta$ entraîne $|a^x - a^{x'}| < \varepsilon$, quels que soient x et x' dans un intervalle donné (α, β) .

3. Limites, pour $x = 0$, des expressions

$$(1 + \sin x)^{\cot x}, \quad \left(\frac{a^{\sin x} + b^{\sin x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

4. Limites, pour m infini, des expressions

$$\left(1 + \frac{a}{m} + \frac{b}{m^2} \right)^m, \quad \left(\frac{m^2 + am + b}{m^2 + cm + d} \right)^{\frac{a+bm+cm^2}{m}},$$

$$\left(1 + \frac{1}{\log m} \right)^{m^2}, \quad (1 + e^{-m})^{\frac{1}{m} + m}.$$

5. Dérivées de $\log \sin x$, $\log \tanh \frac{x}{2}$, $\log \tanh \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$.

6. Dérivées de 2^{2^x} , $x^{\sin x}$, $\log \log \log(x + \sqrt{x^2 + a})$, x^{x^x} , $\sqrt[3]{x^2 + 3x}$,
 $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

7. Dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de $e^x x^p$, $e^x \cos x$. (Formule de Leibniz, n° 69.)

8. Dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\log(1+x)$, $\log(1+x^2)$.

[Pour la deuxième fonction, écrire

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right).$$

Cf. Chap. V, exercice résolu n° 3.]

9. Étudier la dérivée $n^{\text{ième}}$ de e^{-x^2} .

[Cf. exercice mentionné ci-dessus. On montrera que $y^{(n)}$ est de la forme $e^{-x^2} P_n(x)$, P_n étant un polynôme de degré n , pair ou impair, ayant toutes ses racines réelles. On établira une équation différentielle vérifiée par P_n en appliquant la formule de Leibniz au produit $y' = -2xy$.]

10. Même question pour e^x .

11. Variations des fonctions

$$x^x, \quad x^x, \quad \frac{\log x}{x}, \quad \log x - x, \quad e^x x^m, \quad x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$\tan x + \log x, \quad \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x-x^2}}{x}.$$

12. Limites, pour x infini, de $\frac{e^{x^2-2x+1}}{x^6 + \frac{1}{4}x^3}$, $\frac{\log(x^2+1)}{x+1}$.

13. Limite, pour x infini, de $y = \frac{\log(x+a)}{\log x}$.

$$\left[\text{Écrire } y-1 = \frac{\log \frac{x+a}{x}}{\log x} \right]$$

14. Limite de $\frac{\log n}{\log v}$, pour n et v infinis, sachant que le rapport $\frac{n}{v}$ reste fini. (Cf. 13.)

15. Limite de $\frac{\log(a^n) - b}{2n} - \frac{b}{2}$ pour n infini. (Cf. 14.)

16. Limites de $(\sin x)^{\tan^2 x}$, $x^2 \log \frac{x^3+1}{\sin x}$, pour $x=0$, et de

$$\frac{\log [1 + (\sin x)^p]}{\tan^2 x}, \quad \text{pour } x = \frac{\pi}{2}.$$

17. Résoudre les équations

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = a, \quad e^{3x} + pe^x = qe^{-x}, \quad x \log ax + \beta \log bx + \gamma \log cx = m.$$

(Pour les deux premières, prendre pour inconnue e^x ou e^{2x} . Pour la troisième, on se ramène à une équation de la forme $x^p = A$.)

CHAPITRE VII.

SÉRIES ENTIÈRES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Calculer la somme de la série $u_n = \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$. Généraliser. — Soit y la somme de cette série, pour laquelle nous supposons que la plus petite valeur de n est $n = 3$, afin que u_n ne devienne pas infini. Si nous dérivons trois fois de suite le terme général, il se réduit à x^{n-3} . Donc

$$y''' = \sum_{n=3}^{+\infty} x^{n-3} = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (\text{n}^\circ 107, \text{I}),$$

en supposant $|x| < 1$. Intégrant trois fois de suite (n° 161, IV) et observant que y, y', y'' s'annulent pour $x = 0$, nous avons

$$(1) \quad \begin{aligned} y'' &= -\log(1-x), & y' &= (1-x)\log(1-x) + x, \\ y &= -\frac{(1-x)^2}{2}\log(1-x) - \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Vérification. — Nous avons (n° 107, II)

$$\begin{aligned} -\log(1-x) &= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots, \\ \frac{(1-x)^2}{2} &= \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

Multiplions et ajoutons à $\frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2}$. Les termes en x et x^2 disparaissent. Pour $n > 2$, le terme en x^n a pour coefficient

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2(n-2)} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

Généralisations. — On pourrait calculer de même la série de terme général $\frac{x^n}{n(n-1)\dots(n-p+1)}$.

Plus généralement, soit

$$(2) \quad y = \sum \frac{x^n}{(n+q)(n+q-1)\dots(n+q-p+1)},$$

q et p étant deux entiers quelconques, le second positif. La fonction $z = yx^q$ rentre dans le type précédent. On la calculera; puis, l'on aura $y = zx^{-q}$.

Plus généralement encore, imaginons une série entière dont le coefficient de x^n soit une fraction rationnelle en n ayant tous ses pôles (n° 211) simples, entiers et négatifs ⁽¹⁾. Par une décomposition de cette fraction

en éléments simples, on se ramènera à des séries telles que $\frac{x^n}{n+p}$ et $n^p x^n$.

La première rentre dans le type (2). Quant à la seconde, si l'on désigne sa somme par y_p , on a la formule de récurrence, facile à vérifier,

$$(3) \quad y_p = xy'_{p-1};$$

qui permet de calculer, de proche en proche, $y_1, y_2, y_3, \dots$ en fonction

$$\text{de } y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Une autre généralisation est la suivante : *Sommer une série dont le terme général est le produit de $\frac{x^n}{n!}$ par une fraction rationnelle du type précédent.*

En procédant comme tout à l'heure, on se ramène à des séries de la forme $\frac{x^n}{(n-p)n!}$ et $n^p \frac{x^n}{n!}$. Pour sommer la première, il suffit de multiplier par x^p et de dériver pour retomber sur la série $e^x x^{p-1}$; de sorte que l'on est ramené à la quadrature $\int e^x x^{p-1} dx$, qui se calcule par les fonctions élémentaires dès que $p \geq 1$ (n° 161, I).

Quant à $y_p = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \frac{x^n}{n!}$, elle vérifie encore la relation (3) et se ramène, de proche en proche, à $y_0 = e^x - 1$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ On les suppose négatifs pour que la fraction ne devienne infinie pour aucune valeur de n positive ou nulle. S'il y avait des pôles positifs, il suffirait d'augmenter n d'un nombre naturel convenable pour les rendre négatifs.

On pourrait admettre aussi des pôles multiples. Mais, on serait conduit à des quadratures ne se ramenant pas aux fonctions élémentaires. On pourrait même envisager des pôles non entiers, ou imaginaires, c'est-à-dire en somme une fraction rationnelle quelconque.

⁽²⁾ Cf. J. HAAR, *Nouv. Ann. de Math.* (avril 1912, p. 181), et EGAN, *Id.* (septembre 1912, p. 424).

2. Développer en série entière la fonction $y = \frac{1}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$. —

Décomposons en éléments simples (n° 107, 1). Les pôles sont

$$x = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = \cos \theta \pm i \sin \theta = \begin{cases} e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} \end{cases} \quad (\text{n° 109, 1}).$$

Nous avons alors

$$(1) \quad y = \frac{1}{(e^{i\theta} - x)(e^{-i\theta} - x)} = \frac{1}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \left(\frac{1}{e^{i\theta} - x} - \frac{1}{e^{-i\theta} - x} \right) \\ = \frac{i}{2 \sin \theta} \left(\frac{1}{e^{i\theta} - x} - \frac{1}{e^{-i\theta} - x} \right).$$

Or,

$$(2) \quad \frac{1}{e^{i\theta} - x} = \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{1}{1 - x e^{-i\theta}} = e^{-i\theta} (1 + x e^{-i\theta} + x^2 e^{-2i\theta} + \dots + x^n e^{-ni\theta} + \dots),$$

formule valable pour $|x e^{-i\theta}| < 1$, c'est-à-dire $|x| < 1$, puisque $|e^{-i\theta}| = 1$, (n° 109, 1).

De même, en changeant θ en $-\theta$,

$$(3) \quad \frac{1}{e^{-i\theta} - x} = e^{i\theta} (1 + x e^{i\theta} + x^2 e^{2i\theta} + \dots + x^n e^{ni\theta} + \dots).$$

Portons dans (1)

$$y = \frac{i}{2 \sin \theta} [(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) + x(e^{-2i\theta} - e^{2i\theta}) + \dots + x^n (e^{-(n+1)i\theta} - e^{(n+1)i\theta}) + \dots],$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{\sin \theta} [\sin \theta + x \sin 2\theta + x^2 \sin 3\theta + \dots + x^n \sin (n+1)\theta + \dots],$$

formule valable pour $|x| < 1$.

3. Développer en série arc tang $[R(x)]$, $\log [R(x)]$, où $R(x)$ désigne une fraction rationnelle quelconque.

Les dérivées de ces fonctions sont visiblement rationnelles. On les développera par la méthode du n° 107, 1; puis on intégrera terme à terme (n° 106, 1).

Pour le logarithme, il est néanmoins plus simple de procéder de la manière suivante; on décompose le numérateur et le dénominateur de $R(x)$ en un produit de facteurs linéaires (n° 205); soit

$$R(x) = A \frac{(x+a)^{\alpha} (x+b)^{\beta} \dots (x+l)^{\lambda}}{(x+a')^{\alpha'} (x+b')^{\beta'} \dots (x+l')^{\lambda'}}.$$

On a

$$\log R(x) = \log A + \alpha \log(x+a) + \dots + \alpha' \log(x+a') + \dots$$

On développe chaque terme en série, en écrivant par exemple

$$\log(x+a) = \log\left(1 + \frac{x}{a}\right) + \log a;$$

puis, on ajoute ⁽¹⁾.

4. *Développer en série la fonction* $y = (\arcsin x)^2$ (E. P., 1911). — On pourrait former le carré de $\arcsin x$ (n° 107, VII); mais les calculs semblent compliqués. Essayons de prendre la dérivée

$$(1) \quad y' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On ne peut encore développer directement. Dérivons de nouveau

$$(2) \quad y'' = 2 \arcsin x \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{1-x^2}.$$

On ne peut encore développer. Mais, si l'on élimine $\arcsin x$ entre (1) et (2), on obtient l'équation différentielle linéaire très simple

$$(3) \quad y''(1-x^2) - xy' - 2 = 0,$$

ce qui nous conduit à la méthode des coefficients indéterminés (n° 106, III).

Posons

$$\begin{aligned} -x \mid y' &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \\ 1-x^2 \mid y'' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Portons dans (3) et annulons successivement les termes constant, en x , en x^2 , ..., en x^n ; il vient

$$\begin{aligned} a_1 - 2 &= 0, & 2a_2 - a_0 &= 0, & \dots & a_3 - a_1 - a_1 &= 0, & \dots \\ (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} - a_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$(4) \quad \begin{aligned} a_1 &= 2, & a_2 &= \frac{a_0}{2}, & a_3 &= \frac{4}{3}, & \dots, \\ (n+1)a_{n+1} - na_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

La formule (4) nous conduit à distinguer les termes de rang pair et ceux de rang impair.

Pour $x = 0$, y' s'annule; donc a_0 et par suite tous les termes de rang

(1) On développerait de même $\log \sqrt[p]{R(x)} = \frac{1}{p} \log R(x)$.

pair sont nuls ⁽¹⁾. Nous avons seulement à calculer a_{2n+1} , d'après la formule de récurrence

$$(2n+1)a_{2n+1} = 2na_{2n-1},$$

et en tenant compte de $a_1 = 2$. En opérant suivant la méthode générale (n° 314), on trouve

$$a_{2n+1} = 2 \frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n+1)}.$$

Nous avons donc

$$(5) \quad y' = 2 \left[x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2.4}{3.5} x^5 + \dots + \frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n+1)} x^{2n+1} + \dots \right].$$

Cette série admet pour intervalle de convergence $(-1, +1)$, comme le montre la règle de d'Alembert. La formule (5) est donc valable à l'intérieur de cet intervalle. En intégrant terme à terme, on a finalement, en remarquant que y s'annule pour $x = 0$,

$$(6) \quad y = x^2 + \frac{2}{3} \frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5} \frac{x^6}{3} + \dots + \frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n+1)} \frac{x^{2n+2}}{n+1} + \dots$$

3. *Calcul des logarithmes.* — Le développement (16) du n° 107 permet de calculer les logarithmes népériens, et par suite les logarithmes vulgaires, des nombres compris entre 0 et 2. Mais, il est d'un emploi peu commode, à cause de sa très lente convergence. Dans la pratique, voici comment il vaut mieux procéder :

On a

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \log(1-x) &= -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \end{aligned}$$

Retranchons

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

Ce développement est valable pour $|x| < 1$.

Posons

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N}, \quad x = \frac{1}{2N+1};$$

nous avons

$$\log(N+1) = \log N + 2 \left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2N+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2N+1} \right)^5 + \dots \right].$$

C'était à prévoir, car y' est une fonction impaire.

Si N désigne un nombre entier positif, $\frac{1}{2N+1}$ est inférieur à l'unité, et la formule ci-dessus permet de calculer de proche en proche les logarithmes de tous les nombres entiers, au moyen d'une série qui converge rapidement, surtout quand N devient grand.

6. *Calcul de π .* — La formule (17) du n° 107 (III) permet de calculer le nombre π avec une approximation illimitée. Si l'on y faisait par exemple $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on obtiendrait la valeur de $\frac{\pi}{6}$. On rend les calculs plus rapides en procédant comme il suit.

De la formule (Cf. Chap. V, exercice résolu n° 1)

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} a - \operatorname{arc} \operatorname{tang} b = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{a-b}{1+ab},$$

on déduit ⁽¹⁾

$$4 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} 1 = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{239};$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} 1 &= 4 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{239} \\ &= 4 \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^5 - \dots \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{239} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{239} \right)^5 - \dots \right]. \end{aligned}$$

Prenons par exemple trois termes dans le premier crochet et un terme dans le second. L'erreur ε_1 commise sur le premier crochet est du signe du premier terme négligé $-\frac{1}{7} \left(\frac{1}{5} \right)^7$ et inférieure à ce terme en valeur absolue (n° 54, 4°). On a donc

$$\varepsilon_1 < 0, \quad |\varepsilon_1| < \frac{2^7}{7 \cdot 10^7} = \frac{128}{7 \cdot 10^7} < \frac{2}{10^5}.$$

De même, l'erreur ε_2 commise sur le second crochet est négative et l'on a

$$|\varepsilon_2| < \frac{1}{5} \frac{1}{(239)^3} < \frac{1}{5(200)^3} = \frac{1}{24 \cdot 10^6} < \frac{1}{10^7}.$$

(1) On calcule d'abord

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{5} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{5} + \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{5} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} \right) = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{5}{19};$$

puis, de même,

$$4 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{5} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{5}{19} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{100}{119}.$$

L'erreur commise sur $\frac{\pi}{4}$ est $\frac{1}{4}\varepsilon_1 - \varepsilon_2$; elle est inférieure en valeur absolue à $\frac{8}{10^6}$. L'erreur sur π est donc plus petite que $\frac{32}{10^6}$.

Effectivement, si l'on fait le calcul avec 6 décimales, on trouve

$$\pi = 3,141592, \dots$$

La valeur réelle étant, comme on sait, 3,141592. ..., on a une valeur approchée par excès, l'erreur étant $< 0,000034 < \frac{32}{10^6}$.

7. Calculer les deux sommes

$$S = \cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \dots + \cos(a+nh).$$

$$S' = \sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin(a+nh).$$

Ce calcul se fait très simplement par l'emploi de la formule d'Euler (n° 109, I). On a, en effet,

$$\begin{aligned} S + iS' &= \sum_{p=0}^n [\cos(a+ph) + i \sin(a+ph)] = \sum_{p=0}^n e^{i(a+ph)} \\ &= e^{ia}(1 + e^{ih} + e^{2ih} + \dots + e^{nih}) \\ &= e^{ia}[1 + e^{ih} + (e^{ih})^2 + \dots + (e^{ih})^n] \\ &= e^{ia} \frac{(e^{ih})^{n+1} - 1}{e^{ih} - 1} = e^{ia} \frac{e^{i(n+1)h} - 1}{e^{ih} - 1} = e^{ia + \frac{(n+1)h}{2}} \frac{e^{\frac{ih}{2}} - e^{-\frac{(n+1)ih}{2}}}{e^{\frac{ih}{2}} - e^{-\frac{ih}{2}}} \\ &= e^{i\left[a + (n+1)\frac{h}{2}\right]} \frac{\sin n\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} = \frac{\sin n\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{n+1}{2}h\right) \right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(a + \frac{n+1}{2}h\right) \right]. \end{aligned}$$

Égalons les parties réelles et imaginaires ⁽¹⁾; nous obtenons

$$S = \frac{\cos\left[a + (n+1)\frac{h}{2}\right] \sin n\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}, \quad S' = \frac{\sin\left[a + (n+1)\frac{h}{2}\right] \sin n\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

(1) On suppose a et h réels. Mais, le calcul serait valable quand même ils seraient imaginaires. Il suffirait de former de même $S - iS'$, puis d'ajouter et retrancher.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Sommer les séries

$$\begin{aligned}
 & nx^{n-1}, \quad n^2x^n, \quad n(n-1)(n-2)x^n, \quad \frac{x^n}{n(n-1)}, \quad \frac{x^n}{(n-3)(n-2)(n-1)}, \\
 & \frac{x^n}{(n-5)(n-4)}, \quad \frac{nx^n}{(n-5)(n-2)(n-1)}, \quad \frac{n^3-1}{n(n-2)}x^n; \\
 & \frac{x^n}{(n-1)!}, \quad \frac{x^n}{(n-3)(n-2)n!}, \quad \frac{n^2-1}{(n-4)}\frac{x^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

2. Multiplier les développements en série de $\frac{1}{(1-x)^n}$ et $\frac{1}{(1-x)^n}$; en déduire des identités arithmétiques par comparaison avec le développement de $\frac{1}{(1-x)^{n+n}}$.

[On doit trouver l'identité

$$C_{n+n-p}^{n+n-1} = C_{n-p}^{n-1} + C_{n-1}^{n-1} C_{n-p-1}^{n-1} + C_{n+1}^{n-1} C_{n-p-2}^{n-1} + \dots + C_{n-p-1}^{n-1} C_{n-p}^{n-1} + C_{n+p}^{n-1}].$$

3. Vérifier sur les développements en série les identités

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

4. Développer en série les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2-3x-1}{(x-1)(x+2)(3x+1)}, \quad \frac{x-2}{(x-1)^2(x-3)^3}, \\
 & \frac{x-1}{x^2-x-1}, \quad \frac{1}{x^p-x^{p-1}-\dots-x+1}.
 \end{aligned}$$

[Pour les deux dernières, les écrire $\frac{(x-1)^2}{x^3-1}$ et $\frac{x-1}{x^{p+1}-1}$; puis développer par exemple

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \dots,$$

et multiplier par $(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$.]

5. Développer en série la fonction $\frac{1}{x^2+px+q}$, sachant que le trinôme a ses racines imaginaires.

[On pourrait décomposer en éléments simples et appliquer la méthode générale (n° 107, 1); mais il serait assez pénible de faire disparaître les imaginaires, à moins qu'on ne mette celles-ci sous la forme trigonomé-

trique. Il revient au même de mettre le trinôme sous la forme $z^2 - 2z \cos \theta + 1$, en posant $x = z \sqrt{q}$; ce qui est toujours possible si $p^2 - 4q < 0$. On est alors ramené à l'exercice résolu n° 2. On développe suivant z ; puis l'on revient à x .]

6. Appliquer la méthode précédente aux fonctions

$$\frac{1}{x^2 + x + 1}, \quad \frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x + 1}, \quad \frac{x + 1}{2x^2 + 3x + 3}.$$

7. Développer les fonctions

$$\frac{x^2 - x + 3}{x^4 - 3x^2 + 2}, \quad \frac{x + 1}{2x^4 + x^2 + 2}, \quad \frac{x^2 - 3}{(x^3 - 1)(x^3 + 2)}.$$

[D'une façon générale, si le dénominateur ne dépend que de x^m , on développe son inverse suivant les puissances de x^m et l'on multiplie par le numérateur.]

8. Développer les fonctions

$$\begin{aligned} \arctan \frac{2x + 1}{x - 1}, \quad \arctan \frac{1 - mx}{x + m}, \quad \arctan \frac{x^2 + 1}{3x^2 + 2}, \\ \arctan \frac{2x}{1 - x^2}, \quad \arctan \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \arctan(x + a). \end{aligned}$$

[Le développement de $\arctan \frac{u}{v}$ se ramène à celui de $\frac{1}{u^2 + v^2}$.]

9. Développer les fonctions

$$\begin{aligned} \log \frac{x^2 - 1}{x - 2}, \quad \log \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad \log(x^2 + x + 1), \\ \log \frac{x^3 + 1}{x^4 - 2x^2 + 4}, \quad \log \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}, \quad \log \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}. \end{aligned}$$

10. Développer :

$$\sin x \cos^3 x, \quad \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^3 x, \quad e^x \cos x, \quad e^{x \cos a} \cos(x \sin a).$$

[Écrire ces fonctions : $\frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{8}$, $\frac{(e^x + e^{-x})^2 (e^x - e^{-x})^3}{32}$ développé suivant les puissances de e^x , $\frac{e^{a(1+i)} + e^{a(1-i)}}{2}$, $\frac{e^{1+ia} + e^{1-ia}}{2}$.]

11. Développer $|\log(1 + x)|^2$ (E. P., 1911)

(Cf. exercice résolu n° 4.)

12. Développer $y = (\text{arc tang } x)^2$.

[Établir la formule

$$y''(1+x^2) + 2xy' = \frac{2}{1+x^2} = 2(1-x^2+x^4-x^6+\dots),]$$

13. Calculer $\log_{10} 2$ avec 5 décimales en se servant de la formule

$$\log 2 = 3 \log \frac{5}{4} + \log \frac{4}{40} = \log \frac{10^3 5}{10^2 4}$$

et de la série de l'exercice résolu n° 5. (*Leçons*, exercice n° 235.)

14. Pour calculer les logarithmes des nombres qui ne sont pas dans les Tables, on admet qu'entre deux nombres consécutifs le logarithme de x varie proportionnellement à x . Calculer l'ordre de grandeur de l'erreur commise en faisant cette hypothèse. (*Cf. Leçons*, n° 237.)

15. Calculer les sommes

$$A_n = 1 + x \cos \theta + x^2 \cos 2\theta + \dots + x^n \cos n\theta,$$

$$B_n = 1 + x \sin \theta + x^2 \sin 2\theta + \dots + x^n \sin n\theta,$$

$$C_n = 1 + x \cos \theta + 2x^2 \cos 2\theta + \dots + nx^n \cos n\theta,$$

$$D_n = 1 + x \sin \theta + 2x^2 \sin 2\theta + \dots + nx^n \sin n\theta.$$

(Pour A_n et B_n , procéder comme à l'exercice résolu n° 7. Pour C_n et D_n , dériver les résultats précédents par rapport à x ou par rapport à θ .)

On pourra déduire de là les sommes des séries entières $x^n \cos n\theta$, $x^n \sin n\theta$, $nx^n \cos n\theta$, $nx^n \sin n\theta$.)

16. Même exercice avec les fonctions hyperboliques.

17. Résoudre les équations

$$x = \log(y - \sqrt{1-y^2}), \quad x = \log(y + \sqrt{y^2-1}), \quad x = \log \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}.$$

[Pour la première, on a

$$y + \sqrt{1-y^2} = e^x, \quad (y - \sqrt{1-y^2}) e^x = y^2 - (1-y^2) = -1;$$

d'où

$$y - \sqrt{1-y^2} = -e^{-x}.$$

En ajoutant, il vient $y = \text{sh } x$.

Pour la seconde équation, on trouve de même $y = \text{ch } x$. Pour la troisième, $y = \text{th } x$.]

18. Trouver tous les nombres complexes z satisfaisant aux équations

$$e^z = x - yi, \quad \cos z = x + yi, \quad \sin z = x + yi, \quad \tan z = x + yi.$$

Quelles fonctions de $x + yi$ peut-on déduire de là? Calculer leurs dérivées par rapport à un paramètre réel t , dont dépendraient x et y .

19. Comment peut-on définir $(a + bi)^{c+di}$?

$$[(a + bi)^{c+di}] = e^{c+di \log a+bi}.$$

Combien y a-t-il de déterminations? Comment passe-t-on de l'une à l'autre? Cas où c est entier, ou bien $a^2 + b^2 = 1$. Conditions pour que toutes les déterminations soient réelles.

CHAPITRE VIII.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Trouver le développement du cinquième ordre de

$$y = e^{\tan x} + \sin x \log(1+x).$$

Nous avons une combinaison des fonctions e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, dont nous connaissons les développements en série entière. Appliquons donc les règles des nos 116, 117, 118, en limitant tous nos développements intermédiaires au cinquième ordre ⁽¹⁾ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \\ (R_1) \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \dots & x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \dots \\ (R_2) \quad \frac{2x^5}{15} - \dots & \end{array}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

$$e^{\tan x} = 1 + \tan x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{1}{6} \tan^3 x + \frac{1}{24} \tan^4 x + \frac{1}{120} \tan^5 x + \dots$$

$$1 + \dots \dots \dots \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \dots \dots \dots \tan^2 x = x^2 \left(1 + \frac{x^2}{3} + \dots \right)^2 = x^2 \left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \dots \right)$$

(1) Nous n'écrivons pas les restes λx^6 ; nous les remplaçons simplement par des points ...

$$\frac{1}{6} \dots \dots \dots \tan^3 x = x^3 \left(1 - \frac{x^2}{3} + \dots \right)^3 = x^3 (1 - x^2 + \dots) \quad (1),$$

$$\frac{1}{24} \dots \dots \dots \tan^4 x = x^4 (1 + \dots)^4 = x^4 + \dots,$$

$$\frac{1}{120} \dots \dots \dots \tan^5 x = x^5 (1 + \dots)^5 = x^5 + \dots,$$

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{8} x^4 + \frac{37}{120} x^5 + \dots \quad (2),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots,$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

$$\begin{aligned} \sin x \log(1+x) &= x^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \dots \right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \right), \\ &= x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6} + \dots \right). \end{aligned}$$

$$y = 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{13}{24} x^4 + \frac{17}{120} x^5 + \dots x^6.$$

Le lecteur pourra comparer avec la formule de Mac-Laurin, s'il se sent le courage de former les cinq premières dérivées de y .

2. Développer $y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{5}}$, au voisinage de $x = \frac{\pi}{6}$.

Posons $x = \frac{\pi}{6} + h$. Nous avons

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6} \cos h + \sin h \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cos h + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin h.$$

Développons $\sin h$ et $\cos h$ jusqu'au troisième ordre, par exemple; nous obtenons

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h^2}{2} + \dots \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(h - \frac{h^3}{6} + \dots \right), \\ y &= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} h - \frac{h^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} h^3 + \dots} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} h^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{h}{2\sqrt{3}} - \frac{h^2}{6} + \dots \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Posons

$$z = \left(\frac{h}{2\sqrt{3}} - \frac{h^2}{6} \right) + \dots$$

Nous développons $(1 - z)^{\frac{1}{2}}$ et $(1 + \frac{z}{\sqrt{3}})^{\frac{1}{2}}$ par la formule du binôme (n° 25).

Pour faire commodément le calcul, nous avons indiqué en marge les coefficients de $\tan x, \dots$ dans $e^{\tan x}$.

et développons $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ par la série du binôme (n° 107, VI), en nous bornant naturellement au second ordre, comme nous l'avons fait pour z :

$$\begin{aligned}(1+z)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2\sqrt{3}} - \frac{h^2}{6}\right) - \frac{1}{8}\frac{h^2}{1^2} + \dots = 1 - \frac{h}{4\sqrt{3}} - \frac{3}{3^2}h^2 + \dots; \\ y &= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(h^{\frac{1}{2}} - \frac{h^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}} - \frac{3}{3^2}h^{\frac{5}{2}} + \lambda h^{\frac{7}{2}}\right).\end{aligned}$$

3. Développer

$$y = \frac{\sqrt{x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x^2 - x - 1} + \sqrt{x^3 - x^2 - 3x - 4}}{x^2 - x + 1},$$

au voisinage de $x = \infty$.

Nous avons, en posant $x = \frac{1}{h}$,

$$\begin{aligned}y &= \frac{x^{\frac{5}{2}}(1 + 2h - h^2 - 2h^3 - h^4 - h^5)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}(1 + h - 3h^2 - 4h^3)^{\frac{1}{2}}}{x^2(1 - h + h^2)}, \\ y &= x^{\frac{1}{2}} \frac{(1 + 2h - h^2 - 2h^3 - h^4 - h^5)^{\frac{1}{2}} + h(1 + h - 3h^2 - 4h^3)^{\frac{1}{2}}}{1 - h + h^2}.\end{aligned}$$

Poussons, par exemple, nos développements en h jusqu'au terme en h^2 :

$$\begin{aligned}(1 + 2h - h^2 + \dots)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}(2h - h^2) - \frac{1}{8}(2h - h^2)^2 + \dots = 1 + h - h^2 + \dots, \\ -h(1 + h - \dots)^{\frac{1}{2}} &= -h\left(1 + \frac{h}{2} + \dots\right) = -h - \frac{h^2}{2} + \dots, \\ y &= x^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \frac{3}{2}h^2 + \dots}{1 - h + h^2} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 - h - \frac{3}{2}h^2 + \dots\right) = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \lambda x^{-\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer les développements du cinquième ordre des fonctions suivantes :

$$\sin x e^x, \quad \operatorname{arcsin} x \log(1+x), \quad \operatorname{tang} x e^{\operatorname{arctang} x},$$

$$\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{\cos x}}, \quad \sqrt[3]{\operatorname{arcsin} x - x}.$$

2. Développements du troisième ordre des fonctions

$$\left((1+x)^{\frac{1}{v}}, \quad (\cos x)^{\sin x}, \right. \\ \left. \left(e^{\frac{1}{x} \log(1+x)}, \quad e^{\sin x \log \cos x} \right) \right).$$

3. Développements du quatrième ordre des fonctions $\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$, au voisinage de $\frac{\pi}{6}$; $\log \tan x$, au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

4. Développer $(\cot x)^3$, $\sqrt{1-e^x}$, $\log \sin x - \log x$, au voisinage de $x=0$.

5. Développer $\frac{e^{x+\sin x}}{\sqrt{\cos x + \sin 2x}}$, au voisinage de $x = \frac{\pi}{5}$.

6. Développer

$$\sqrt{x^4+x^3-x^2+x-2} = \sqrt[3]{x^6-2x^5+x^4+x^3-x^2-1}, \\ \frac{x^5+x^3-x^2}{x^2-2x-1}, \quad \text{tang } \frac{\pi(x+1)}{2x+1},$$

au voisinage de $x = \infty$.

7. L'équation $x - e \sin x = M$ définit x comme fonction de e (n° 135). Trouver, en admettant son existence, le développement du troisième ordre de cette fonction.

[Méthode des coefficients indéterminés, en s'appuyant sur ce qu'une fonction n'a qu'un seul développement d'ordre donné (n° 110). On posera au préalable $x = M + y$, de manière que y s'annule avec e .]

8. La formule des accroissements finis $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ définit θ comme fonction de h . Trouver, en admettant son existence, le développement du troisième ordre de cette fonction.

[Poser $\theta = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots$. Puis, développer $f(a+h)$ et $f'(a+\theta h)$ par la formule de Taylor; substituer la valeur précédente de θ , et identifier les deux membres.

On peut généraliser, en partant de la formule de Taylor limitée à un nombre quelconque de termes, et développer le θ qui figure dans le reste.]

CHAPITRE IX.

INFINIMENT PETITS, FORMES INDÉTERMINÉES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Trouver la partie principale de*

$$r = \frac{\log \cos x \left(\sqrt{\cot^3 x} - \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{x^3 + 2x^5}} \right)}{x \operatorname{arc} \tan x - \sin mx}$$

Calculons d'abord la partie principale du numérateur. Pour cela, nous calculons séparément les parties principales des deux facteurs dont il est le produit. Pour $\log \cos x$, nous écrivons (n° 107, V et II)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots, \quad \log \cos x = \log \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots \right) = -\frac{x^2}{2} + \dots$$

La partie principale du premier facteur est donc $-\frac{x^2}{2}$.

Le second facteur étant une somme, nous devons calculer les développements limités de ses deux termes, en procédant par essais successifs, comme on l'a dit au n° 122.

Pour ne pas allonger outre mesure la rédaction, nous écrivons ci-dessous les différents développements dont nous avons besoin, en marquant p points au-dessous de chaque terme obtenu après le $(p+1)^{\text{ième}}$ essai. Le lecteur vaudra bien refaire les calculs dans l'ordre où nous les supposons faits.

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots, \\ \cot x &= \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{45} + \dots \right) = \frac{1}{x} (1 - \xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\cot x)^{\frac{3}{2}} &= x^{-\frac{3}{2}}(1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\dots) \\
 &= x^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{120}+\dots\right); \\
 \frac{a^2+x^2}{x^3+2x^5} &= \frac{1}{x^3}\frac{a^2+x^2}{1+2x^2} = \frac{1}{x^3}(a^2-x^2+2x^4+\dots) \\
 &= \frac{a^2}{x^3}(1-x^2+2x^4+\dots) = \frac{a^2}{x^3}(1+t), \\
 \left(\frac{a^2+x^2}{x^3+2x^5}\right)^{\frac{1}{2}} &= ax^{-\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}} \\
 &= ax^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\dots\right) = ax^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{7x^4}{8}+\dots\right); \\
 [ ] &= x^{-\frac{3}{2}}\left[\left(1-a\right)-\frac{13x^2}{15}+\dots\right].
 \end{aligned}$$

Si $a \neq 1$, la partie principale du crochet est $(1-a)x^{-\frac{3}{2}}$. Si $a = 1$, elle est $-\frac{13}{15}x^{\frac{3}{2}}$.

Procédons de même pour le dénominateur :

$$\begin{aligned}
 x \operatorname{arc} \operatorname{tang} x &= x\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right), \\
 \sin mx &= mx - \frac{m^3 x^3}{6} + \frac{m^5 x^5}{120} - \dots,
 \end{aligned}$$

$$\text{Dénominateur} = (x-m)x + \frac{m(m^2-2)}{6}x^3 + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{6}x^5 + \dots$$

La partie principale est $(x-m)x$, si $x \neq m$; $\frac{m(m^2-2)}{6}x^3$, si $x = m \neq \pm\sqrt{2}$; $\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{6}x^5$, si $x = m = \varepsilon\sqrt{2}$ ($\varepsilon = \pm 1$).

Finalement, on peut dresser le Tableau suivant pour la partie principale de y :

$a \neq 1, x \neq m, \dots\dots\dots$	$\frac{a-1}{2(x-m)} x^{\frac{1}{2}},$
$a \neq 1, x = m \neq \pm\sqrt{2}, \dots\dots$	$\frac{3(a-1)}{m(m^2-2)} x^{\frac{3}{2}},$
$a \neq 1, x = m = \varepsilon\sqrt{2}, \dots\dots\dots$	$\frac{3(a-1)}{\varepsilon\sqrt{2}} x^{\frac{5}{2}},$
$a = 1, x \neq m, \dots\dots\dots$	$\frac{13}{3a(x-m)} x^{\frac{7}{2}},$
$a = 1, x = m \neq \pm\sqrt{2}, \dots\dots\dots$	$\frac{13}{5m(m^2-2)} x^{\frac{3}{2}},$
$a = 1, x = m = \varepsilon\sqrt{2}, \dots\dots\dots$	$\frac{13}{5\varepsilon\sqrt{2}} x^{\frac{5}{2}},$

2. *Trouver les limites de* $y = \frac{(\pi \sin x \cos^3 x - x) \sqrt{x + \arcsin x}}{(x + \beta \arctan x) \log \tan x}$, *pour* $x \rightarrow 0$ *et* $\frac{\pi}{4}$.

1° *Limite pour* $x \rightarrow 0$. — On a le symbole $\frac{0}{0 \times \infty}$, qui comporte deux indéterminations. Cherchons la partie principale de y (n° 123).

Facteur $\pi \sin x \cos^3 x - x$: Les parties principales de $\sin x$ et $\cos x$ sont respectivement x et 1; donc celle de $\sin x \cos^3 x$ est x et celle du facteur est $(\pi - 1)x$.

Facteur $\sqrt{x + \arcsin x}$: La partie principale de $\arcsin x$ étant x , celle du facteur est $\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Numérateur : La partie principale est $\sqrt{2}(\pi - 1)x^{\frac{3}{2}}$.

Facteur $(x + \beta \arctan x)$: On a, en adoptant les conventions de l'exercice précédent,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots, \quad x + \beta \arctan x = x(1 + \beta) + \frac{x^3}{3} + \dots$$

La partie principale du facteur est donc $x(1 + \beta)$, si $\beta \neq -1$, et $\frac{x^3}{3}$, si $\beta = -1$.

Facteur $\log \tan x$: Il est équivalent à $\log x$ (n° 120), car $\log \tan x - \log x = \log \left(\frac{\tan x}{x} \right)$ tend vers zéro, puisque $\frac{\tan x}{x}$ tend vers 1⁽¹⁾. Or, $\log x$ n'a pas de partie principale, mais est d'un ordre infinitésimal infiniment petit (n° 120). Il en est donc de même de $\log \tan x$.

Finalement, si $\beta \neq -1$, y a même limite que $\frac{\sqrt{2}(\pi - 1)x^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta} \frac{1}{\log x}$, c'est-à-dire zéro (n° 96). Si $\beta = -1$, la limite est celle de $\frac{3\sqrt{2}(\pi - 1)}{x^{\frac{3}{2}} \log x}$, c'est-à-dire $-\infty$.

2° *Limite pour* $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$. — On a le symbole $\frac{0}{0}$. Le facteur $\sqrt{x + \arcsin x}$ tend vers $\sqrt{\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\pi}{4}}$ et ne contribue pas à l'indétermination. Il en est de même de $x + \beta \arctan x$, quand $\beta \neq -\frac{\frac{\pi}{4}}{\arctan \frac{\pi}{4}}$. Reste à trouver

(1) La partie principale de $\tan x$ est, en effet, x .

la limite du rapport $\frac{\pi \sin x \cos^3 x - x}{\log \tan x}$. Le plus simple est ici d'appliquer la règle de l'Hospital, qui conduit au rapport $\frac{\pi(\cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x) - 1}{\sin x \cos x}$,

lequel tend vers $-\frac{\pi + 2}{4}$.

Donc, si $\beta = -\frac{\pi}{4 \operatorname{arc} \tan \frac{\pi}{4}}$, la limite de y est $-\frac{(\pi + 2) \sqrt{\frac{\pi}{4} + \operatorname{arc} \sin \frac{\pi}{4}}}{\pi + 4 \beta \operatorname{arc} \tan \frac{\pi}{4}}$.

Si $\beta = -\frac{\pi}{4 \operatorname{arc} \tan \frac{\pi}{4}}$, elle est infinie.

3. *Limite de $y = \frac{\sqrt{x^4 + x^3 + 1} - x \sqrt{x^6 + x^2 + 1}}{x^2 + 2x + 1}$, pour x infini.* —

Suivant le signe de x , on a le symbole $\frac{\infty \pm \infty}{\infty}$, qui comporte une ou deux indéterminations.

Prenons x pour infiniment grand principal. La partie principale du dénominateur est x^2 (1). Pour avoir celle du numérateur, nous écrirons les développements des radicaux, en adoptant toujours les mêmes signes conventionnels pour indiquer les essais successifs :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4 + x^3 + 1} &= x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \dots \right)^{\frac{1}{2}} = x^2 \left(1 + \frac{1}{2x} + \dots \right), \\ x \sqrt{x^6 + x^2 + 1} &= x x^2 (1 + \dots)^{\frac{1}{3}} = x x^2 (1 + \dots), \\ \text{Numérateur} &= x^2 (1 - x) + \frac{x}{2} + \dots\end{aligned}$$

Si $x \neq 1$, $\lim y = 1 - x$; si $x = 1$, $\lim y = x$.

4. *Limites de $y = \left(x \cos \frac{x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x}{x^2 + 1}}$ pour $x = 0$ et pour $x = \infty$.* —
Nous avons

$$\log y = \frac{x}{x^2 + 1} \log x + \frac{x}{x^2 + 1} \log \cos \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Pour $x = 0$, $x \log x$ tend vers zéro (n° 96); $\cos \frac{x}{x^2 + 1}$ tend vers

La partie principale d'un polynôme en x , lorsque x est l'infiniment grand principal, est le terme de plus haut degré, puisque c'est le premier terme du développement limité, qui n'est autre que le polynôme lui-même ordonné suivant les puissances décroissantes de x .

$\cos 0 = 1$, son logarithme tend vers zéro; donc, aussi $\log y$. La limite de y est 1.

Pour $x = +\infty$ ⁽¹⁾, $\frac{x \log x}{x^2 - 1}$ équivaut à $\frac{\log x}{x}$, qui a pour limite zéro (n° 96); $\cos \frac{x}{x^2 - 1}$ tend encore vers 1; $\log y$ tend vers zéro, y a encore pour limite 1.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. En prenant x pour infiniment petit principal, calculer les parties principales de

$$\begin{aligned} & \sin x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \operatorname{arc} \sin x, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} x, \quad \log(1+x), \quad 1 - \cos x, \quad x - \sin x, \\ & x - \operatorname{tang} x, \quad x - \operatorname{arc} \sin x, \quad x - \operatorname{arc} \operatorname{tang} x, \quad x - \log(1+x), \quad e^x - 1, \\ & \log \cos 2x, \quad \log \operatorname{tang} \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \quad x \sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}, \\ & \sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt{1+x^2} + x \sqrt{x \sin x \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{3}} - \frac{e^x}{3} [\log(1+x)]^3, \\ & \sin^3 \frac{3x}{2} \log(1+x) \operatorname{tang} 2x, \quad \sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[4]{x \operatorname{tang} x}, \quad \frac{2x + 3x^2 + 7 \log \cos \sqrt{x}}{\sin x \sqrt[3]{\operatorname{tang} x}}. \end{aligned}$$

2. Quel est l'ordre infinitésimal de $x^e - 1$?

(Il n'existe pas: il devrait être < 1 , mais supérieur à tout nombre plus petit que 1.)

3. Limites de

$$\begin{aligned} & \frac{\sin x}{1 - \cos x}, \quad \frac{\sin x}{\log(1-x)}, \quad \frac{\sin(\operatorname{arc} \operatorname{tang} x) - 2x - \frac{7}{2}x^3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{1+\frac{7}{2}x + \frac{7}{2}x^2}}, \\ & \frac{2\sqrt{1-x} \operatorname{tang}^2(x^2) + 3 \operatorname{arc} \operatorname{tang} 2x(1 - \cos x) \log(1-x)}{e^{1+x \sin x} - \frac{7}{2}x \operatorname{arc} \sin(x^3)}, \quad \text{pour } x = 0; \\ & \frac{e^{x \sin x} \left(\log \operatorname{tang} x - \frac{1}{2} \log 3 \right)}{(x-1) \cos 3x \left[\operatorname{tang}^2 x - 3 + \operatorname{tang} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right]}, \quad \text{pour } x = \frac{\pi}{3}; \\ & \frac{\log \left(\frac{x-a}{x-b} \right)}{\sin \left(\frac{x-a}{x^2-b} \right)}, \quad \text{pour } x = \infty. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ x ne peut tendre vers $-\infty$, car $x \cos \frac{x}{x^2-1}$ deviendrait négatif, ce qui ne doit pas être (n° 80).

4. Limites de

$$\frac{x^m + 1}{x^p + 1}, \quad \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}, \quad \frac{(x+1)\sqrt{x^4 - x^3 + 2}\sqrt[3]{3x+1}}{(x^2 - 2x+1)\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x^3 - x^2}},$$

$$\frac{\log(x+1)}{\log\left(\tan\frac{1}{x}\right)}, \quad \text{pour } x = \infty.$$

5. Limites de

$$x \sin \frac{1}{x}, \quad \left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)x, \quad x \log \frac{1+x}{1+mx}, \quad \text{pour } x = \infty;$$

$$(e^x - \cos x) \log \sin x, \quad \text{pour } x = 0; \quad (\log \tan x) \tan 2x, \quad \text{pour } x = \frac{\pi}{4}.$$

6. Limites de

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}, \quad \sqrt[3]{x^2-3} - \sqrt{x+1}, \quad 2\sqrt{x^3+2x-1} - \sqrt[4]{x^6+1},$$

$$x^p - \log x, \quad \text{pour } x = \infty; \quad \tan x - \tan 3x, \quad \text{pour } x = \frac{\pi}{2}.$$

7. Limites de

$$x^{\sin x}, \quad \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} - e\right]^x, \quad (\cot x)^{\sin x}, \quad \text{pour } x = 0;$$

$$(\tan x)^{\tan 2x}, \quad \text{pour } x = \frac{\pi}{2}; \quad (1 + \log \cos x)^{\cot x}, \quad \text{pour } x = 0.$$

CHAPITRE X.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Calculer la dérivée de $y = x^{x^x}$.

On pourrait calculer cette dérivée en passant par le logarithme, comme nous l'avons déjà fait dans des cas analogues. On peut aussi remarquer que y est une fonction composée. C'est ce que devient la fonction de trois variables $w = u^{v^w}$, quand on y remplace u, v, w par x . Appliquons alors la formule (4) du numéro 130. On a

$$\frac{\partial w}{\partial u} = v^w u^{v^w-1}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = u^{v^w} \log u \ v^w u^{v^w-1}, \quad \frac{\partial w}{\partial w} = u^{v^w} \log u \ v^w \log v;$$

d'où

$$y' = x^{x^x} x^{x^x-1} = x^{x^x+x} \log x = x^{x^x+x} (\log x)^2 = x^{x^x+c} \left[\frac{1}{x} + \log x + (\log x)^2 \right].$$

2. L'équation $x \left(\sin \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x^2}} \right) - ky = 0$ définit y comme fonction implicite de x . Calculer $\frac{dy}{dx}$. (E. P., 1909.)

Appliquons la formule (13) du numéro 135. Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sin \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x^2}} + x \left(-\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x^2}} \right)}{x \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} e^{\frac{y}{x^2}} \right) - k}.$$

On peut essayer de simplifier cette formule en tenant compte de l'équation proposée. Remplaçons au numérateur $\sin \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x^2}}$ par $k \frac{y}{x}$; il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-k \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y} e^{\frac{y}{x^2}}}{\cos \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} e^{\frac{y}{x^2}} - k} = \frac{\frac{y}{x} \left(-k - \cos \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} e^{\frac{y}{x^2}} \right)}{\cos \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} e^{\frac{y}{x^2}} - k} = \frac{y}{x}.$$

Comme on le voit, on arrive à une formule excessivement simple. On en peut déduire d'ailleurs, par intégration (n° 188), $\frac{y}{x} = \text{const.}$ Ce résultat pouvait être prévu. En effet, l'équation proposée est homogène. Si l'on pose $\frac{y}{x} = z$, elle peut s'écrire

$$\sin z - e^z - k z = 0,$$

d'où l'on tire nécessairement $z = \text{const.}$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer les dérivées partielles du premier et du second ordre des fonctions

$$\begin{aligned} z &= e^x \cos y, & u &= e^x \sin y; & z &= e^{x^2+y^2} \cos 2xy, & u &= e^{x^2+y^2} \sin 2xy; \\ z &= \sin \frac{x}{x^2+y^2} \operatorname{ch} \frac{y}{x^2+y^2}, & u &= -\cos \frac{x}{x^2+y^2} \operatorname{sh} \frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Vérifier les identités

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre n de la fonction

$$\sin x \sin y \sin z.$$

3. Calculer les dérivées des fonctions $x^{\log x}$, $(\sin x)^{\sin x}$, $(x \log x)^{x^e}$.

4. Calculer la valeur de la fonction $x^y \sin z$, pour $x = e$, $y = \pi$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, en prenant les valeurs approchées $e = 2,7$, $\pi = 3,1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$.

Calculer une limite supérieure de l'erreur commise.

(Pour l'erreur, appliquer la formule des accroissements finis, en prenant $h = 2,7 - e$, $k = 3,1 - \pi$, $e = 0,7 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cf. *Leçons*, n° 218.)

5. Vérifier l'identité d'Euler sur les fonctions homogènes suivantes :

$$x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3, \quad \operatorname{arc tang} \frac{y}{x}, \quad \log \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}, \quad \sin \frac{xy}{x^3+y^3+z^3}.$$

6. Dérivées première et seconde de la fonction y définie par

$$(x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad x^2+y^2 = \left(\operatorname{arc tang} \frac{y}{x} \right)^2, \quad x^2+y^2 = e^{\operatorname{arc tang} \frac{y}{x}}.$$

CHAPITRE XI.

DIFFÉRENTIELLES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Étant données les formules*

$$(1) \quad \sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon + \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) \sin \varepsilon,$$

$$(2) \quad \cos \beta \sin(l + \psi) = \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) \cos \varepsilon,$$

$$(3) \quad \cos \beta \cos(l + \psi) = \cos \delta \cos(\alpha + \lambda),$$

qui servent à calculer les coordonnées équatoriales α et δ d'un astre à l'époque t en fonction de ses coordonnées écliptiques l et β à l'époque 0, calculer les accroissements $d\alpha$ et $d\delta$ subis par les premières pendant un petit intervalle de temps dt , sachant que l'on a

$$(4) \quad \psi = 50'',36923t, \quad \lambda = 14'',673t, \quad \varepsilon = 23^{\circ}27'31'',83.$$

(Corrections de précession.)

Nous observons d'abord que ces trois équations sont compatibles, comme on le voit en élevant au carré et ajoutant.

Pour un accroissement dt de t , ψ et λ subissent les accroissements $d\psi = a dt$ et $d\lambda = b dt$, en appelant a et b les coefficients de t dans ψ et λ . Les angles ε , β , l restent fixes. Pour calculer $d\alpha$ et $d\delta$, nous allons différentier totalement (1), (2), (3), en tenant compte des hypothèses précédentes. Nous aurons trois équations linéaires à deux inconnues, qui devront être compatibles :

$$(5) \quad 0 = \cos \varepsilon \cos \delta d\delta + \sin \varepsilon [\sin(\alpha + \lambda) \sin \delta d\delta - \cos \delta \cos(\alpha + \lambda)(d\alpha + d\lambda)],$$

$$(6) \quad \cos \beta \cos(l + \psi) d\psi \\ = \sin \varepsilon \cos \delta d\delta - \cos \varepsilon [\sin(\alpha + \lambda) \sin \delta d\delta - \cos \delta \cos(\alpha + \lambda)(d\alpha + d\lambda)],$$

$$(7) \quad -\cos \beta \sin(l + \psi) d\psi = -\cos(\alpha + \lambda) \sin \delta d\delta - \cos \delta \sin(\alpha + \lambda)(d\alpha + d\lambda).$$

Les combinaisons linéaires (5) $\cos \varepsilon +$ (6) $\sin \varepsilon$ et (5) $\sin \varepsilon +$ (6) $\cos \varepsilon$

nous donnent immédiatement

$$(8) \quad \cos \hat{z} d\hat{z} = \cos \hat{\gamma} \cos(t + \psi) \sin \varepsilon d\psi,$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \sin(\alpha + \lambda) \sin \hat{z} d\hat{z} - \cos \hat{z} \cos(\alpha + \lambda) (dx + d\lambda) \\ = -\cos \hat{\gamma} \cos(t + \psi) \cos \varepsilon d\psi; \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (3),

$$(10) \quad d\hat{z} = \sin \varepsilon \cos(\alpha + \lambda) d\psi,$$

$$(11) \quad dx = -d\lambda - [\cos \varepsilon - \tan \hat{z} \sin \varepsilon \sin(\alpha + \lambda)] d\psi.$$

En portant dans (7), on doit obtenir une identité. Effectivement, en faisant le calcul, on retombe sur (2).

Les formules (10) et (11) résolvent le problème. Si α n'est pas très petit et si t n'est pas très grand, on peut les simplifier un peu, en négligeant $\hat{\lambda}$ vis-à-vis de α : ce qui donne

$$(12) \quad d\hat{z} = n \cos \alpha dt, \quad dx = (m + n \tan \hat{z} \sin \alpha) dt,$$

en posant

$$(13) \quad \begin{cases} n = a \sin \varepsilon & = 06'', 05150, \\ m = a \cos \varepsilon - b & = \{6', 059\} 31. \end{cases}$$

2. Étant données les équations

$$(1) \quad x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta = \omega,$$

$$(2) \quad x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi + z \sin \theta = \frac{\partial \omega}{\partial \theta},$$

$$(3) \quad -x \sin \theta \sin \varphi + y \sin \theta \cos \varphi = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi},$$

où ω désigne une fonction donnée de θ, φ , on imagine que l'on élimine θ, φ entre elles. L'équation obtenue définit z comme fonction de x et de y . Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Nous allons différentier nos trois équations. Nous éliminerons $d\theta$ et $d\varphi$; nous obtiendrons de la sorte une relation linéaire et homogène en dx, dy, dz , qui nous donnera les dérivées demandées.

Différentions (1) :

$$\begin{aligned} dx \sin \theta \cos \varphi + dy \sin \theta \sin \varphi + dz \cos \theta \\ + (x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi + z \sin \theta) d\theta \\ - (-x \sin \theta \sin \varphi + y \sin \theta \cos \varphi) d\varphi = d\omega; \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (2) et (3),

$$dx \sin \theta \cos \varphi + dy \sin \theta \sin \varphi + dz \cos \theta = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} d\theta - \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} d\varphi = d\omega,$$

Mais $d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} d\varphi$. Notre équation se réduit donc à

$$(4) \quad dx \sin \theta \cos \varphi - dy \sin \theta \sin \varphi - dz \cos \theta = 0.$$

Les différentielles $d\theta$, $d\varphi$ se sont éliminées d'elles-mêmes et nous avons

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\tan \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\tan \theta \sin \varphi.$$

3. *Étant donnée l'expression $(y^2 - x^2 + 2xy)dx + (y^2 - x^2 - 2xy)dy$, par quelle fonction de $(x^2 + y^2)$ faut-il la multiplier pour qu'elle devienne une différentielle totale exacte?*

Soit λ le facteur cherché. On doit avoir (n° 141)

$$\frac{\partial}{\partial y} [\lambda (y^2 - x^2 + 2xy)] = \frac{\partial}{\partial x} [\lambda (y^2 - x^2 - 2xy)],$$

ou, en appelant λ' la dérivée de λ par rapport à $(x^2 + y^2)$,

$$\lambda' y (y^2 - x^2 + 2xy) + \lambda (y - x) = \lambda' x (y^2 - x^2 - 2xy) - \lambda (x + y),$$

$$\lambda' (x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3) + 2\lambda (x + y) = 0,$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2 \frac{x + y}{x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3}.$$

Si λ est une fonction de $x^2 + y^2$, le second membre ne doit plus dépendre que de cette même quantité. Effectivement, le dénominateur peut s'écrire $(x + y)(x^2 + y^2)$, et il reste l'équation

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{2}{x^2 + y^2};$$

d'où

$$\log \lambda = -2 \log (x^2 + y^2) + \log c \quad (c = \text{const.});$$

$$\lambda = \frac{c}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Vérifions *a posteriori* que l'expression

$$\frac{(y^2 - x^2 + 2xy)dx + (y^2 - x^2 - 2xy)dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

est bien la différentielle totale d'une fonction z de x et y , que nous allons calculer. On doit avoir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

d'où

$$z = \int \frac{(Y^2 - x^2 + 2xY) dx}{(x^2 + Y^2)^2} + Y,$$

Y désignant une certaine fonction de x .

Calculant l'intégrale du second membre par les méthodes habituelles (Chap. XIII), on trouve

$$z = \frac{x - Y}{x^2 + Y^2} + Y.$$

Portons dans

$$\frac{\partial z}{\partial Y} = \frac{Y^2 - x^2 + 2xY}{(x^2 + Y^2)^2};$$

$$Y' = \frac{-(x^2 + Y^2) + 2Y(x - Y)}{(x^2 + Y^2)^2} = \frac{Y^2 - x^2 + 2xY}{(x^2 + Y^2)^2},$$

$$Y' = 0,$$

Donc $Y = \text{const.}$ et

$$z = \frac{x - Y}{x^2 + Y^2} = \text{const.}$$

EXERCICES PROPOSÉS

1. Calculer les différentielles totales des fonctions

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad \arctan \frac{y}{x}, \quad (x^2 + y^2)e^{\arctan \frac{y}{x}}, \quad \arctan \frac{x - y}{1 + xy} + z - xy z.$$

2. Que devient l'expression (1)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

après le changement de variables

$$x = \varphi \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \varphi \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \varphi \cos \theta?$$

3. Que deviennent les expressions

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{et} \quad dX = x dy - y dx,$$

après le changement de variables

$$x = \varphi \cos \omega, \quad y = \varphi \sin \omega?$$

Dans cette expression, ds^2 , dx^2 , dy^2 , dz^2 sont les carrés des différentielles ds , dx , dy , dz , c'est-à-dire $(ds)^2$, $(dx)^2$, $(dy)^2$, $(dz)^2$.

4. Que devient l'expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

quand on pose

$$x = \frac{1-x^2}{x-z}, \quad y = i \frac{1-x^2}{x-z}, \quad z = \frac{x-z}{x-z}.$$

5. L'équation $x^3y^3z^3 + x^2yz^6 - x^3y^7z^2 = 1$ est vérifiée pour $x=y=z=1$.

Calculer approximativement la valeur de z , voisine de l'unité, qui y satisfait pour $x=0,0001$, $y=1,0001$.

6. Même question pour l'équation

$$\left(\sin \frac{\pi}{2x}\right)^3 + \cos \frac{\pi z}{2} = x^x.$$

7. On reprend les formules de l'exercice résolu n° 1, en y faisant $\lambda = \psi = 0$. On donne à l et z les accroissements $dl = -17''$, $27 \sin \Omega$, $dz = 9,24 \cos \Omega$, sans changer β . Calculer les accroissements dx et $d\delta$ qui en résultent. (*Corrections de nutation.*)

8. Étant donné une fonction ω de x, y, z , on fait le changement de variables

$$x' = x + y + z, \quad y' = x^2 + y^2 + z^2, \quad z' = x^3 + y^3 + z^3.$$

Calculer $\frac{\partial \omega}{\partial x'}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y'}$, $\frac{\partial \omega}{\partial z'}$, en fonction de $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$, $\frac{\partial \omega}{\partial z}$.

9. Que devient l'équation aux dérivées partielles

$$(x+y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x-y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

par le changement de variables $x^2 - y^2 = 2xy = u$, $y = v$? En déduire toutes les fonctions qui vérifient cette équation.

10. Même question pour l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ et le changement de variables $x + y = u$, $x - y = v$.

11. Que deviennent les expressions

$$\Delta \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2},$$

à la suite du changement de variables de l'exercice n° 2?

12. Reprenant les équations (1), (2), (3) de l'exercice résolu n° 2, calculer les dérivées partielles premières et secondes de z , θ , φ par rapport à x et y .

13. Par quelle fonction faut-il multiplier $(\tan x + \tan y)(dx + dy)$ pour obtenir une différentielle exacte? (Poser $x + y = u$.)

14. Par quelle fonction de $x + y + z$ faut-il multiplier l'expression

$$(y + z)yz \, dx + (z + x)zx \, dy + (x + y)xy \, dz,$$

pour obtenir une différentielle exacte?

15. Par quelle fonction faut-il multiplier l'expression

$$(y + z) \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right) - dy - dz,$$

pour obtenir une différentielle exacte? (Poser $y + z = u$, $xy = v$.)

CHAPITRE XII.

INTÉGRALES DÉFINIE ET INDÉFINIE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Étant donnée l'intégrale $I = \int_u^v f(x) dx$, où u et v désignent deux fonctions données d'un paramètre t , calculer la dérivée $\frac{dI}{dt}$.

Cette question est une généralisation de celle qui a été traitée au n° 118. Nous allons, pour la résoudre, procéder d'une manière analogue. Donnons à t un accroissement Δt et soient Δu , Δv , ΔI les accroissements correspondants de u , v , I . On a

$$I + \Delta I = \int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} f(x) dx = \int_{u+\Delta u}^u + \int_u^v + \int_v^{v+\Delta v};$$

d'où

$$\Delta I = \int_{u+\Delta u}^u + \int_v^{v+\Delta v} = \int_v^{v+\Delta v} - \int_u^{u+\Delta u}.$$

Appliquons la formule de la moyenne (n° 113) :

$$\Delta I = \Delta v f(v + \theta \Delta v) - \Delta u f(u + \theta' \Delta u) \quad (\theta = 0, \theta' = 1);$$

d'où

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} f(v + \theta \Delta v) - \frac{\Delta u}{\Delta t} f(u + \theta' \Delta u).$$

Supposons maintenant que Δt tende vers zéro; nous aurons, à la limite, en admettant l'existence des dérivées de u et v ,

$$\frac{dI}{dt} = f(v) \frac{dv}{dt} - f(u) \frac{du}{dt}.$$

Remarque. — Si l'on suppose $u = \text{const.} = a$, $v = t$, on retrouve la formule du n° 118.

2. Différentiation sous le signe $\int$. — Calculer la dérivée par

rapport à t de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x, t) dx,$$

a et b désignant deux constantes et $f(x, t)$ une fonction donnée des deux variables x et t .

Donnons à t l'accroissement Δt . Nous avons

$$(1) \quad \Delta I = \int_a^b f(x, t + \Delta t) dx - \int_a^b f(x, t) dx,$$

d'où (n° 143, 3°)

$$(2) \quad \frac{\Delta I}{\Delta t} = \int_a^b \left[\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \right] dx.$$

Faisons tendre Δt vers zéro, nous avons à la limite ⁽¹⁾

$$(3) \quad \frac{dI}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx.$$

3. *Limite, pour n infini, de $\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots 2n}$.*

Cette expression peut s'écrire

$$P_n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Pretons son logarithme

$$\log P_n = \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \log \left(1 + \frac{n}{n}\right)}{n},$$

(1) Ceci suppose toutefois la propriété suivante : si la fonction $g(x, t)$ tend vers $g(x)$ pour $t \rightarrow 0$, l'intégrale $I_t = \int_a^b g(x, t) dx$ tend vers $I_0 = \int_a^b g(x) dx$. Effectivement, supposons que $|t| = \epsilon$, entraîne, quel que soit x entre a et b ,

$$|g(x, t) - g(x)| = \epsilon.$$

On aura

$$|I_t - I_0| = \left| \int_a^b [g(x, t) - g(x)] dx \right| \leq \epsilon(b-a),$$

d'après la définition même de l'intégrale définie; d'où, etc.

dont la limite n'est autre que la valeur moyenne de la fonction $\log x$ dans l'intervalle $(1, 2)$, (n° 146). On a donc

$$\lim (\log P_n) = \int_1^2 \log x \, dx = [x(\log x - 1)]_1^2 = 2 \log 2 - 1 = \log \frac{4}{e};$$

par suite, la limite de P_n est $\frac{4}{e}$.

4. Calculer à $\frac{1}{1000}$ près l'intégrale définie

$$I = \int_0^1 \sin(x^2) \, dx.$$

Cette intégrale ne peut être calculée par la méthode des primitives. Appliquons-lui la méthode des trapèzes.

Cherchons d'abord quelle valeur il faut prendre pour n pour que l'erreur soit inférieure à $\frac{1}{2000}$. Puis nous ferons nos calculs auxiliaires de façon qu'ils n'entraînent pas une erreur supérieure à $\frac{1}{2000}$. Nous serons alors assurés d'une erreur totale plus petite que $\frac{1}{1000}$.

La dérivée seconde de $\sin(x^2)$ est $2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$. Si l'on remarque que sa dérivée est négative dans l'intervalle $\left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$, son maximum est 2 et son minimum est

$$2\cos 1 - 4\sin 1 > 2\cos \frac{\pi}{3} - 4\sin \frac{\pi}{3} = 1 - 2\sqrt{3} \approx -\frac{5}{2}.$$

Une limite supérieure de sa valeur absolue est donc

$$M = \frac{5}{2}.$$

Dès lors, déterminons h par l'inégalité (n° 130)

$$\frac{5}{2} \frac{h^2}{4} < \frac{1}{2000},$$

ou

$$n^2 = \frac{1000}{h^2} = 41, \dots$$

Le plus petit nombre entier vérifiant cette inégalité est $n = 7$. Nous prendrons donc (n° 130)

$$I = \frac{1}{7} \left(\frac{\sin 1}{2} + \sin \frac{1}{49} + \sin \frac{4}{49} + \sin \frac{9}{49} + \sin \frac{16}{49} + \sin \frac{25}{49} + \sin \frac{36}{49} \right).$$

Calculons avec 2 décimales chaque terme de la parenthèse, mais en

la dernière s'il y a lieu, de façon à avoir une erreur moindre que $\frac{1}{200}$, ce qui nous donne pour la parenthèse une erreur plus petite que $\frac{7}{200}$ et une erreur plus petite que $\frac{1}{200}$ pour 1.

Si nous consultons une Table de sinus naturels, nous constatons que, pour avoir deux décimales il suffit de calculer les arcs en grades à 10^e près. Or, on a

1.....	$63,6620 = 63,7$	$\sin 1 = 0,84$
d'où		$\frac{1}{2} \sin 1 = 0,42$
$\frac{1}{49}$	$1,2999 = 1,3$	$\sin \frac{1}{49} = 0,02$
$\frac{4}{49}$	$5,1969 = 5,2$	$\sin \frac{4}{49} = 0,08$
$\frac{9}{49}$	$11,6930 = 11,7$	$\sin \frac{9}{49} = 0,18$
$\frac{16}{49}$	$20,7875 = 20,8$	$\sin \frac{16}{49} = 0,32$
$\frac{25}{49}$	$32,4805 = 32,5$	$\sin \frac{25}{49} = 0,49$
$\frac{36}{49}$	$46,7719 = 46,8$	$\sin \frac{36}{49} = 0,67$
		0,18

Finalement

$$1 = 0,31.$$

Pour nous rendre compte de la valeur de la méthode de Simpson, appliquons-la en prenant seulement $n = 2$. Nous avons

$$1 = \frac{1}{6} \left(1 \sin \frac{1}{4} + \sin 1 \right) = \frac{1,84}{6} = 0,31.$$

On retrouve le même résultat.

Autre méthode (n° 132). — Développons $\sin(x^2)$ en série entière; nous avons, quel que soit x (n° 107),

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \dots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(4n+4)!} + \dots$$

Intégrons terme à terme (n° 102) :

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 11} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(4n+1)!(4n+3)} + \dots$$

Prenons, par exemple, les trois premiers termes. L'erreur commise sera

négative et inférieure à

$$\frac{1}{7!11} = \frac{1}{7!600} < \frac{1}{7!600} = \frac{4}{3} \frac{1}{100000}.$$

Prenons ensuite

$$\frac{1}{3} = 0,333333,$$

$$\frac{1}{4^2} = 0,023809,$$

$$\frac{1}{5!11} = 0,000757.$$

Nous avons trois erreurs $< \frac{1}{10^5}$. L'erreur totale est donc certainement inférieure à

$$\frac{4}{3} \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{3} \frac{1}{10^5} < \frac{2}{10^5}.$$

On obtient de la sorte

$$1 = 0,310281,$$

et l'on peut écrire

$$1 = 0,3102 \text{ par défaut,} \quad 1 = 0,3103 \text{ par excès.}$$

Comme on le voit, cette seconde méthode est plus avantageuse que la première.

5. Nature de l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Le produit $x^m e^{-x^2}$ tend vers zéro, quel que soit m . Donc, l'intégrale proposée est convergente (n° 153). Elle converge plus rapidement que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^m}$, si grand que soit m . On démontre que sa valeur est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (Cf. *Leçons*, t. II, p. 562-563.)

6. Nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x} dx}{x^2 \log x}$ ($x > 0$).

La fonction sous le signe $\int$ devient infinie aux deux bornes de l'intégrale. Considérons d'abord l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx \sqrt{1-x}}{x^2 \log x}$. Elle est de même

nature que $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x} dx}{\log x}$. Or, si nous posons $1-x=h$, nous avons

$$\frac{\sqrt{1-x}}{\log x} = \frac{\sqrt{h}}{\log(1-h)} = \frac{\sqrt{h}}{-h - \frac{h^2}{2} - \dots}.$$

Le produit $\frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{\log x}$ a pour limite -1 , quand h tend vers zéro. Donc (n° 434) l'intégrale a même nature que $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; c'est-à-dire qu'elle est convergente.

Considérons maintenant l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-x} dx}{x^z \log x}$. Elle est de même nature que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^z \log x}$. Le produit $x^z f(x)$ tend vers zéro; donc si $z < 1$, l'intégrale a un sens. Si $z = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), le produit $x f(x) = \frac{1}{x^\varepsilon \log x}$ augmente indéfiniment (n° 96). Donc l'intégrale n'a pas de sens. Enfin, si $z = 1$, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \log x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(\log x)}{\log x} = (\log |\log x|)_{\frac{1}{2}}^0 = \log \left| \log \frac{1}{2} \right| - \log |\log 0| = -\infty.$$

En résumé, l'intégrale n'a de sens que si $z < 1$.

7. Nature de l'intégrale $\int_0^x \sin(x^2) dx$.

La fonction sous le signe $\int$ change indéfiniment de signe; nous ne pouvons donc pas utiliser les critères du n° 433. Nous allons nous livrer à une étude directe de l'intégrale. A cet effet, nous allons la comparer à la série alternée dont les termes successifs sont obtenus en décomposant l'intégrale au moyen des valeurs de x qui font changer le signe de $\sin(x^2)$. Ces valeurs sont $\sqrt{k\pi}$, k prenant toutes les valeurs entières positives. Nous aurons donc la série alternée

$$u_0 - u_1 + u_2 - \dots + u_{2n} - u_{2n+1} + \dots$$

en posant

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{p}}} \sin(x^2) dx, \\ u_1 = - \int_{\sqrt{\frac{\pi}{p}}}^{\sqrt{\frac{2\pi}{p}}} \sin(x^2) dx, \\ \dots\dots\dots \\ u_p = (-1)^p \int_{\sqrt{\frac{p\pi}{p}}}^{\sqrt{\frac{(p+1)\pi}{p}}} \sin(x^2) dx, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Je dis que la suite (u_p) est décroissante.

Pour le prouver commodément, nous allons ramener toutes nos intégrales à avoir les mêmes bornes. Il suffit pour cela, de poser

$$(2) \quad x = \sqrt{p\pi - y}.$$

Nous avons alors (n° 138)

$$(3) \quad u_p = (-1)^p \int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{p\pi}}} \sin(\sqrt{p\pi - y}) \frac{dy}{2\sqrt{p\pi - y}} = \int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{p\pi}}} \frac{\sin y dy}{2\sqrt{p\pi - y}}.$$

Lorsque p augmente, la quantité sous le signe $\int$ diminue: donc l'intégrale diminue⁽¹⁾.

Je dis maintenant que u_p tend vers zéro, pour p infini. En effet, d'après la formule de la moyenne (n° 143), on peut écrire

$$(4) \quad u_p = \frac{\pi}{2\sqrt{p\pi}} \frac{\sin \eta_1}{\sqrt{p\pi - \eta_1}} \quad \text{avec } 0 \leq \eta_1 < \frac{\pi}{2\sqrt{p\pi}}.$$

Quand p augmente indéfiniment, $\frac{\pi}{2\sqrt{p\pi}}$ tend vers zéro: donc, a fortiori, u_p .

Finalement, notre série alternée est convergente (n° 148). Soit S sa somme. Je dis que $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$ a pour limite S , quand x tend vers $+\infty$.

⁽¹⁾ Nous admettons ici la propriété évidente qui suit: Si dans l'intervalle (a, b) , on a constamment $f(x) > g(x)$, on a aussi $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$. Cela revient, en effet, à $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx > 0$; or ce qui est évident, puisque, pour cette intégrale, tous les éléments de la somme Σ sont positifs. Ajoutons que nous avons supposé implicitement $a < b$.

En effet, soit p le quotient à une unité près par défaut de π^2 par π . Si S_p désigne la somme des p premiers termes de la série, on a (n° 113)

$$(5) \quad \int_0^{\pi} = \int_0^{\sqrt{p\pi}} + \int_{\sqrt{p\pi}}^{\pi} = S_p + \int_{\sqrt{p\pi}}^{\pi}.$$

Mais

$$\left| \int_{\sqrt{p\pi}}^{\pi} \right| = \left| \int_{\sqrt{p+1}\pi}^{\sqrt{p+1}\pi} \right| = u_p,$$

qui tend vers zéro. Donc $\int_0^{\pi} - S_p$ tend vers zéro et, par suite, $\int_0^{\pi}$ tend vers S , limite de S_p .

Remarques. — I. On a

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) d(-x) = - \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = -S.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} = 2S.$$

II. Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

jouent un rôle important dans certaines questions de Physique et portent le nom d'*intégrales de Fresnel*. On démontre qu'elles ont toutes deux pour valeur $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. *Généralisation de la formule de la moyenne.* — Si, dans l'intervalle (a, b) , la fonction $g(x)$ garde un signe constant, on a

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx \quad (c \text{ compris entre } a \text{ et } b).$$

2. Appliquer la formule précédente à l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, en prenant

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et supposant $k < 1$.

3. Étudier les intégrales

$$\int_0^x f(t) dt, \quad \int_{-x}^x f(t) dt,$$

quand la fonction $f(t)$ est paire ou impaire.

 4. Si $f(x)$ est périodique et de période p , on a, quel que soit x ,

$$\int_x^{x+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt = P, \quad \int_x^{x+kp} f(t) dt = kP \quad (k \text{ entier}).$$

L'intégrale $\int_a^b$ peut toujours être ramenée, à un multiple de P près, à être égale à $\int_z^{\beta}$, où z et β sont compris entre 0 et p ou entre $-\frac{p}{2}$ et $+\frac{p}{2}$.

 5. Calculer la dérivée par rapport à t de l'intégrale

$$\int_t^{t+\pi} \sin^2 x dx,$$

6. Calculer les intégrales de la forme

$$\int_0^1 \cos x \cdot x^m dx, \quad \int_0^1 \sin x \cdot x^m dx,$$

en prenant les dérivées successives de

$$\int_0^1 \cos tx dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \sin tx dx$$

par rapport à t .

7. Calculer la limite de

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

pour $n = \infty$, au moyen de la valeur moyenne d'une certaine fonction.

8. Calculer la limite vers laquelle tend la moyenne arithmétique des diagonales d'un polygone régulier de rayon 1, lorsque le nombre de ses côtés augmente indéfiniment.

9. Calculer à $\frac{1}{100}$ près les intégrales

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx.$$

10. Reconnaître la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-x-1}}{x^2} dx, \quad \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\log x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\arctan x},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-1)}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)\log x}}.$$

11. Si $f(x)$ est une fonction constamment positive, décroissante et tendant vers zéro pour $x = +\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) \sin x dx$ est convergente.

(Raisonnement comme à l'exercice résolu n° 7.)

12. Nature des intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin x dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

CHAPITRE XIII.

CALCUL DES QUADRATURES.

EXERCICES RESOLUS.

1. Calculer

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

Nous avons (n° 463) ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} I &= 5 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x+1)^2} + 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\ &= 8 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x+1} - 3 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} + 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x+1) dx}{x^2+x+1} \\ &= -8 \left[\frac{1}{(x+1)^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} + 4 \left(\frac{1}{x+1} \right)_0^{\frac{1}{2}} + 8 (\log |x+1|)_0^{\frac{1}{2}} \\ &= 3 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} + 4 [\log (x^2+x+1)]_0^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Reste à calculer

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Le trinôme x^2+x+1 s'écrit

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Posons donc (n° 464)

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

---

(1) Nous désignons par la notation $[f(x)]_{x_0}^{x_1}$ la quantité $f(x_1) - f(x_0)$.

Nous avons

$$J = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^0 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} dt}{3(1+t^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^0 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan t + \frac{t}{1+t^2} \right) \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^0 \quad (\text{n}^\circ 164).$$

Finalement

$$I = -\frac{15}{9} - 4 + 8 \log 2 - \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - 4 \log \frac{3}{4} = -4.95 - 4 \log 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6};$$

$$I = -4,32806.$$

2. Calculer

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}} dx.$$

Posons (n° 163)

$$x+1 = t^6, \quad dx = 6t^5 dt.$$

On a

$$\begin{aligned} &= 6 \int \frac{t+1}{t-1} t^5 dt = 6 \int \left(t^5 - 2t^4 + 2t^3 - 2t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{t-1} \right) dt \\ &= t^6 + \frac{12t^5}{5} - 3t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 12t + 12 \log(t-1), \\ I &= x+1 + \frac{12}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + 3(x+1)^{\frac{2}{3}} + 4(x+1)^{\frac{1}{2}} + 6(x+1)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + 12(x+1)^{\frac{1}{6}} + 12 \log(\sqrt[6]{x+1}-1). \end{aligned}$$

3. L'équation $x^3 + y^3 - xy = 0$ définit y comme fonction implicite de x . On considère, dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ pour x , la branche y définie par la plus grande racine. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx.$$

L'équation proposée représente, en coordonnées cartésiennes, une courbe unicursale (I, II). Si l'on pose, en effet, $y = tx$, on en déduit

$$x = \frac{t}{1-t^3}, \quad y = \frac{t^2}{1-t^3}, \quad dx = \frac{(1-t^3)dt}{(1+t^3)^2}.$$

Moyennant quoi, notre élément différentiel devient

$$\frac{(1-t^3)dt}{t(1+t^3)(1-t-t^2)}.$$

Il nous faut chercher maintenant dans quel intervalle il faut varier t pour que x croisse de 0 à $\frac{1}{2}$, y prenant en outre pour valeurs successives les racines supérieures de l'équation proposée. Si l'on remarque que, pour une valeur donnée positive de x , $y = tx$ est d'autant plus grand que t est plus grand, on voit qu'il faut prendre pour intervalle de variation de t celui qui comprend les racines supérieures de l'équation

$$xt^3 - t - x = 0,$$

quand x croît de 0 à $\frac{1}{2}$. Or, pour $x=0$, on a les racines $t=0$, $t=\pm\infty$.

Pour $x=\frac{1}{2}$, on a les racines

$$t=1, \quad t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

dont la plus grande est 1. Nous devons donc prendre pour intervalle d'intégration l'intervalle $(+\infty, 1)$ ⁽¹⁾; et notre intégrale s'écrit

$$I = \int_{+\infty}^1 \frac{(1-t^3)dt}{t(1+t^2)(1-t+t^2)}.$$

Suivant la méthode générale des nos 163 et 164., nous avons ⁽²⁾

$$\begin{aligned} I &= \left\{ \log t + \log(1+t^2) + \operatorname{arc tang} t - \sqrt{3} \operatorname{arc tang} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \log \left[(t^2-t+1) \right] \right\}_{+\infty}^1 \\ &= \left[\log \frac{t(1+t^2)}{(t^2-t+1)^2} \right]_{+\infty}^1 + (\operatorname{arc tang} t)_{+\infty}^1 - \sqrt{3} \left(\operatorname{arc tang} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right)_{+\infty}^1. \end{aligned}$$

Le premier terme est égal à $\log 2$, car, pour $t=+\infty$, la fraction sous le signe $\log$ est égale à 1, puisque son numérateur et son dénominateur admettent tous deux t^3 pour partie principale (no 126).

Le second terme vaut $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$.

Le troisième vaut $-\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

⁽¹⁾ On arrive au même résultat, et d'une manière en quelque sorte moins abstraite, en construisant la courbe. Parmi les trois arcs compris entre les deux droites $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, on prend le plus élevé et l'on voit immédiatement comment varie t quand le point (x, y) décrit cet arc, qui est ici la moitié de la boucle comprise entre Oy et la première bissectrice. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

⁽²⁾ Le lecteur est prié de faire les calculs.

Nous avons donc

$$I = \log 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 0,1307 - 0,7854 + 1,8138 = 1,1591.$$

4. Calculer $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x + 1} dx$.

Employons la méthode de réduction (n° 168) ⁽¹⁾. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x + 1} &= \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} - \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}}, \\ \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int \left(x - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \\ &= \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}. \end{aligned}$$

Calculons $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$. On a

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Posons dès lors

$$x - \frac{1}{2} = t.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}} \\ &= \log \left(t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} \right) = \log \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right). \end{aligned}$$

Nous avons maintenant à calculer $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 - x + 1}}$. Posons (n° 168) $x + 1 = \frac{1}{t}$; l'intégrale devient $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t - 1}}$ ⁽²⁾, qui se déduit de (1) par le changement de x en $-t$ et a, par conséquent, pour valeur

$$\log \left(-t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t - 1} \right) = \log \left[\frac{x - 1}{2(1 + x)} + \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{1 + x}} \right].$$

⁽¹⁾ Nous conseillons au lecteur, à titre d'exercice et pour comparer la rapidité des deux méthodes, d'utiliser aussi le changement de variable $\sqrt{x^2 - x + 1} = x + t$ n° 167.

⁽²⁾ En supposant, pour fixer les idées, $t > 0$, c'est-à-dire $x < -1$.

Finalement, nous avons

$$I = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \log \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1} \right) + \log \left(\frac{\frac{x-1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1}}{1-x} \right).$$

5. Calculer $I = \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ (E. P., 1911).

Les racines du radical sont réelles. Posons donc (n° 167)

$$\frac{x-a}{b-x} = t^2, \quad x = \frac{a+bt^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2(b-a)t dt}{(1+t^2)^2}, \quad b-x = \frac{b-a}{1+t^2}.$$

Lorsque x croît de a à b , t croît de 0 à $+\infty$. Nous avons alors

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2(b-a)(a+bt^2)t dt}{(1+t^2)^3 t \frac{(b-a)}{1+t^2}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{(a+bt^2) dt}{(1+t^2)^2}.$$

Posons (n° 164) $t = \tan \varphi$; il vient

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a(1 + \cos 2\varphi) + b(1 - \cos 2\varphi)] d\varphi,$$

$$I = (a+b) \frac{\pi}{2} + \frac{a-b}{2} (\sin 2\varphi) \frac{\pi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi(a+b)}{2}.$$

6. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-e \cos x)^3}$.

Observons d'abord qu'il est nécessaire de supposer $e < 1$ pour que l'intégrale ait un sens (n° 154). Cela étant admis, posons (n° 169)

$$\tan \frac{x}{2} = t.$$

Nous avons

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)^2 dt}{[t^2(1+e) + 1-e]^3}.$$

Faisons maintenant le changement de variable $t = mu$, en posant, pour abréger l'écriture, $m = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$. Il vient

$$I = \frac{2m}{(1-e)^3} \int_0^{+\infty} \frac{(1+m^2 u^2)^2 du}{(1+u^2)^3}.$$

Posons (n° 164) $u = \tan \varphi$; nous avons

$$I = \frac{2m}{(1-e)^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi + m^2 \sin^2 \varphi)^2 d\varphi.$$

Or,

$$\begin{aligned} & (\cos^2 \varphi + m^2 \sin^2 \varphi)^2 \\ &= \frac{1}{4} [1 + m^2 + (1 - m^2) \cos 2\varphi]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[(1 + m^2)^2 + 2(1 - m^2) \cos 2\varphi + \frac{(1 - m^2)^2}{2} (1 + \cos 4\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$I = \frac{m}{2(1-e)^3} \left[(1 + m^2)^2 + \frac{(1 - m^2)^2}{2} \right] \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \left(1 + \frac{e^2}{2} \right)}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

7. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$ (E. P., 1912).

La fonction sous le signe $\int$ admet pour période $\frac{\pi}{2}$. Ceci suggère l'idée de poser (cf. n° 169) $\tan 2x = t$. Effectivement, on peut écrire

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \sin^4 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} (\sin 2x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, quand x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $2x$ croît de 0 à π ; t croît de 0 à $+\infty$; puis de $-\infty$ à 0. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{2 + t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{2 + t^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2 + t^2} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{2} \left(\arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \right)_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

8. Calculer l'intégrale définie $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - (e^x - 1)^2}}$.

Pour faire disparaître le radical, sans en introduire d'autre, faisons le changement de variable

$$(1) \quad e^x - 1 = 2 \sin t,$$

On tire de cette équation

$$x = \log(2 \sin t + 1), \quad dx = \frac{2 \cos t dt}{2 \sin t + 1};$$

puis

$$(2) \quad \sqrt{4 - (e^x - 1)^2} = \sqrt{4 \cos^2 t} = \pm 2 \cos t.$$

Lorsque x varie de 0 à $-\pi$, $\sin t$ varie de 1 à $\frac{1-e}{2e}$; nous pouvons faire varier t de $\frac{\pi}{2}$ à $\arcsin \frac{1-e}{2e} = 47^{\circ}6,947$. Dans cet intervalle, $\cos t$ est positif, de sorte qu'il faut prendre le signe + dans la formule (2). Nous avons alors

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{47^{\circ}6,947} \frac{dt}{2 \sin t - 1}.$$

Faisons maintenant le changement de variable (n° 169)

$$\tan \frac{t}{2} = u.$$

Lorsque t décroît de $\frac{\pi}{2}$ à $47^{\circ}6,947$, u décroît de 1 à 0,39544. Nous avons alors

$$I = \int_1^{0,39544} \frac{-2 du}{4u - 1 - u^2}.$$

Or

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{4u - 1 - u^2} &= - \int \frac{du}{(u - 2)^2 - 3} \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\int \frac{du}{u - 2 - \sqrt{3}} - \int \frac{du}{u - 2 + \sqrt{3}} \right] \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \left| \frac{u - 2 - \sqrt{3}}{u - 2 + \sqrt{3}} \right|. \end{aligned}$$

Donc

$$I = - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\log \frac{\sqrt{3} - 2 - 0,39544}{\sqrt{3} - 2 - 0,39544} - \log \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \right) = -1,1215.$$

9. Calculer $\int \frac{dx}{x \log x}$.

L'intégrale s'écrit

$$\int \frac{d(\log x)}{\log x} = \log \log x.$$

Plus généralement, si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$\log_p x = \overbrace{\log \log \dots \log x}^{p \text{ fois}}.$$

on a

$$\int \frac{dx}{x \log x \log_2 x \dots \log_p x} = \log_{p+1} x.$$

10. Calculer $I = \int e^{2x} x^3 dx$.

Intégrons par parties (I, n° 161) :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3}{1} d(e^{2x}) = e^{2x} \frac{x^3}{2} - \int \frac{3}{2} e^{2x} x^2 dx, \\ &= -\frac{3}{2} \int e^{2x} x^2 dx = -\frac{3}{4} e^{2x} x^2 + \frac{3}{2} \int e^{2x} x dx, \\ &= \frac{3}{2} \int e^{2x} x dx = \frac{3}{4} e^{2x} x - \frac{3}{4} \int e^{2x} dx, \\ &= -\frac{3}{4} \int e^{2x} dx = -\frac{3}{8} e^{2x}. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre, il vient

$$I = e^{2x} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8} \right).$$

11. Calculer $I = \int \frac{\log(x^2 - 3x + 2)}{x^2} dx$.

Intégrons par parties (n° 161, IV) :

$$\begin{aligned} I &= \int \log(x^2 - 3x + 2) d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\log(x^2 - 3x + 2)}{x} + \int \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) dx \quad (1), \\ I &= -\frac{\log(x^2 - 3x + 2)}{x} + \int \left(-\frac{3}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-2} \right) dx, \\ I &= -\frac{\log(x^2 - 3x + 2)}{x} - \frac{3}{2} \log x - \log(x-1) + \frac{1}{2} \log(x-2). \end{aligned}$$

12. Calculer $I = \int \frac{(1+x^2) \operatorname{arctang}\left(x + \frac{1}{x}\right)}{(x^2+1)^2} dx$.

Intégrons par parties (n° 161, IV), en prenant $v = \int \frac{(1+x^2) dx}{(x^2+1)^2}$.

Il nous faut, au préalable, calculer v , suivant la méthode générale du n° 163. On a

$$\frac{1+x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \right];$$

Pour obtenir immédiatement la dérivée du logarithme décomposé en éléments simples, écrivons celui-ci sous la forme

$$\log(x-1) + \log(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2),$$

d'où,

$$v = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{x}{1-x^2}.$$

Puis,

$$I = \frac{x}{1-x^2} \arctan \left(x + \frac{1}{x} \right) - \int \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \left(x + \frac{1}{x} \right)^2} dx.$$

L'intégrale du second membre s'écrit

$$\begin{aligned} \int \frac{-x dx}{x^4 - 3x^2 - 1} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\left(x^2 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\int \frac{d(x^2)}{x^2 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}} - \int \frac{d(x^2)}{x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \right] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \log \frac{x^2 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}{x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement

$$I = \frac{x}{1-x^2} \arctan \left(x + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \frac{x^2 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}{x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$$

13. Calculer $I = \int_0^{-1} \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{x(x^2 - 1)}} \arcsin \frac{x-1}{x} dx$.

Intégrons par parties (n° 161, IV), en prenant $v = \frac{2}{\sqrt{x(x^2 - 1)}} \arcsin \frac{x-1}{x}$. Si l'on observe que $3x^2 - 1$ est la dérivée de $x(x^2 - 1) = x^3 - x$, on voit qu'on peut prendre

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{x(x^2 - 1)};$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{2} \sqrt{x(x^2 - 1)} \arcsin \frac{x-1}{x} \right]_0^{-1} - \frac{1}{2} \int_0^{-1} \sqrt{x(x^2 - 1)} \cdot \frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x} \right)^2}} dx, \\ I &= \int_0^{-1} \frac{\sqrt{x(x^2 - 1)}}{(x-1)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x} \right)^2}} dx = \int_0^{-1} \frac{\sqrt{x(x^2 - 1)}}{(1-x) \sqrt{1-x}} dx \quad (1) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1-x}} dx. \end{aligned}$$

---

(1) On a, en effet, $\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x} \right)^2} = 1 - x$, car, dans l'intervalle d'intégration, $1 - x$ est positif.

Posons (n° 165)

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{2t \, dt}{(t^2+1)^2}.$$

Nous avons

$$I = 2 \int_1^{+0} \frac{t^2 \, dt}{(t^2+1)^2} = \int_1^{+0} t \, d\left(-\frac{1}{t^2+1}\right) = -\left(\frac{t}{t^2+1}\right)_1^{+0} + \int_1^{+0} \frac{dt}{t^2+1},$$

$$I = \frac{1}{2} + \text{arc tango} - \text{arc tang 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = -0,2854.$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}, \quad \int \frac{x^3+1}{(x-1)^2} dx, \quad \int_1^3 \frac{x(x+2)}{(x-1)^3(x+3)} dx, \\ & \int_0^{+\infty} \frac{(x-3) \, dx}{x^2(x^2+x+1)}, \quad \int \frac{dx}{x^5-1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \\ & \int_0^{+\infty} \frac{(x^2-2x) \, dx}{(x^2-2x+4)^2(x-1)}. \end{aligned}$$

2. Déterminer α pour que l'intégrale $\int \frac{(2x+5) \, dx}{(x-2)^2(x-1)^3}$ soit algébrique.

3. Calculer

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} dx, \quad \int \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt{x+1}}{x+2} dx, \quad \int_a^b \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} x \, dx, \\ & \int_a^b \sqrt{\frac{b^2-x^2}{x^2-a^2}} x \, dx, \quad \int_1^4 \sqrt{\frac{x}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \frac{x^2}{x^2-1}} dx. \end{aligned}$$

4. Calculer

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2},$$

sachant que $y(x^2+y^2) + x^2-1^2=0$.

5. Calculer

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x(1-x)}} dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}, \quad \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}},$$

$$\int \sqrt{x^2+2x \cos \varphi+1} dx, \quad \int \frac{(x-1) dx}{x+\sqrt{x^2-x+2}}, \quad \int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}, \quad \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Calculer

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x}, \quad \int \frac{dx}{a \cos^2 x+b \sin^2 x}, \quad \int \frac{dx}{a \cos x+b \sin x+c},$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\cos x+\cos 2x-3}, \quad \int_0^{3\pi} \frac{\sin x \cos x dx}{1-e \cos x} (e < 1), \quad \int_{-\frac{5\pi}{3}}^{\frac{13\pi}{3}} \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x+2 \sin^2 x}.$$

7. Calculer

$$\int \sin^3 x dx, \quad \int \cos^3 x \sin^2 x dx, \quad \int_0^{+\pi} \sin^4 x \cos^2 x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}, \quad \int \sin^2 x \tan x dx, \quad \int_0^\pi (\sin x - \cos x)^3 dx, \quad \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

8. Calculer

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}-1} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^2 x-e^x-2}, \quad \int \frac{(e^x+1)^3}{(e^{2x}-1)^2} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x+1}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x dx}{\operatorname{ch}^3 x+\operatorname{sh}^3 x}, \quad \int_0^1 (\operatorname{sh} x)^n dx.$$

9. Calculer

$$\int \frac{x dx}{(x^2+1)^2}, \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-1}}, \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \int \frac{\sqrt{x^3-2}}{x^3} dx.$$

10. Calculer

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x+1}, \quad \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{\sqrt{3+\cos 2x}}, \quad \int \tan^n x dx.$$

[Poser $t = \cos x$, $\sin x$ ou $\tan x$.]

11. Calculer

$$\int \frac{\sqrt{e^x+1}-e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

12. Calculer

$$\int e^x x^3 dx, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2+1} (x^2+1) x^3 dx.$$

[Pour la seconde, poser $x^2+1 = t$.]

13. Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx, \quad \int_0^e x \operatorname{ch} x dx, \quad \int (x^3 - x + 4) (\sin^2 x - \cos x) dx,$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin^3 x dx, \quad \int (x^2 - 1) e^{2x} \sin 3x dx.$$

14. Calculer

$$\int_0^1 x \operatorname{arctang} x dx, \quad \int (x^2+1) \log x dx, \quad \int x \sqrt{x^2+1} \log x dx,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^4} dx, \quad \int_{-1}^2 \operatorname{arctang} \frac{x+1}{x-2} dx,$$

$$\int_0^1 \operatorname{arcsin} x dx, \quad \int x^2 \operatorname{arcsin} \sqrt{x^2-1} dx.$$

15. Calculer

$$\int (\log x)^n dx, \quad \int (\operatorname{arcsin} x)^2 dx.$$

[Intégrer $n, 2$ fois par parties.]

16. Calculer

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}, \quad \int \frac{x(1+\cos x) dx}{\sin^2 x}.$$

[Intégrer par parties en prenant $u = x$.]

CHAPITRE XIV.

APPLICATIONS DES QUADRATURES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Longueur d'un arc de parabole.* — Soit la parabole $y^2 = 2px$. Nous voulons calculer la longueur de l'arc OM, M étant défini par son ordonnée y . L'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2 \left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right).$$

Donc

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} dy = p \int_0^{\frac{y}{p}} \sqrt{1 + t^2} dt.$$

Calculons l'intégrale indéfinie $I = \int \sqrt{1 + t^2} dt$. On a (n° 168)

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} + \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \log(t + \sqrt{1 + t^2}) + t\sqrt{1 + t^2} - \int \sqrt{1 + t^2} dt;$$

d'où

$$I = \frac{1}{2} \left[\log(t + \sqrt{1 + t^2}) + t\sqrt{1 + t^2} \right];$$

et enfin

$$s = \frac{p}{2} \left[\log \left(\frac{y}{p} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} \right) + \frac{y}{p} \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} \right].$$

2. *Longueur d'une cardiïde.* — Soit la cardiïde d'équation polaire

$$\rho = a \cos \omega + a.$$

On a

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = a^2 [\sin^2 \omega + (1 + \cos \omega)^2] d\omega^2 \\ &= 2a^2 (1 + \cos \omega) d\omega^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} d\omega^2; \end{aligned}$$

d'où

$$ds = \varphi a \cos \frac{\omega}{2} d\omega,$$

$$s = \varphi a \int_0^{\omega} \cos \frac{\omega}{2} d\omega = \varphi a \sin \frac{\omega}{2}.$$

Si l'on veut la longueur totale, il suffit de faire $\omega = \pi$ et de doubler, ce qui donne $s = 8a$.

3. *Longueur d'une loxodromie.* — Soit la loxodromie dont l'équation est, en coordonnées polaires sphériques,

$$\tan \frac{\theta}{2} = e^{m\varphi} \quad (m = \text{const.}).$$

On en déduit

$$m\varphi = \log \tan \frac{\theta}{2}, \quad m d\varphi = \frac{d\theta}{\sin \theta};$$

d'où, en appelant R le rayon de la sphère qui porte la loxodromie,

$$ds^2 = R^2 \left(d\theta^2 + \frac{d\theta^2}{m^2} \right) = R^2 \left(1 + \frac{1}{m^2} \right) d\theta^2.$$

$$ds = R \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} d\theta, \quad s = R \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} (\theta_2 - \theta_1),$$

en appelant s l'arc compris entre les deux points M_1, M_2 de colatitudes θ_1 et θ_2 .

En particulier, si M_1 tend vers le pôle, θ_1 tend vers zéro, s tend vers la limite finie $R \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \theta_2$, bien que M_1 tourne indéfiniment autour du pôle.

4. *Aire comprise entre une hyperbole équilatère et son asymptote.* — Soit l'hyperbole équilatère $xy = a^2$. Évaluons l'aire A comprise entre cette ligne, l'axe des x , et les parallèles à Oy d'abscisses x_1 et x_2 . Nous avons

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y dx = a^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = a^2 (\log x)_{x_1}^{x_2} = a^2 \log \frac{x_2}{x_1}.$$

En particulier, on voit que, si $a = 1$, $\log x$ représente l'aire comprise entre l'hyperbole, son asymptote et les parallèles à Oy d'abscisses 1 et x . C'est à cause de cette propriété qu'on donne quelquefois aux logarithmes népériens le nom de *logarithmes hyperboliques*.

5. *Aire de l'ellipse.* — Soit à calculer l'aire limitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Les calculs les plus simples sont obtenus en exprimant x et y au moyen de l'anomalie excentrique, soit

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

Nous avons alors (n° 173)

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{d\varphi} - y \frac{dx}{d\varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \pi ab.$$

L'aire du secteur balayé par OM quand φ croît de φ_1 à φ_2 est égale à $\frac{ab}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)$, ce qui s'explique aisément si l'on considère l'ellipse comme projection de son cercle principal.

6. *Aire de la lemniscate de Bernoulli.* — Soit la lemniscate d'équation polaire $\varphi^2 = \cos 2\omega$. On a (n° 173)

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos 2\omega d\omega = 4 \left(\frac{\sin 2\omega}{2} \right)_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

7. *Aire de l'ellipsoïde de révolution.* — Soit l'ellipsoïde engendré par l'ellipse de l'exercice n° 5 en tournant autour de OY. L'élément d'aire correspondant à l'accroissement $d\varphi$ de l'anomalie excentrique est

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi a \cos \varphi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

On a donc

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi.$$

Faisons le changement de variable $\sin \varphi = t$; il vient

$$A = 4\pi a \int_0^1 \sqrt{c^2 t^2 + b^2} dt = \frac{4\pi ab^2}{c} \int_0^{\frac{c}{b}} \sqrt{1 + u^2} du;$$

ou, en tenant compte d'un calcul déjà fait (exercice n° 1),

$$A = \frac{2\pi ab^2}{c} \left[\log \left(\frac{c}{b} + \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}} \right) + \frac{c}{b} \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}} \right].$$

A titre de vérification, on peut chercher ce que devient cette expres-

sion lorsque a tend vers b : on doit, en effet, retrouver l'aire de la sphère de rayon b . Nous laissons au lecteur le soin de s'en rendre compte, en se reportant au n° 126.

8. *Volume du tore.* — Soit le tore engendré par le cercle c en tournant autour de Oz (fig. 5). Coupons-le par le plan de cote z ; nous

Fig. 5.

obtenons une couronne comprise entre deux cercles de rayons x et x' , abscisses des points M et M' . L'aire de cette couronne est

$$(1) \quad A(z) = \pi(x^2 - x'^2) = \pi(x - x')(x + x') = \pi MM' \cdot 2a = 2\pi a \cdot MM';$$

l'élément de volume est, par suite,

$$(2) \quad dV = 2\pi a \cdot MM' dz.$$

Pour éviter les radicaux, prenons pour variable d'intégration l'angle $\angle ACM = \varphi$; nous le ferons croître de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et nous doublerons le volume obtenu, pour avoir le volume total. Nous avons, de la sorte,

$$MM' = 2R \cos \varphi, \quad z = R \sin \varphi, \quad dz = R \cos \varphi d\varphi;$$

$$\begin{aligned} V &= 4\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R^2 \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= 4\pi R^2 a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 4\pi R^2 a \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 a R^2. \end{aligned}$$

9. *Masse d'un cube sachant que la densité en chaque point est égale à la quatrième puissance de la distance à un sommet.* — Prenons trois axes de coordonnées formés par les arêtes qui aboutissent au sommet considéré. On ne peut songer à découper par les surfaces d'égale densité; car ce sont des sphères de centre O , qui donneraient lieu à des volumes compliqués dès que leur rayon dépasserait l'arête a du cube. Les seules surfaces simples qui permettent de balayer commodément tout le cube sont des plans parallèles aux plans de coordonnées.

Coupons par les plans (x) et $(x + dx)$. Nous obtenons une petite tranche, dont il faut calculer la masse dm . Comme elle n'est pas homogène, nous la dé coupons à son tour par les plans (y) , $(y + dy)$. Nous obtenons une petite bande, dont il faut calculer la masse $d_1 m$. Comme elle n'est pas homogène, nous la dé coupons par les plans (z) , $(z + dz)$. Le petit morceau obtenu est sensiblement homogène et a pour masse

$$d_2 m = \overline{OM}^3 dx dy dz = (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz.$$

Puis

$$\begin{aligned} d_1 m &= dx dy \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2)^2 dz \\ &= dx dy \left[(x^2 + y^2)^2 a + 2(x^2 + y^2) \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} \right]; \\ dm &= dx \int_0^a \left[(x^2 + y^2)^2 a + 2(x^2 + y^2) \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} \right] dy \\ &= a dx \left[x^4 a + 2x^2 \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \frac{2a^2}{3} \left(x^2 a + \frac{a^3}{3} \right) + \frac{a^5}{5} \right] \\ &= a^2 dx \left(x^4 + \frac{4}{3} a^2 x^2 + \frac{28}{45} a^4 \right); \\ m &= \int_0^a dm = a^2 \int_0^a \left(x^4 + \frac{4}{3} a^2 x^2 + \frac{28}{45} a^4 \right) dx \\ &= a^2 \left(\frac{a^5}{5} + \frac{4}{9} a^5 + \frac{28}{45} a^5 \right) = \frac{19}{15} a^5. \end{aligned}$$

10. *Centre de gravité d'un arc d'hélice.* — Soit l'arc d'hélice AB décrit par le point M de coordonnées (x, y, z) .

$$(1) \quad x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = k \varphi,$$

lorsque φ croît de $-z$ à $+z$. Il admet Ox pour axe de symétrie; donc, si on le suppose homogène, son centre de gravité est sur cette droite. On a (n° 181)

$$(2) \quad \overline{OG} = \frac{m_x}{m},$$

en appelant m la masse réelle obtenue en supposant, par exemple, la densité égale à 1 et m_x la masse fictive correspondant à la densité x . Or,

$$\begin{aligned} dm &= ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{R^2 + k^2} d\varphi, \\ dm_x &= x dm = R \sqrt{R^2 + k^2} \cos \varphi d\varphi; \\ m &= \sqrt{R^2 + k^2} \cdot 2z, \quad m_x = R \sqrt{R^2 + k^2} \cdot 2 \sin z. \end{aligned}$$

Donc

$$(3) \quad \overline{OG} = R \frac{\sin z}{z}.$$

Remarque. — $\overline{OG}$ est indépendant de k . Or, pour $k = 0$, l'arc AB se réduit à l'arc de cercle ab (fig. 6). Donc, le centre de gravité d'un

Fig. 6.

arc d'hélice coïncide avec celui de sa projection sur son plan de section droite moyenne.

11. *Centre de gravité d'une demi-ellipse.* — Soit l'ellipse de l'exercice n° 5. Cherchons le centre de gravité de l'aire qu'elle comprend à droite de Oy . Il se trouve sur Ox à une distance $OG = \frac{mx}{m}$.

En supposant la densité égale à 1, nous avons déjà $m = \frac{\pi ab}{2}$ (exercice n° 5). Calculons m_x .

Découpons par des parallèles à Oy . Nous avons (fig. 7)

$$dm_x = x, \text{aire } MM'NN = x MN dx = 2yx dx.$$

Fig. 7.

Or, en différentiant l'équation de l'ellipse, nous avons

$$\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0.$$

Donc

$$dm_x = -2y \frac{a^2}{b^2} y dy = -\frac{2a^2}{b^2} y^2 dy;$$

d'où, en intégrant le long de l'arc BA (n° 178),

$$m_2 = -\frac{2a^2}{b^2} \int_b^0 x^2 dx = \frac{2}{3} a^2 b.$$

Finalement,

$$\text{OG} = \frac{\frac{2}{3} a^2 b}{\frac{\pi}{2} ab} = \frac{4}{3\pi} a.$$

12. Centre de gravité du segment sphérique. — Il se trouve sur l'axe Oz du segment (fig. 8). Cherchons sa cote $\overline{\text{OG}} = \frac{m_z}{m}$. En suppo-

Fig. 8.

sant toujours la densité réelle égale à 1 et coupant par des plans perpendiculaires à Oz, nous avons

$$dm = \pi \overline{\text{IM}}^2 dz = \pi (R^2 - z^2) dz, \quad dm_z = \pi (R^2 - z^2) z dz;$$

$$\begin{aligned} m &= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) dz = \pi R^2 (b - a) - \frac{\pi}{3} (b^3 - a^3) \\ &= \frac{\pi}{3} h (3R^2 - a^2 - b^2 - ab), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_z &= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) z dz = \pi \frac{R^2}{2} (b^2 - a^2) - \frac{\pi}{4} (b^4 - a^4) \\ &= \frac{\pi h (a + b)}{4} (2R^2 - b^2 - a^2); \end{aligned}$$

$$\overline{\text{OG}} = \frac{3}{4} (a + b) \frac{2R^2 - a^2 - b^2}{3R^2 - a^2 - b^2 - ab}.$$

Comme vérification, $\overline{\text{OG}}$ s'annule pour $a = -b$, c'est-à-dire quand O est centre de symétrie du segment.

13. THÉOÈRES DE GULDIN. — 1. *L'aire engendrée par un arc de ligne plane, en tournant autour d'un axe Oz situé dans son plan et ne le*

rencontrant pas, est égale à la longueur de cet arc multipliée par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité.

En effet, nous avons (n° 176), en prenant, dans le plan de la ligne, un axe des x perpendiculaire à Oz ,

$$\Lambda = \int_{AB} 2\pi x \, ds.$$

Or, si l'on imagine que l'arc, supposé homogène, ait pour densité 2π , son centre de gravité a pour abscisse

$$X = \frac{\int_{AB} 2\pi x \, ds}{2\pi l} = \frac{\Lambda}{2\pi l};$$

d'où

$$\Lambda = 2\pi l X = l \int 2\pi X. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

II. *Le volume engendré par une aire plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la rencontrant pas, est égal au produit de cette aire par la longueur de la circonférence engendrée par son centre de gravité.*

En effet, décomposons l'aire en petits morceaux par des parallèles à Ox et à Oz . Nous obtenons de la sorte, en négligeant les morceaux irréguliers qui sont au voisinage du périmètre, de petits rectangles

Fig. 9.

tels que ABCD (fig. 9). Celui-ci engendre un petit anneau, dont le volume est

$$v = \pi (\overline{EB}^2 - \overline{EA}^2) AD \\ = \pi AD (EB - EA) (EB + EA) = 2\pi \cdot AD \cdot AB \cdot PM = 2\pi \cdot PM \times \text{aire } ABCD,$$

en désignant par M le centre du rectangle.

Le volume Λ engendré par l'aire totale est évidemment la limite de la somme des volumes v lorsque le nombre des petits rectangles augmente

indéfiniment, chacun d'eux tendant à se réduire à un point ⁽¹⁾. On a donc

$$V = \lim (\Sigma 2\pi PM \times \text{aire } ABCD).$$

Mais, cette limite est aussi le numérateur de l'abscisse X du centre de gravité de l'aire plane, supposée homogène et de densité 2π ; le dénominateur étant alors $2\pi \cdot A$, en appelant A la mesure de l'aire. On a donc

$$X = \frac{V}{2\pi A};$$

d'où

$$V = 2\pi AX = A \times 2\pi X, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Ces deux théorèmes peuvent servir soit à calculer des surfaces ou des volumes, soit à déterminer des centres de gravité. Par exemple, la surface et le volume du tore s'en déduisent immédiatement. De même, en partant de la surface ou du volume de la sphère, on peut obtenir le centre de gravité de la demi-circonférence ou du demi-cercle.

14. Moment d'inertie d'une sphère homogène par rapport à une droite quelconque de l'espace. — Menons par le centre O de la sphère une droite D' parallèle à la droite D donnée. Si d désigne la distance de O à D , on a (n° 184)

$$I_D = I_O + M d^2.$$

Tout revient donc à calculer I_O . Or, le moment d'inertie d'une sphère homogène est évidemment le même par rapport à tous ses diamètres. D'autre part, la somme des moments d'inertie par rapport à trois diamètres rectangulaires est égale à deux fois le moment d'inertie par rapport au centre (n° 183); de sorte que $I_D = \frac{2}{3} I_O$.

Or, rien n'est plus aisé que le calcul direct de I_O . Si nous découpons par des sphères concentriques, le moment d'inertie élémentaire du volume compris entre deux sphères consécutives de rayons r et $r + dr$ est sensiblement, en appelant ρ la densité ⁽²⁾,

$$dI = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^2 dr, r^2 = \frac{4}{3} \pi \rho r^4 dr.$$

⁽¹⁾ Ceci revient à admettre que l'aire engendrée par les morceaux irréguliers tend vers zéro, ce qui semble assez intuitif. Le lecteur ne doit pas cependant considérer ceci comme une démonstration entièrement rigoureuse, laquelle sortirait des limites de cet Ouvrage.

⁽²⁾ La partie principale du volume compris entre les deux sphères est la différentielle de $\frac{4}{3} \pi r^3$, volume de la sphère de rayon r (n° 138).

Donc

$$I_0 = 4\pi\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{4\pi\varphi R^4}{5} = \frac{3}{5}MR^2,$$

$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2, \quad I_D = M\left(\frac{2}{5}R^2 + d^2\right),$$

où M représente la masse de la sphère.

15. *Moment d'inertie d'un tétraèdre régulier par rapport à une hauteur* (E. P., 1911). — Il ne faut évidemment pas songer à aborder le calcul direct, car les cylindres de révolution ayant pour axe la hauteur coupent les faces du tétraèdre suivant des ellipses et déterminent entre eux des volumes beaucoup trop compliqués. Considérons au contraire

Fig. 10.

les deux plans rectangulaires SAH et $SEHD$ (fig. 10). Nous avons (n° 183)

$$I_{SH} = I_{SAH} + I_{SEHD}.$$

Calculons I_{AH} . Coupons par des plans parallèles situés aux distances x et $x + dx$ de SAH . La tranche ainsi obtenue a sensiblement pour moment d'inertie, en appelant φ la densité,

$$dI = \text{aire MNP} \cdot dx \cdot \varphi x^2.$$

Or, on sait que

$$\frac{\text{aire MNP}}{\text{aire AHS}} = \left(\frac{BN}{BA}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{\frac{a}{2}}\right)^2 = \frac{(a - 2x)^2}{a^2}.$$

D'autre part,

$$\text{aire AHS} = \frac{1}{2}AH \cdot SH = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^2}{2\sqrt{3}};$$

donc

$$dI = z x^2 dx \frac{(a - 2x)^2}{2\sqrt{z}} = \frac{z}{2\sqrt{z}} (a^2 x^2 - 4ax^3 + 4x^4) dx,$$

$$I_{SAH} = z \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{z}{2\sqrt{z}} (a^2 x^2 - 4ax^3 + 4x^4) dx = \frac{z}{2} \frac{a^3}{240} = M \frac{a^2}{60},$$

en appelant M la masse du tétraèdre.

Il s'agit maintenant de calculer I_{SLB} . On pourrait faire ce calcul directement comme le précédent. Il serait aussi simple pour ce qui concerne la portion SADE du tétraèdre et serait un peu plus compliqué pour ce qui concerne la portion SEBDC. Nous irons plus vite en remarquant que, par raison de symétrie, les moments d'inertie sont les mêmes par rapport aux trois plans SHX, SHB, SHC, et en nous appuyant, d'autre part, sur le théorème général suivant :

THÉORÈME. — *Si le moment d'inertie d'un milieu est le même par rapport à trois plans passant par une même droite, il est le même par rapport à tous les plans passant par cette droite.*

En effet, le moment d'inertie par rapport à un plan quelconque

$$x \cos z + y \sin z = 0$$

passant par Oz est

$$I = \Sigma m (x \cos z + y \sin z)^2 = A \cos^2 z + 2B \sin z \cos z + C \sin^2 z,$$

en posant

$$A = \Sigma m x^2, \quad B = \Sigma m xy, \quad C = \Sigma m y^2.$$

Si, dans cette formule, on considère I comme donné et qu'on cherche z , on a une équation du second degré en $\tan z$, qui ne saurait admettre trois racines sans être vérifiée identiquement. Autrement dit, trois plans ne sauraient donner la même valeur pour I sans qu'il en soit de même pour tous les autres.

C. Q. F. D.

Cela posé, si nous revenons à notre tétraèdre, nous voyons qu'il admet le même moment d'inertie par rapport à tous les plans passant par SH. Donc, en particulier $I_{SLB} = I_{SAH}$; d'où

$$I_{SH} = 2 I_{SAH} = M \frac{a^2}{20}.$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer la longueur de la cycloïde, de la chaînette (t. II).
2. Rectifier les spirales logarithmique, d'Archimède, hyperbolique

$$\left(z = e^{m\omega}, z = m\omega, z = \frac{m}{\omega} \right).$$

3. Rectifier la courbe définie par les équations

$$x = t - \frac{t^3}{3}, \quad y = t^2, \quad z = 3t + t^3.$$

Quelle relation existe-t-il entre l'arc de cette courbe et celui de sa projection sur xOy ?

4. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $\rho = \tan^2 \omega$, qui est obtenu en faisant varier ω de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

5. Soit le parabolôide de révolution $x^2 + y^2 = 2z$. On le coupe par un cylindre ayant pour section droite dans le plan xOy la spirale d'Archimède $\rho = m\omega$. Trouver la longueur de la portion de la courbe d'intersection comprise entre xOy et le plan perpendiculaire à l'axe mené par le foyer.

6. Même question en remplaçant la spirale d'Archimède par la spirale logarithmique $\rho = e^{m\omega}$, puis par la spirale hyperbolique $\rho = \frac{m}{\omega}$.

7. Calculer l'aire comprise entre une parabole et deux cordes perpendiculaires à l'axe.

8. Même question pour une ellipse et pour une hyperbole.

9. Calculer l'aire de la boucle de la strophoïde

$$x(x^2 + y^2) + x^2 - y^2 = a.$$

10. Même question pour le folium de Descartes, $x^3 + y^3 = xy$.

11. Calculer l'aire comprise entre Ox et la courbe $y(x^2 + 1) = 1$.

12. Calculer l'aire comprise entre la chaînette $y = \cosh x$, l'axe des x et deux ordonnées, ou bien entre la chaînette, l'axe des y et deux abscisses.

13. Aire de la boucle de la courbe définie par les équations

$$x = t - t^3, \quad y = t^2 + t^2 + 1.$$

14. Aire d'un secteur parabolique, elliptique ou hyperbolique ayant pour sommet un foyer.

15. Aire du limaçon de Pascal.

16. Aire d'un secteur de spirale logarithmique.

17. Aire comprise entre la conchoïde de Nicomède $\rho = \frac{a}{\cos \omega} + b$, l'axe polaire et la droite $\omega = \frac{\pi}{4}$.

18. Calculer l'aire d'une calotte de parabolôïde de révolution limitée par le plan perpendiculaire à l'axe mené par le foyer.

19. Calculer la surface du tore.

20. Aire de la surface engendrée par une cycloïde en tournant autour de sa base, ou d'une tangente de rebroussement, ou de la normale au sommet.

21. Même question pour une chaînette tournant autour de sa base Ox ou de son axe de symétrie Oy .

22. Même question pour la lemniscate d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos 2\omega}$, tournant autour de Ox ou de Oy .

[D'abord, l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = d\rho^2 - \rho^2 d\omega^2 = \rho^2 d\omega^2 \left[1 + \left(\frac{d\rho}{\rho d\omega} \right)^2 \right] = \rho^2 d\omega^2 (1 + \tan^2 2\omega) = \frac{\rho^2 d\omega^2}{\cos^2 2\omega};$$

d'où

$$ds = \frac{\rho d\omega}{\cos 2\omega}.$$

Puis, en tournant autour de Ox ,

$$dX = 2\pi \rho \sin \omega ds = \frac{2\pi \rho^2 \sin \omega d\omega}{\cos 2\omega} = 2\pi \sin \omega d\omega;$$

en tournant autour de Oy ,

$$dY = 2\pi \rho \cos \omega ds = 2\pi \cos \omega d\omega.$$

On pourrait plus généralement faire tourner autour d'une droite quelconque issue du pôle, définie par son angle polaire z .]

23. Même question pour la boucle de la courbe définie par les équations

$$x = t - m^2 t^3, \quad y = t^2,$$

l'axe de rotation étant Oy .

Montrer qu'il existe une valeur de m pour laquelle l'aire engendrée par un arc quelconque de la courbe est un polynôme par rapport aux ordonnées des extrémités de cet arc.

24. Volume de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 = 0$.

25. Volume du parabolôïde $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2x = 0$ ($p, q > 0$), limité au plan $x = \frac{p+q}{2}$.

26. Volume engendré par une cycloïde ou une chaînette tournant comme dans les exercices nos 20 et 21.

27. Même question pour la lemniscate du n° 22 et pour la courbe du n° 23.

28. Calculer la masse d'une ellipse en supposant que la densité linéaire en chaque point est proportionnelle à la distance au grand axe.

29. Masse d'un arc de parabole terminé au sommet O, en supposant la densité en chaque point M proportionnelle à OM.

30. Masse de la surface d'une ellipse en supposant la densité proportionnelle à la distance au petit axe.

31. Masse de la surface d'un tore, la densité en chaque point étant l'inverse du carré de la distance au centre.

32. Masse d'une sphère dont la densité en chaque point M est $\frac{1}{AM^2}$,

A désignant un point fixe de la surface.

33. Masse d'un cône de révolution limité par une section circulaire, sachant que la densité en chaque point est égale à la distance de ce point au sommet.

34. Masse d'un cylindre de révolution dont la densité en M est OM, O désignant le centre du cylindre supposé limité par deux sections droites.

35. Centre de gravité d'un arc de parabole, supposé homogène.

36. Centres de gravité du secteur circulaire, du segment circulaire, du secteur elliptique, du segment elliptique, du segment parabolique, de la zone sphérique, de la zone de parabolôïde de révolution.

37. Centres de gravité des segments d'ellipsoïde de révolution, de parabolôïde de révolution.

38. Centre de gravité d'un cône homogène à base quelconque.

39. Centres de gravité de la cycloïde, de son aire, de la surface et du volume qu'elle engendre en tournant autour de sa base.

40. Mêmes questions pour un arc de chaînette.

41. Moment d'inertie d'un segment de droite par rapport à une droite quelconque de l'espace.

42. Moment d'inertie d'une circonférence par rapport à un diamètre. (Se ramène au moment d'inertie par rapport au centre.)

43. Moments d'inertie d'un rectangle ou d'un triangle par rapport à une droite parallèle à l'un des côtés, par rapport à un point du plan.

44. Moments d'inertie d'un disque circulaire par rapport à une droite de son plan, d'un disque elliptique par rapport à son grand axe, d'un segment parabolique par rapport à son axe.

45. Moment d'inertie d'une sphère creuse par rapport à une droite quelconque.

46. Moments d'inertie d'un cube par rapport à une arête, d'un prisme droit à base triangulaire équilatérale par rapport à ses axes de symétrie (ternaire et binaire).

47. Moments d'inertie d'un cône de révolution par rapport à son axe, d'un cylindre de révolution par rapport à une génératrice.

48. Moments d'inertie d'un ellipsoïde quelconque par rapport à un axe, d'un tore par rapport à un axe.

49. Moments d'inertie d'une cycloïde et de son aire par rapport à sa base, ainsi que de la surface et du volume qu'elle engendre en tournant autour de cette base.

50. Mêmes questions pour une chaînette.

CHAPITRE XV.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Chercher les séries entières qui vérifient l'équation différentielle

$$(1) \quad x(1-x)y'' - [\gamma + (\alpha + \beta + 1)x]y' + \alpha\beta y = 0.$$

Soit

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots & - \alpha\beta \\ y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots & \gamma + (\alpha + \beta + 1)x, \\ y'' &= 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots & x(1-x), \end{aligned}$$

Multiplions par les coefficients indiqués à droite et ajoutons; nous devons obtenir une série entière identiquement nulle. Annulons le coefficient de x^n ,

$$- \alpha\beta a_n + \gamma(n+1)a_{n+1} - (\alpha + \beta + 1)na_n - (n-1)na_{n-1} - n(n-1)a_n = 0,$$

ou

$$(2) \quad a_{n+1}(n+1)(n+\gamma) = a_n(n+\alpha)(n+\beta).$$

A cause du facteur $n+\gamma$, il nous faut distinguer deux cas :

Premier cas : γ n'est pas entier négatif, ni nul. — Alors $n+\gamma$ ne s'annule jamais et l'on peut écrire

$$a_{n+1} = a_n \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(1 + n)(\gamma + n)}.$$

D'où l'on déduit (Note I), en supposant $a_0 = 1$,

$$(3) \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{1.2\dots n.\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}.$$

La série cherchée est donc, à un facteur constant arbitraire près

(valeur de a_0).

$$(4) \quad y = 1 - \frac{x\beta}{1, \gamma} x - \frac{x(x-1)\beta(\beta-1)}{1, 2, \gamma(\gamma-1)} x^2 - \dots \\ - \frac{x(x-1)\dots(x-n-1)\beta(\beta-1)\dots(\beta-n-1)}{1, 2, \dots, n, \gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-n-1)} x^n - \dots$$

Elle est connue sous le nom de *série hypergéométrique de Gauss* et joue un rôle fort important dans de nombreuses questions d'Analyse. Son intervalle de convergence est $(-1, +1)$, comme le montre la règle de d'Alembert ⁽¹⁾.

Deuxième cas : γ est un entier ≥ 0 . — Soit $\gamma = -p$ ($p \geq 0$).

Si, dans la formule (2), on fait $n = p$, on obtient $a_p = 0$. En faisant ensuite successivement $n = p-1$, $p-2$, ..., 1 , 0 , on trouve que les $p+1$ premiers coefficients sont tous nuls ⁽²⁾. Si l'on suppose ensuite $n = p+1$, $p+2$, ..., on peut calculer les coefficients a_{p+2} , a_{p+3} , ... en fonction de a_{p+1} , lequel demeure arbitraire et peut être pris égal à 1, en négligeant un facteur constant. On obtient de la sorte la série

$$(5) \quad y = x^{p+1} - \frac{(x+p+1)(\beta-p+1)}{(1-p+1), 1} x^{p+2} - \dots \\ - \frac{(x+p+1)(x-p+2)\dots}{(1-p+1)(-p+2)\dots, (1-p+1), 2, \dots, n} x^{p+1+n} - \dots$$

On peut l'écrire

$$(6) \quad y = x^{p+1} z,$$

z désignant ce que devient la série (4) si l'on y remplace x par $x+p+1$, β par $\beta+p+1$, γ par $1+p+1$.

On peut d'ailleurs arriver directement à ce résultat, en faisant le changement de variable défini par (6). D'une façon générale, si l'on pose

$$(7) \quad y = x^{1-\gamma} z,$$

l'équation (1) se transforme en la suivante ⁽³⁾.

$$(8) \quad x(1-x)z'' - [x-\gamma-(x-\beta-1) - \gamma x]z' - (x+1-\gamma)(\beta-1-\gamma)z = 0,$$

(1) On trouvera quelques propriétés de cette série dans *Leçons* (n° 354).

(2) Ceci suppose toutefois qu'aucun des facteurs $(n-x)$, $(n-\beta)$ ne s'annule, condition certainement réalisée si les nombres x , β ne sont pas des entiers ≥ 0 .

(3) Le lecteur est prié de faire les calculs, qui ne présentent pas de difficultés.

qui se déduit de (1) par le changement de z en $z+1-\gamma$, de β en $\beta+1-\gamma$ et de γ en $2-\gamma$.

En supposant $\gamma = -p$, on a $2-\gamma = 2+p > 0$; on se trouve dans le premier cas et l'on retrouve bien la formule (6).

Remarque. — Ainsi qu'on vient de le voir, les séries entières qui vérifient l'équation (1) ne dépendent que d'une constante arbitraire, qui rentre comme facteur. Or, nous savons (n° 186) que l'intégrale générale doit dépendre de deux constantes. Ceci nous prouve que *certaines intégrales de certaines équations différentielles peuvent ne pas être développables suivant les puissances croissantes de x* . En conséquence, la méthode de résolution des équations différentielles signalée au n° 186 peut, dans certains cas, ne pas être applicable ou ne l'être que partiellement (comme c'est ici le cas), c'est-à-dire ne donner que des intégrales particulières.

Pour terminer, observons que, dans l'hypothèse où γ n'est pas entier, la formule (4), combinée avec la formule (7), donne l'intégrale générale. Mais celle-ci renferme alors un développement à exposants fractionnaires.

2. Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{a+2by-y^2}}.$$

Les variables sont séparées (n° 188); d'où l'intégrale générale

$$(1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{a+2by-y^2}} = \text{const.}$$

ou, en effectuant les quadratures par la méthode de réduction (n° 168),

$$(2) \quad \arcsin \frac{x-b}{\sqrt{a-b^2}} = \arcsin \frac{y-b}{\sqrt{a-b^2}} = \text{const.}$$

Il semble, à première vue, qu'on obtient une intégrale transcendante. En réalité, *la relation entre x et y est algébrique*.

Appelons, en effet, z et β les arcs sinus du premier et du second membres. Nous avons

$$(3) \quad z - \beta = \text{const.}$$

ou

$$(4) \quad \sin z = \sin \beta = \sin z \cos \beta + \sin \beta \cos z = \text{const.}$$

ou

$$(5) \quad \frac{x-b}{\sqrt{a-b^2}} \sqrt{1-\frac{(y-b)^2}{a-b^2}} - \frac{y-b}{\sqrt{a-b^2}} \sqrt{1-\frac{(x-b)^2}{a-b^2}} = \text{const.},$$

$$(x-b)\sqrt{a-2by-y^2} - (y-b)\sqrt{a-2bx-x^2} = \text{const.} = C.$$

C'est bien là une relation algébrique. On peut d'ailleurs la rendre rationnelle. Si l'on pose, pour simplifier l'écriture,

$$(6) \quad x-b=X, \quad y-b=Y, \quad a-b^2=m,$$

on obtient, par deux élévations au carré,

$$(7) \quad m^2(X^2-Y^2)^2 - 2C^2[2X^2Y^2 - m(X^2+Y^2)] - C^4 = 0.$$

Les courbes intégrales sont du huitième degré.

3. Intégrer l'équation

$$(xy' - y)(x^2 - y^2) \sin \frac{y}{x} - xy = 0.$$

Cette équation est homogène en x , y . Posons donc (n° 190) $\frac{y}{x} = t$.
Il vient

$$(1-t^2) \sin t \, dt = \frac{dx}{x},$$

d'où

$$\log x = 2t \sin t - (1-t^2) \cos t = \text{const.}$$

Les équations paramétriques de l'intégrale générale sont

$$\begin{aligned} x &= C e^{2t \sin t - (1-t^2) \cos t} \\ y &= C t e^{2t \sin t - (1-t^2) \cos t} \quad (C = \text{const.}) \end{aligned}$$

4. Intégrer l'équation

$$2x^2y' + xy = x^2 + 1 \quad (\text{E. P., 1919}).$$

Cette équation est linéaire. Appliquons la méthode décrite au n° 191.

1. Équation sans second membre :

$$2x^2y' + xy = 0,$$

ou

$$\frac{dy}{y} + \frac{1}{2} \frac{dx}{x} = 0, \quad \log y + \frac{1}{2} \log x = \log C;$$

$$(2) \quad y = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

II. *Variation de la constante :*

$$2x^2 \frac{G'}{\sqrt{x}} = x^2 + 1,$$

$$G' = \frac{1}{2} \frac{x^2 + 1}{x^2} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} \right),$$

$$G = \frac{1}{2} \left(x^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} \right) + k = \frac{1}{2} x^2 + x^{-\frac{1}{2}} + k \quad (k = \text{const.}).$$

Portant dans (1), nous avons pour intégrale générale de l'équation proposée

$$(2) \quad Y = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{k}{\sqrt{x}}.$$

3. *Intégrer l'équation*

$$5y' + y \sin x = y^3 \sin 2x = 0.$$

C'est une équation de Bernoulli (n° 192); elle s'écrit

$$5 \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} \sin x + \sin 2x = 0,$$

ou, en posant $z = \frac{1}{y^2}$,

$$\frac{5}{3} z' + z \sin x = \sin 2x.$$

Équation sans second membre :

$$\frac{dz}{z} = -\frac{3}{5} \sin x \, dx,$$

$$\log z = \frac{3}{5} \cos x + \log C, \quad z = C e^{\frac{3}{5} \cos x}.$$

Variation de la constante :

$$\frac{3}{5} C e^{\frac{3}{5} \cos x} = \sin 2x,$$

$$C = \int \frac{3}{5} e^{-\frac{3}{5} \cos x} \sin 2x \, dx.$$

Posons

$$\frac{3}{5} \cos x = t, \quad -\frac{3}{5} \sin x \, dx = dt,$$

il vient

$$\begin{aligned} C &= \int e^t \left(-\frac{10}{3} t \right) dt = -\frac{10}{3} \int e^t t \, dt = -\frac{10}{3} \left(e^t t - \int e^t dt \right) \\ &= -\frac{10}{3} e^t (1 - t) + \text{const.} = \frac{10}{3} e^{-\frac{3}{5} \cos x} \left(1 - \frac{3}{5} \cos x \right) + \text{const.} \end{aligned}$$

d'où

$$z = \frac{10}{3} \left(1 + \frac{3}{5} \cos x \right) + k e^{\frac{3}{5} \cos x} \quad (k = \text{const.}),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{5} \left(1 + \frac{3}{5} \cos x \right) + k e^{\frac{3}{5} \cos x}}}.$$

6. Intégrer l'équation

$$y = x f(y') + g(y').$$

Cette équation, qui est dite *équation de Lagrange*, rentre dans le premier cas examiné au n° 193; car, si l'on y regarde x et y comme des coordonnées courantes, elle représente une droite et par suite une courbe unicursale. Comme paramètre t , nous pouvons garder x . Nous posons, d'autre part (n° 193),

$$(1) \quad y' = \frac{dy}{dx} = u.$$

Nous avons alors

$$(2) \quad y = x f(u) + g(u);$$

d'où

$$(3) \quad dx f(u) + x f'(u) du + g'(u) du = u dx$$

ou

$$(4) \quad \frac{dx}{du} [f(u) + u] + x f'(u) + g'(u) = 0.$$

Cette équation est linéaire par rapport à x . On l'intégrera, ce qui donnera (n° 191)

$$(5) \quad \begin{cases} x = F(u) + C G(u) \\ y = f(u) F(u) + g(u) + C f(u) G(u) \end{cases} \quad (C = \text{const.})$$

pour équations paramétriques de l'intégrale générale.

Cas particulier. Équation de Clairaut. — L'équation (4) cesse d'être une équation différentielle dans le cas particulier où $f(u) = u$. L'équation correspondante

$$(6) \quad y = x y' + g(y')$$

est dite *équation de Clairaut*.

Dans ce cas, l'équation (4) donne

$$(7) \quad \begin{cases} x = -g'(u), \\ y = g(u) - u g'(u). \end{cases}$$

On n'a plus de constante arbitraire. En réalité, ceci tient à ce qu'il n'est pas légitime, dans le calcul actuel, de diviser l'équation (3) par du pour obtenir l'équation (4). La première se réduit en effet à

$$du [x + g'(u)] = 0$$

et donne : soit

$$x = -g'(u),$$

d'où la courbe (7); soit

$$du = 0,$$

d'où

$$u = \text{const.} = C$$

et

$$(8) \quad y = Cx - g(C).$$

L'intégrale générale est constituée par l'équation (8), qui se déduit de (6) par le simple remplacement de y' par une constante, et qui représente une *famille de droites*. La courbe (7) n'est autre que l'enveloppe de ces droites (t. II) et constitue ce qu'on appelle une *intégrale singulière*.

7. Intégrer l'équation

$$y'^3 - 3yy' - y^2 = 0 \quad (\text{É. P., 1906}).$$

Cette équation n'est pas résoluble par rapport à y' ; mais elle représente une courbe unicursale (folium de Descartes) si l'on y regarde y et y' comme des coordonnées courantes.

Posons

$$y' = ty;$$

nous obtenons

$$(1) \quad x = \frac{3t}{1-t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1-t^3};$$

$$dy = 3 \frac{1-2t^3}{(1-t^3)^2} dt = y' dx = \frac{3t^2}{1-t^3} dx;$$

$$dx = \frac{(1-2t^3) dt}{t^2(1-t^3)} = \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2-t-1} \right) dt;$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{t} + \log \frac{t-1}{\sqrt{t^2-t-1}} - \sqrt{3} \operatorname{arc tang} \frac{2t-1}{\sqrt{t}} + \text{const.}, \\ y = \frac{3t}{1-t^3}. \end{cases}$$

Telles sont les équations paramétriques de l'intégrale générale.

8. *Intégrer l'équation*

$$y y'' + \frac{y'^2}{2} = \frac{1}{y^2}.$$

La variable x manque. Posons (n° 193)

$$y'^2 = 2z.$$

Nous obtenons l'équation linéaire du premier ordre

$$y \frac{dz}{dy} - z = \frac{1}{y^2},$$

qui, intégrée, nous donne

$$z = \frac{k}{y} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (k = \text{const.}),$$

d'où l'on tire

$$x = \int \frac{y \, dy}{\sqrt{2y(ky-1)}}.$$

Posant

$$ky - 1 = t^2,$$

il vient

$$x - x_0 = \frac{\sqrt{2}}{k^2} \int (1 - t^2) \, dt = \frac{\sqrt{2}}{k^2} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \quad (x_0 = \text{const.}),$$

ou, en élevant au carré et remplaçant t^2 par $ky - 1$,

$$(x - x_0)^2 = \frac{2}{9k^4} (ky - 1)(ky - 2)^2.$$

Telle est l'équation de l'intégrale générale.

9. *Intégrer l'équation*

$$f \equiv y'' - 3y' + 2y = x^2 + x^3 \operatorname{ch} x + x e^{2x} \cos x.$$

I. *Équation sans second membre.* — L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2; d'où

$$(1) \quad y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

II. $f = x^2$. — Substituons $y = ax^2 + bx + c$ (n° 198) :

$$y = ax^2 + bx + c, \quad 2,$$

$$y' = 2ax + b, \quad 3,$$

$$y'' = 2a, \quad 4.$$

En multipliant par les facteurs écrits à droite et ajoutant, on doit trouver x^2 . Donc

$$-2a = 1, \quad -2b - 6a = 0, \quad -2c - 3b + 2a = 0,$$

d'où l'intégrale particulière

$$(2) \quad y_1 = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}.$$

III. $f = \frac{x^3 e^x}{2}$ (nous décomposons $\text{ch } x$ en $\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$). — Faisons le changement de variable $y = e^x z$ (n° 198, II); l'équation transformée s'écrit immédiatement (les nouvelles racines de l'équation caractéristique sont 0, 1)

$$z'' - z' = \frac{x^3}{2},$$

d'où, en intégrant ⁽¹⁾

$$z' - z = \frac{x^4}{8}.$$

Substituons

$$z = -\frac{x^4}{8} + ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad -1,$$

$$z' = -\frac{1}{2}x^3 + 3ax^2 + 2bx + c, \quad 1,$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = -3, \quad d = -3;$$

d'où

$$(3) \quad y_2 = e^x \left(-\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} - 3x \right) \quad (2).$$

IV. $f = \frac{x^3 e^{-x}}{2}$. — Faisons le changement de variable $y = e^{-x} z$: les nouvelles racines sont 2, 3; donc

$$z'' - 5z' + 6z = \frac{x^3}{2}.$$

En substituant

$$z = \frac{x^3}{12} + ax^2 + bx + c,$$

on trouve

$$(4) \quad y_3 = \frac{e^{-x}}{12} \left(x^3 - \frac{5x^2}{2} + \frac{19x}{6} + \frac{65}{36} \right).$$

(1) Il est inutile d'introduire une constante, puisqu'on veut seulement une intégrale particulière.

(2) Nous négligeons le terme constant, car il donnerait un terme rentrant dans $C e^x$ de y_1 .

V. $f = e^{2x} x \cos x$. — Faisons le changement de variable $y = e^{2x} z$; les nouvelles racines sont $-1, 0$; donc

$$\begin{aligned} z'' + z' &= x \cos x, \\ z' + z &= \int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x. \end{aligned}$$

Substituons

$$\begin{aligned} z &= (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x, \\ z' &= (cx + d + a) \cos x + (-ax - b + c) \sin x, \\ a + c &= 0, \quad b + d + a = 1, \quad c - a = 1, \quad d - b + c = 0; \end{aligned}$$

d'où

$$(5) \quad y_1 = e^{2x} \left[\left(-\frac{x}{2} + 1 \right) \cos x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \sin x \right].$$

En définitive, l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4} - e^x \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} + 3x \right) \\ &\quad + \frac{e^{-x}}{12} \left(x^3 + \frac{5x^2}{2} + \frac{19x}{6} + \frac{65}{36} \right) + e^{2x} \left[\left(-\frac{x}{2} + 1 \right) \cos x + \frac{(x+1)}{2} \sin x \right]. \end{aligned}$$

10. Déterminer l'intégrale de

$$y'' - 2y' + 2y = x e^x \cos x,$$

qui s'annule pour $x = 0$, en même temps que sa dérivée.

Cherchons d'abord l'intégrale générale.

I. *Équation sans second membre.* — Les racines de l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ sont $1 \pm i$; donc (n° 197)

$$(1) \quad y_0 = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

II. *Intégrale particulière* (1). — Décomposons le second membre en $\frac{x}{2} e^{x(1+i)} + \frac{x}{2} e^{x(1-i)}$. Pour le premier terme, faisons le changement de variable $y = e^{x(1+i)} z$; les nouvelles racines sont $0, -2i$; donc

$$\begin{aligned} z'' + 2iz' &= \frac{x}{2}, \\ z' + 2iz &= \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

(1) Nous engageons le lecteur à recommencer la détermination de cette intégrale par les deux autres procédés indiqués au n° 198 (IV). Il pourra ainsi comparer la rapidité des trois méthodes.

Substituant

$$z = -i \frac{x^2}{8} - ax - b,$$

on trouve

$$a = \frac{1}{8}, \quad b = \frac{i}{16};$$

d'où, en négligeant le terme en b , qui rentre dans y_0 ,

$$y_1 = \frac{x}{8} e^{x(1-i)} (-ix + 1) = \frac{x}{8} e^x (\cos x - i \sin x) (-ix + 1).$$

Pour le second terme $\frac{x}{2} e^{x(1-i)}$, on obtiendrait une intégrale particulière imaginaire conjuguée de celle-ci; en la lui ajoutant, on doit trouver le double de la partie réelle de y_1 . On peut donc écrire tout de suite l'intégrale relative au second membre complet, à savoir

$$(2) \quad \frac{x}{4} e^x (\cos x + x \sin x),$$

l'intégrale générale étant dès lors

$$(3) \quad y = e^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{4} \cos x + \frac{x^2}{4} \sin x \right).$$

III. *Calcul des constantes.* — En annulant x dans y , nous avons d'abord $C_1 = 0$. Prenons ensuite la dérivée, en laissant de côté les termes qui disparaissent pour $x = 0$; il vient

$$y' = e^x \left(C_2 \cos x + \frac{\cos x}{4} + \dots \right).$$

Écrivant que y' s'annule avec x , nous avons $C_2 = -\frac{1}{4}$. Finalement, l'intégrale demandée est

$$y = \frac{e^x}{4} [x \cos x + (x^2 - 1) \sin x].$$

IV. *Intégrer l'équation* $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$.

I. *Equation sans second membre.* — L'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ a une racine double égale à 2. Donc (n° 197)

$$y_0 = e^{2x} (C_1 x + C_2).$$

II. *Intégrale particulière.* — Faisons la transformation $y = e^{2x} z$; les

nouvelles racines sont 0, 0; donc

$$z'' = x^4, \quad z' = \frac{x^5}{5}, \quad z = \frac{x^6}{6}.$$

L'intégrale générale est donc

$$y = e^{2x} \left(\frac{x^6}{60} + C_1 x + C_2 \right).$$

12. *Intégrer l'équation $x^2 y'' + pxy' + qy = 0$ ($p, q = \text{const.}$), par le changement de variable $x = e^t$.*

On a

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \frac{1}{x^2}.$$

Portons dans l'équation proposée

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - (p+1) \frac{dy}{dt} + qy = 0,$$

équation linéaire à coefficients constants.

Soient r_1, r_2 les racines de l'équation caractéristique

$$(2) \quad r^2 - (p+1)r + q = 0.$$

L'intégrale générale est $y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, ou

$$(3) \quad y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}.$$

Dans le cas où $r_2 = r_1$, $y = e^{r_1 t} (C_1 t + C_2)$.

$$(4) \quad y = x^{r_1} (C_1 \log x + C_2).$$

On peut arriver directement à ce résultat, en faisant le changement de variable $y = x^r z$, qui donne

$$x^2 z'' + x(r+p)z' + [r(r+1) + pr + q]z = 0.$$

On annule le coefficient de z et l'on a une équation du premier ordre en z' . Nous laissons au lecteur le soin d'explicitier les calculs et de retrouver, par cette voie, les formules (3) et (4).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Trouver les séries entières qui vérifient les équations différentielles

$$(I) \quad xy'' - (2n+1)y' - xy = 0 \quad (\text{équation de Bessel}),$$

$$(II) \quad y'' + xy' + y = 0,$$

$$(III) \quad (1-x^2)y'' - xy' + y = 0,$$

$$(IV) \quad x^2(y''' + y'') + (x+2)y' - y = 0.$$

2. Intégrer les équations

$$y' + x(y^2 + 1) = 0, \quad y' + \tan x \tan y = 0, \quad y \, dx = \sin x \, dy,$$

$$y' = y^3 + 1, \quad y' \cos x = 2y^2 - y + 1, \quad y' + \frac{x}{y} e^{x+y} = 0.$$

3. Intégrer les équations

$$y'(x^2 + y^2) = x^2 - y^2, \quad (xy^2 - yx^2) \, dx + (x^3 + y^3) \, dy = 0, \\ y' \sqrt{xy} = 2y - x.$$

4. Intégrer les équations

$$xy' - 2y = x^3, \quad (1-x^2)y' + 2y = x + 2, \quad (x^2+1)y' - xy - x^2 = 0, \\ y' \cos x - y \sin x = \sin 2x, \quad y' \sin x + y = \sin x + \cos 2x, \\ y' - 2xy + x^3 = 0.$$

5. Intégrer les équations

$$y' \sqrt{1+x^2} - y - xy^3 = 0, \quad \sin x (y' - y^2) + 2 \cos x, y(1-xy) = 0.$$

6. Intégrer les équations

$$y = xy'^3 - y' \sqrt{y'^2 - 1}, \quad y = xy' + \frac{1}{1-y'^2}.$$

7. Intégrer l'équation

$$x^2 y'^2 + y^2 = y'^{2m}.$$

[N° 193, premier cas. Poser, par exemple, $xy' = y^m \cos t$, $y = y'^m \sin t$.]

8. Intégrer les équations

$$x^3 - xy' - y'^3 = 0, \quad (x - y')^3 + y'(x - y') + 1 = 0.$$

[N° 193, deuxième cas. Poser $y' = tr$, $x - y' = t$.]

9. Intégrer les équations

$$y'^3 - y^3 = yy'(y + y'), \quad (y' - y)^4 = y' - 3y.$$

[N° 193, troisième cas. Poser $y' = ty$, $y' + y = t$.]

10. Intégrer l'équation

$$x^3 y'^2 - 2x(x^2 y - 1)y' - 4(1 - y) = 0.$$

[N° 193, troisième cas. Poser $y' = t$ et résoudre par rapport à y . On pourra aussi, à titre d'exercice, faire le changement de variable $z = xy + \frac{1}{y}$.]

11. Intégrer les équations

$$\begin{aligned} xy'' + 2y' &= x \sin x, & y'' - y'^2 &= 1 - 2y, & 2y'' - y'^2 &= e^{2y}, \\ y'' - y'^2 &= e^y - 1, & 2y'' + y'^2 &= 2 \sin 2y - \cos 2y - 1. \end{aligned}$$

12. Intégrer les équations

$$y'' = f(y), \quad y'' y'^m = f(y).$$

[On peut appliquer la méthode générale du n° 193, ou bien multiplier les deux membres par y' et intégrer.]

13. Intégrer l'équation

$$5(y''')^2 = 3y''y^{(3)}.$$

[Poser $y'' = z$. On trouve comme courbes intégrales toutes les paraboles du plan.]

14. Intégrer les équations

$$\begin{aligned} y'' - 4y' - y &= x^3 + x \sin x, & y'' - y' + 2y &= \left(\frac{x}{e^x}\right)^2, \\ y'' - 5y' + 2y &= x^2 e^{3x} \cos 3x. \end{aligned}$$

15. Intégrer les équations

$$\begin{aligned} y'' + y' + y &= (x + 2)^2 + \sin^2 x \cos x, & y'' - y &= x^3 \cos x, \\ y'' - 4y &= e^x \cos 2x - \sin 2x, & y'' + 2y' - 5y &= e^x (\cos^2 x + x^2). \end{aligned}$$

16. Intégrer les équations

$$\begin{aligned} y' - 2y' - y &= x \operatorname{ch} x, & y'' - 6y' + 9y &= \operatorname{sh} x, \\ 4y'' - 4y' + 1 &= \left(x + e^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \sin x. \end{aligned}$$

17. Trouver une fonction satisfaisant à l'équation $y'' - y' + 7y = x$ et telle que, pour $x = 1$, on ait $y = 3$, $y' = -1$.

18. Intégrer l'équation

$$y - 6y'' - 21y' - 26y = e^{2x} \cos 3x \quad (\text{E. P., 1912}).$$

[Même procédé d'intégration que pour une équation du second ordre.]

19. Intégrer les systèmes

$$\frac{dx}{dt} + y + x = 0, \quad \frac{dy}{dt} + 2x - y = 0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + y = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + x = 0;$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = x.$$

[Éliminer y pour les deux premières, y et z pour la troisième, en dérivant un nombre suffisant de fois.]

20. Étant donnée l'équation $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$, on fait le changement de variable $x = \varphi(t)$. Déterminer la fonction φ pour que l'équation transformée ne renferme pas de terme en $\frac{dy}{dt}$. Puis intégrer. (*Leçons*, exercice n° 399.)

21. A quelle condition doivent satisfaire les fonctions p et q pour que l'équation $y'' + py' + qy = 0$ admette deux intégrales u et v liées par la relation $u^2 + v^2 = 1$? (E. P., 1909.)

[En posant $u = \cos \varphi$, $v = \sin \varphi$, on trouve $q = \varphi'^2$, $p = -\frac{2\varphi''}{\varphi'}$; d'où $2pq + q' = 0$. Si elle est remplie, on peut calculer $\varphi = \int \sqrt{q} dx$, et l'on a l'intégrale générale $C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$, qu'on peut aussi obtenir par le changement de variable $y = z \cos \varphi$.]

22. Intégrer l'équation $xy'' - y' + x^3y = 0$.

[Appliquer l'exercice précédent.]

23. Étant donnée une équation linéaire du second ordre quelconque, sans second membre, si l'on en connaît une intégrale particulière y_1 , on peut avoir l'intégrale générale par deux quadratures. En déduire la forme $C_1y_1 + C_2y_2$ de cette intégrale.

[Faire le changement de variable $y = y_1 z$.]

24. Montrer que l'équation

$$(x-a)(x-b)y'' + (m+nx)y' + py = 0,$$

où a, b, m, n, p sont des constantes, peut être ramenée à l'équation de la série hypergéométrique (exercice résolu n° 4) par un changement de variable de la forme $x = z + \beta t$.

25. Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

déterminer les solutions de la forme

$$U = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad U = f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right), \quad U = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

26. Déterminer les solutions de la forme $U = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ pour l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + U = 0.$$

$$\left[\text{On posera } U = \frac{V(r)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \right]$$

— — —

CHAPITRE XVI.

POLYNOMES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Diviser le polynome

$$2x^7 - 3x^6 + (3i - 2)x^5 + (i + 4)x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 2ix - 4 + 3i$$

par

$$x^3 - 2x^2 + 3ix + 4.$$

Nous disposons les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{r}
 2x^7 - 3x^6 + (3i - 2)x^5 + (i + 4)x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 2ix - 4 + 3i \\
 x^6 - (3i + 2)x^5 + (i - 4)x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 2ix - 4 + 3i \\
 \hline
 -3ix^5 - 2(i - 2)x^4 - 11x^3 + 4x^2 - 2ix - 4 + 3i \\
 -4(2i + 1)x^4 - 20x^3 + 4(1 + 3i)x^2 - 2ix - 4 + 3i \\
 -4(4i - 7)x^3 + 4(6i - 5)x^2 + 2(8 + 15i)x - 4 + 3i \\
 -4(9i + 19)x^2 + 2(57i - 16)x + 108 + 67i
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x^3 - 2x^2 + 3ix + 4 \\
 \hline
 2x^4 + x^3 - 3ix^2 \\
 -4(2i + 1)x - 4(4i + 7)
 \end{array} \right.$$

Le quotient est inscrit au-dessous du trait horizontal de droite. Les restes partiels successifs sont écrits sur les lignes de gauche, au-dessous du dividende. Le dernier est le reste de la division, qui doit donner lieu, dès lors, à l'identité

$$\begin{aligned}
 2x^7 - 3x^6 + (3i - 2)x^5 + (i + 4)x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 2ix - 4 + 3i \\
 \equiv (x^3 - 2x^2 + 3ix + 4)[2x^4 + x^3 - 3ix^2 - 4(2i + 1)x - 4(4i + 7)] \\
 - 4(9i + 19)x^2 + 2(57i - 16)x + 108 + 67i,
 \end{aligned}$$

dont la vérification constituerait une *preuve de la division*.

Conseil pratique. — Il devient rapidement pénible de faire mentalement le calcul des coefficients des restes partiels. Aussi, conseillons-nous au lecteur d'effectuer lesdits calculs sur une feuille de papier séparée, comme d'ailleurs, dans la résolution d'un problème quelconque, il convient de le faire pour tous les calculs auxiliaires, afin de ne pas noyer les résultats principaux, qui servent de jalons dans la marche à suivre.

2. Diviser $2 + x - x^3$ par $1 + 3x - x^2 - x^3$ suivant les puissances croissantes de x , en s'arrêtant au premier reste qui renferme x^6 en facteur.

La disposition des calculs est la même que précédemment :

$$\begin{array}{r}
 2 + x - x^3 \\
 - 1x - 2x^2 - x^3 + 3x^4 \\
 \hline
 17x^2 - 6x^3 + 3x^4 - 5x^5 \\
 - 17x^3 + 19x^4 - 5x^5 + 17x^6 \\
 \hline
 190x^5 - 62x^6 + 17x^6 - 57x^7 \\
 - 632x^6 + 207x^6 - 57x^7 + 190x^8 \\
 \hline
 2163x^6 - 689x^7 + 190x^8 - 632x^9
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 1 + 3x - x^2 - x^3 \\
 \hline
 2 - 5x + 17x^2 - 57x^3 + 190x^4 - 632x^5
 \end{array}$$

On a l'identité

$$2 - x - x^3 = (1 + 3x - x^2 - x^3)(2 - 5x + 17x^2 - 57x^3 + 190x^4 - 632x^5) \\
 + x^6(2163 - 689x + 190x^2 - 632x^3).$$

3. Diviser $\sin \theta$ par $1 - 2x \cos \theta + x^2$ suivant les puissances croissantes de x . (Cf. *Leçons*, t. I, p. 161.)

Le premier terme du quotient est $\sin \theta$. Le premier reste partiel est

$$R_1 = x \sin 2\theta - x^2 \sin \theta.$$

Le deuxième terme du quotient est $x \sin 2\theta$. Le deuxième reste partiel est

$$\begin{aligned}
 R_2 &= x^2(2 \sin 2\theta \cos \theta - \sin \theta) - x^3 \sin 2\theta \\
 &= x^2(\sin 3\theta + \sin \theta - \sin \theta) - x^3 \sin 2\theta \\
 &= x^2 \sin 3\theta - x^3 \sin 2\theta.
 \end{aligned}$$

Le troisième terme du quotient sera $x^2 \sin 3\theta$ et l'on devine que, d'une manière générale, le $n^{\text{ième}}$ terme doit être $x^{n-1} \sin n\theta$, et le $n^{\text{ième}}$ reste partiel

$$(1) \quad R_n = x^n \sin(n+1)\theta - x^{n+1} \sin n\theta.$$

Pour le prouver, raisonnons par récurrence. Admettons (1). Le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme du quotient sera $x^n \sin(n+1)\theta$ et le reste correspondant

$$\begin{aligned}
 R_{n+1} &= R_n - x^n \sin(n+1)\theta(1 - 2x \cos \theta + x^2) \\
 &= x^{n+1}[2 \sin(n+1)\theta \cos \theta - \sin n\theta] - x^{n+2} \sin(n+1)\theta \\
 &= x^{n+1}[\sin(n+2)\theta + \sin n\theta - \sin n\theta] - x^{n+2} \sin(n+1)\theta \\
 &= x^{n+1} \sin(n+2)\theta - x^{n+2} \sin(n+1)\theta,
 \end{aligned}$$

ce qui est bien l'expression déduite de (1) en changeant n en $n+1$.

On a donc, quels que soient n , x , θ ,

$$(2) \quad \sin \theta = (1 - 2x \cos \theta + x^2)(\sin \theta + x \sin 2\theta + x^2 \sin 3\theta + \dots + x^{n-1} \sin n\theta) \\ - x^n [\sin(n+1)\theta - x \sin n\theta].$$

Autre méthode. — On peut arriver au même résultat en décomposant la fraction $\frac{\sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$ en éléments simples (Chap. XVII). On a (Chap. VII; exercice résolu n° 2),

$$(3) \quad \frac{\sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - e^{i\theta}} - \frac{1}{x - e^{-i\theta}} \right).$$

Divisons 1 par $x - e^{i\theta}$, suivant les puissances croissantes de x . Nous écrivons (n° 203)

$$\frac{1}{x - e^{i\theta}} = -e^{-i\theta} \frac{1}{1 - x e^{-i\theta}}.$$

Puis

$$1 = (1 - x e^{-i\theta})(1 + x e^{-i\theta} + x^2 e^{-2i\theta} + \dots + x^{n-1} e^{-(n-1)i\theta}) + x^n e^{-ni\theta}, \\ \frac{1}{1 - x e^{-i\theta}} = 1 + x e^{-i\theta} + x^2 e^{-2i\theta} + \dots + x^{n-1} e^{-(n-1)i\theta} + x^n \frac{e^{-ni\theta}}{1 - x e^{-i\theta}}, \\ \frac{1}{x - e^{i\theta}} = -e^{-i\theta} - x e^{-2i\theta} - x^2 e^{-3i\theta} - \dots - x^{n-1} e^{-ni\theta} + x^n \frac{e^{-ni\theta}}{x - e^{i\theta}}.$$

Changeant i en $-i$, nous avons

$$-\frac{1}{x - e^{-i\theta}} = e^{i\theta} + x e^{2i\theta} + x^2 e^{3i\theta} + \dots + x^{n-1} e^{ni\theta} - x^n \frac{e^{ni\theta}}{x - e^{-i\theta}}.$$

Ajoutant et portant dans (3), en tenant compte des formules d'Euler (n° 109), il vient

$$(4) \quad \frac{\sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} = \sin \theta + x \sin 2\theta + x^2 \sin 3\theta + \dots \\ + x^{n-1} \sin n\theta + \frac{x^n [e^{-ni\theta}(x - e^{i\theta}) - e^{ni\theta}(x - e^{-i\theta})]}{2i(1 - 2x \cos \theta + x^2)}.$$

Le crochet est égal à

$$e^{-n+1}i\theta - e^{-n+1}i\theta - x(e^{ni\theta} - e^{-ni\theta}) = 2i[\sin(n+1)\theta - x \sin n\theta].$$

En remplaçant dans (4), on retrouve bien (2) divisé par

$$1 - 2x \cos \theta + x^2.$$

Remarque. — Si, dans l'identité (2), on fait $x = 1$, il vient

$$\begin{aligned}\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta &= \frac{\sin \theta + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \theta \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}},\end{aligned}$$

formule bien connue, que nous retrouverons en trigonométrie ⁽¹⁾.

4. *Calculer la valeur du polynôme* $x^8 - 8x^7 + 11x^6 + x^5 - x^2 + 2$, *pour* $x = 6$.

Nous formons le reste de division par $x - 6$ (n° 203).

$$\begin{array}{r} x^8 - 8x^7 + 11x^6 + x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x + 2, \\ 1, \quad -2, \quad -1, \quad -5, \quad -30, \quad -180, \quad -1081, \quad -6486, \quad -38914. \end{array}$$

Nous avons écrit les coefficients successifs au-dessous des termes correspondants du dividende, complété là où il y avait lieu. Le reste, c'est-à-dire $f(6)$, est le dernier nombre obtenu, c'est-à-dire -38914 .

5. *Calculer la valeur du polynôme*

$$106x^5 - 9x^4 + 48x^3 + 31x^2 + 19x + 2,$$

pour $x = -\frac{1}{8}$.

Nous divisons par $1 + 8x$, suivant les puissances croissantes de x , en nous rappelant que le reste égale $(-8)^5 f\left(-\frac{1}{8}\right)$, quand on a épuisé tous les termes du dividende (n° 204) :

$$\begin{array}{r} 2 \qquad + 19x \qquad + 31x^2 \qquad + 48x^3 \qquad - 9x^4 \qquad + 106x^5 \\ 2 \qquad \qquad 3 \qquad \qquad 7 \qquad \qquad - 8 \qquad \qquad 55 \qquad \qquad - 334 \end{array}$$

Donc

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{-334}{(-8)^5} = \frac{334}{8^5} = \frac{167}{4 \times 8^4} = \frac{167}{16384}.$$

6. *Calculer le p. g. c. d. et le p. p. m. c. des deux polynômes*

$$x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 5x + 1 \quad \text{et} \quad x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 4x - 1.$$

⁽¹⁾ Cf. Chap. VII, exercice résolu n° 7.

Cherchons d'abord le p. g. c. d. On dispose les calculs comme, en arithmétique, pour le p. g. c. d. de deux nombres entiers : c'est-à-dire qu'on écrit les quotients successifs au-dessus des diviseurs, qui doivent, tour à tour, servir de dividendes.

Remarques pratiques importantes. — Le reste de la première division n'a que des coefficients pairs; nous l'avons divisé par 2 avant de le prendre pour nouveau diviseur. Cela ne faisait que doubler le quotient de la deuxième division, sans changer son reste, tout en simplifiant les calculs. La deuxième division avait alors pour premier terme $2x^3$, ce qui devait introduire, dès le début de la division, des coefficients fractionnaires. Pour éviter ceux-ci, nous avons multiplié le dividende par 2, ce qui doublait le reste. Nous avons répété la même opération sur le premier reste partiel, ce qui doublait encore le reste. Enfin, nous avons changé le signe du dernier diviseur. Ces modifications n'influent pas essentiellement sur le p. g. c. d., car elles ne peuvent que le multiplier par un facteur constant. Or, au point de vue de la divisibilité, il n'y a évidemment pas lieu de distinguer deux polynomes de rapport constant.

	$x - 1$	$x - 3$	$2x + 1$
$x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 5x + 1$	$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$	$2x^3 + 7x^2 + 5x + 1$	$x^2 + 3x + 1$
$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$	$2x^3 + 4x^2 - 6x - 8x - 2$	$x^2 + 3x + 1$	
$4x^3 - 4x^2 + 10x + 2$	$-3x^3 - 11x^2 - 9x - 2$	0	
	$-6x^3 - 22x^2 - 18x - 4$		
	$-x^2 - 3x - 1$		

Le p. g. c. d. est $x^2 + 3x + 1$.

Pour calculer le p. p. m. c., formons le quotient $\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3x + 1}$.

On trouve $x^2 - x - 1$. Multipliant ensuite par

$$x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 5x + 1,$$

nous obtenons

$$x^7 + 2x^6 - x^5 + x^4 - 5x^3 - 11x^2 - 6x - 1,$$

qui est le p. p. m. c. cherché.

7. Étant donnés deux polynomes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ et deux constantes distinctes a et b , déterminer le polynôme le plus général $f(x)$ tel que $f(x) + a$ soit divisible par $\varphi(x)$ et $f(x) + b$ par $\psi(x)$.

Application : $\varphi(x) = (x - 1)^3$, $\psi(x) = (x + 1)^3$, $a = 1$, $b = -1$.

On doit avoir deux identités de la forme

$$\begin{cases} f(x) + \varphi(x) \Phi(x) = a, \\ f(x) + \psi(x) \Psi(x) = b; \end{cases}$$

d'où

$$\varphi(x) \Phi(x) - \psi(x) \Psi(x) \equiv a - b,$$

ou

$$(2) \quad \varphi(x) U(x) + \psi(x) V(x) \equiv 1,$$

en posant

$$(3) \quad U(x) = \frac{\Phi(x)}{a-b}, \quad V(x) = -\frac{\Psi(x)}{a-b}.$$

On reconnaît l'identité de Bezout (n° 209).

Ceci nous prouve d'abord que *le problème n'est possible qu'autant que φ et ψ sont premiers entre eux*. Cette condition étant supposée remplie, on déterminera les polynômes particuliers U' et V' qui satisfont à (2) et, en outre, aux conditions de degrés énoncées au n° 209. On prendra ensuite

$$U = U' - \psi(x) \theta(x), \quad V = V' + \varphi(x) \theta(x),$$

où $\theta(x)$ désigne un polynôme arbitraire; puis, d'après (3) et (1),

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \varphi(x)(a-b)[U' - \psi(x)\theta(x)] - a \\ &\equiv \psi(x)(b-a)[V' + \varphi(x)\theta(x)] - b; \\ (4) \quad f(x) &\equiv \lambda(x) + \mu(x)\varphi(x)\psi(x), \end{aligned}$$

en désignant par $\mu(x)$ un polynôme arbitraire et par $\lambda(x)$ la valeur commune des deux polynômes $U'(a-b)\varphi(x) - a$ et $V'(b-a)\psi(x) - b$.

Application. — Effectuons la recherche du p. g. c. d. de $(x-1)^3$ et $(x+1)^3$,

$$\begin{array}{r|l|l|l} & 1 & x-3 & 3x \\ x^3-3x^2+3x-1 & x^3+3x^2-3x+1 & 3x^2+1 & x \\ -6x^2 & -2 & 1 & \\ & 3x^3+9x^2-9x+3 & & \\ & 9x^2-8x+3 & & \\ & 8x & & \end{array}$$

D'où l'on déduit les identités

$$\varphi = \psi - 2(3x^2+1), \quad 3\psi - (3x^2+1)(x+3) = 8x, \quad (3x^2+1) = x(3x-1);$$

$$3x^2+1 = \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad x = \frac{3\psi + (x+3)\frac{(\varphi - \psi)}{2}}{8},$$

$$1 = \frac{\psi - \varphi}{2} - \frac{3x}{8} \left[\frac{(\psi - \varphi)}{2} (x+3) - 3\psi \right];$$

$$1 = \varphi \left(-\frac{1}{2} - \frac{9x}{16} - \frac{3x^2}{16} \right) + \psi \left(\frac{1}{2} - \frac{9x}{16} - \frac{3x^2}{16} \right).$$

Nous prenons donc

$$U = -\frac{1}{2} - \frac{9x}{16} - \frac{3x^2}{16}, \quad V = \frac{1}{2} - \frac{9x}{16} + \frac{3x^2}{16};$$

$$\lambda(x) = -\frac{x}{8}(3x^2 - 10x^2 + 15).$$

Finalement, $\mu(x)$ désignant un polynôme arbitraire, nous avons

$$f(x) = (x^2 - 1)^3 \mu(x) - \frac{x}{8}(3x^2 - 10x^2 + 15).$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Diviser suivant les puissances décroissantes de x :

$$x^5 - 4x^4 - 24x^3 + x^2 + 3x - 4 \quad \text{par} \quad x^3 + x + 4;$$

$$x^7 + x^4 - x^2 + 1 \quad \text{par} \quad x^4 - x + 2;$$

$$x^7 - 7x^6 + 6x^5 - 22x^4 + 9x^3 - 4x^2 - x - 4 \quad \text{par} \quad x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x + 1.$$

2. Diviser suivant les puissances croissantes de x :

$$1 - x - x^2 + 3x^3 \quad \text{par} \quad 1 + x + x^2 - 3x^3 + 4x^4,$$

en s'arrêtant au reste en x^6 ;

$$2 + x - 8x^2 - 3x^3 + 6x^4 - 2x^5 - 2x^6 + x^7 \quad \text{par} \quad 1 - x - 2x^2 + x^3.$$

3. Diviser 1 par $(1 - x)^3$ suivant les puissances croissantes de x , jusqu'au reste en x^n .

(On pourra d'abord diviser 1 par $1 - x$, jusqu'au reste en x^{n+2} ; puis dériver deux fois l'identité obtenue. Ensuite, et à titre d'exercice, on fera directement la division et l'on vérifiera le résultat obtenu par la première méthode.)

4. Déterminer m et n pour que $x^4 + 3x^2 + mx + n$ soit divisible par $x^2 - 2mx + 2$.

(Faire la division suivant les puissances décroissantes et annuler le reste.)

5. Calculer les valeurs des polynômes

$$x^{10} - x^8 - 16x^6 - 4x + 4 \quad \text{pour} \quad x = 3;$$

$$x^9 + 4x^5 - 4x^3 - 38x^2 + 40x - 1, \quad \text{pour} \quad x = -7.$$

6. Calculer les valeurs des polynômes

$$4x^6 - 14x^5 - x^4 - 9x^3 - x + 1, \quad \text{pour} \quad x = \frac{1}{2};$$

$$44x^9 - 55x^7 - 9x^6 - x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 1, \quad \text{pour} \quad x = -\frac{1}{3}.$$

7. Calculer les p. g. c. d. et p. p. m. c. des polynomes

$$2x^7 + x^6 + x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 3 \quad \text{et} \quad x^6 - x^5 - 3x^3 - x^2 + 2;$$

$$x^4 - x^3 - 15x^2 - 11x + 4 \quad \text{et} \quad x^7 - 10x^6 - 35x^5 - 94x^4 - 39x^3 + 13x^2 - 33x - 12;$$

$$(x^2 - 1)^3(x^2 - 3x + 2)^2(x + 2) \quad \text{et} \quad (x^3 - 1)(x^2 - 4x + 3)^3(x + 1).$$

8. Si un polynome est premier avec plusieurs autres, il est premier avec leur produit.

(On peut raisonner comme en arithmétique, ou bien écrire l'identité de Bezout pour chaque facteur du produit et multiplier membre à membre.)

9. Si un polynome est divisible par plusieurs polynomes premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.

10. Trouver les polynomes U et V satisfaisant à l'identité

$$Ux^m + V(1-x)^n = 1 \quad (\text{E. N., 1901}).$$

11. Trouver un polynome $f(x)$ tel que $f(x) + 1$ soit divisible par $x^2 + 1$ et $f(x) + 2$ par $(x + 2)^4$.

(Cf. exercice résolu n° 7.)

12. Prouver que $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ est divisible par $x^2 + x + 1$, m, n, p désignant trois nombres naturels quelconques. (E. P., 1908.)

13. Si le polynome $f(x, y, z)$ est divisible par $x - y, y - z, z - x$, il est divisible par leur produit.

14. Si un polynome symétrique en x et y est divisible par $x - y$, il l'est aussi par $(x - y)^2$.

[On a

$$f(x, y) \equiv (x - y)g(x, y), \quad 2f(x, y) \equiv (x - y)[g(x, y) + g(y, x)].]$$

CHAPITRE XVII.

FRACTIONS RATIONNELLES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Calculer le développement d'ordre 4 de la fraction

$$f = \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x - 4}{x^3 - 7x^2 + 19x^2 - 24x^2 + 14x - 4}.$$

au voisinage de $x = 1$.

Posons $x - 1 = z$. Nous avons, tous calculs faits ⁽¹⁾,

$$f = \frac{-2 + 3z - 11z^2 + 6z^3 - z^4}{z^2 - z^3 - 2z^4 + z^5} = \frac{1}{z^2} \frac{-2 + 3z - 11z^2 + 6z^3 - z^4}{1 + z - 2z^2 - z^3}.$$

Divisons suivant les puissances croissantes de z , jusqu'à ce que nous ayons z^7 en facteur au reste :

$$\begin{array}{r|l} -2 + 3z - 11z^2 + 6z^3 - z^4 & 1 - z - 2z^2 + z^3 \\ 5z - 7z^2 + 8z^3 - z^4 & -2 + 3z - 2z^2 - 16z^3 + 16z^4 + 46z^5 - 94z^6 \\ 2z^2 - 18z^3 + 4z^4 & \\ 16z^3 & -2z^2 \\ -16z^4 + 36z^5 - 16z^6 & \\ 46z^5 - 48z^6 + 16z^7 & \\ -94z^6 + 168z^7 - 46z^8 & \\ 202z^7 - 234z^8 + 94z^9 & \end{array}$$

Nous avons

$$f = \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z} - 2 + 16z - 16z^2 + 46z^3 - 94z^4 + 202z^5 - \dots$$

avec

$$z = \frac{202 - 234z - 94z^2}{1 + z - 2z^2 + z^3}.$$

(1) Il est commode d'utiliser la formule de Taylor, pour ordonner le numérateur et le dénominateur par rapport à z .

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$Y = \frac{x^5 + 9x^4 - x^3 - 9x^2 + x - 4}{(x-1)^3(x-2)}.$$

I. Pôles 1. — $x-1=3$;

$$Y = \frac{1}{x^3} \frac{3 - 7z + 17z^2 + 17z^3 + 7z^4 + z^5}{-1 + z}.$$

Or, en appliquant la règle du n° 204, on écrit immédiatement

$$3 - 7z + 17z^2 + 17z^3 + 7z^4 + z^5 = (1+z)(3 - 4z + 21z^2) - 38z^3 - 7z^4 - z^5.$$

D'où

$$Y = \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{21}{x-1} + \frac{\overbrace{38 + 7(x-1) + (x-1)^2}^{34}}{x-2}.$$

II. Pôles 2. — $x-2=3$;

$$Y_1 = \frac{1}{z} [38 - 7(z+1) - (z+1)^2] = \frac{1}{z} (46 + 9z + z^2) = \frac{46}{z} + 9 + z.$$

$$Y_1 = \frac{46}{x-2} + 9 + x-2 = \frac{46}{x-2} + x+7.$$

Finalement,

$$Y = \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{21}{x-1} + \frac{46}{x-2} + x+7.$$

3. Décomposer

$$Y = \frac{x^6 + 4x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 4}{(x-1)(x+3)(x-4)(3x-1)}.$$

Les pôles sont simples. On peut donc calculer immédiatement les résidus.

Pôle	-1	:	nous multiplions par $x+1$ et faisons $x = -1$;	$\frac{-5}{(-3)(2)} =$	$\frac{1}{6}$
Pôle	$-\frac{3}{2}$	:	» $x + \frac{3}{2}$ » $x = -\frac{3}{2}$;	$\frac{-1675}{64} =$	$\frac{345}{1936}$
Pôle	4	:	» $x-4$ » $x = 4$;	$\frac{7927}{5 \cdot 11 \cdot 11} =$	$\frac{7927}{363}$
Pôle	$\frac{1}{3}$	:	» $x - \frac{1}{3}$ » $x = \frac{1}{3}$;	$\frac{2399}{3^6} =$	$-\frac{2399}{19603}$

Cherchons maintenant la partie entière. Nous allons diviser le numérateur par le dénominateur, suivant les puissances décroissantes de x . Comme nous n'avons pas besoin du reste, puisque nous avons déjà les autres parties de la décomposition, nous pouvons négliger, au dividende et dans les restes partiels, les termes de degré < 4 , qui n'interviennent pas dans le quotient. Comme conséquence, nous pouvons négliger au diviseur les termes de degré < 2 , qui donneraient dans les restes partiels des termes de degré < 4 . Nous avons dès lors la division suivante :

$$\begin{array}{r|l} x^6 + 4x^5 - & x^4 \\ \frac{47}{6}x^5 + \frac{4}{3}x^4 & \\ \hline \frac{1129}{36}x^4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 6x^4 - 23x^3 - 14x^2 \\ \hline x^2 + \frac{47}{36}x + \frac{1129}{216} \end{array}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} y = & \frac{x^2}{6} + \frac{47}{36}x + \frac{1129}{216} + \frac{1}{6(x-1)} \\ & + \frac{335}{96(2x+3)} + \frac{7927}{363(x-4)} + \frac{2399}{6534(3x-1)}. \end{aligned}$$

4. *Décomposer la fraction $y = \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}$ en éléments simples.*

La partie entière est visiblement 1.

Nous allons maintenant calculer la partie relative au pôle $x=1$. Nous en déduirons ensuite la partie relative au pôle $x=-1$, par le changement de x en $-x$; car ce changement doit transformer l'une dans l'autre ces deux parties, étant donné que leur somme ne doit pas être modifiée, en vertu de la parité de y .

Posons donc $x-1=z$. Il nous faut diviser $(1+z)^4 + (1+z)^2 + 2$ par $(2+z)^2$, jusqu'au terme en z quotient. Nous n'avons d'ailleurs pas à nous préoccuper du reste, grâce à la remarque faite plus haut. Bornons-nous donc aux deux premiers termes dans le dividende et le diviseur. Nous avons la division suivante :

$$\begin{array}{r|l} 4 + 6z & \\ 2z & \\ \hline 4 + 4z & \\ 1 + \frac{1}{2}z & \end{array}$$

La partie relative au pôle $x=1$ est donc $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)}$, et l'on a

$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} + 1.$$

3. Décomposer en éléments réels

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)^2(x^2-2x+2)}.$$

Première méthode. — Appliquons la *méthode des coefficients indéterminés*. Soit

$$(1) \quad y = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1} + \frac{Gx+H}{x^2-2x+2}.$$

Nous devons avoir l'identité :

$$\begin{aligned} x+2 &\equiv A(x^2+x+1)^2(x^2-2x+2) \\ &\quad + (Bx+C)(x+1)(x^2-2x+2) \\ &\quad + (Dx+E)(x+1)(x^2-2x+2)(x^2-x+1) \\ &\quad + (Gx+H)(x+1)(x^2-x+1)^2, \\ x+2 &\equiv A(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)(x^2-2x+2) \\ &\quad + (Bx+C)(x^3-x^2+2) + (Dx+E)(x^5+x^2-2x+2) \\ &\quad + (Gx+H)(x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+1). \end{aligned}$$

Identifiant terme à terme, nous avons les sept équations suivantes :

$$\begin{aligned} A + D + G &= 0, \\ F + 3G + H &= 0, \\ A + B + 5G + 3H &= 0, \\ -B + C + D + 5G + 5H &= 0, \\ 3A - C + 2D + F + 3G + 5H &= 0, \\ 2A - 2B + 2D + 2F + G + 3H &= 1, \\ 2A + 2C + 2F + H &= 2. \end{aligned}$$

Ce système peut être résolu de bien des manières. Par exemple, nous tirons des quatre premières équations :

$$(2) \quad \begin{cases} G = -A - D, & F = 3A + 3D - H, \\ B = 4A - 5D - 3H, & C = 9A + 9D - 8H; \end{cases}$$

en portant dans les trois autres, il vient

$$(3) \quad -6A - 7D + 12H = 0,$$

$$(4) \quad 15A - 17D - 5H = 1,$$

$$(5) \quad 26A - 24D - 17H = 2.$$

En faisant la combinaison linéaire (3) - (4) + (5), on élimine simultanément D et H et l'on trouve $A = \frac{1}{5}$. Moyennant quoi, (3) et (4)

donnent

$$D = -\frac{18}{169}, \quad H = \frac{32}{845}.$$

Portant dans (2), on a enfin

$$G = -\frac{79}{845}, \quad F = \frac{41}{169}, \quad B = \frac{2}{13}, \quad C = \frac{7}{13}.$$

Nous avons finalement

$$(6) \quad Y = \frac{1}{5(x+1)} + \frac{2x+7}{13(x^2+x+1)^2} - \frac{-18x+41}{169(x^2+x+1)} + \frac{-79x+32}{845(x^2+2x+2)}.$$

Deuxième méthode. — Nous allons extraire séparément les différentes parties de la décomposition, par la méthode de la division indiquée au n° 218.

Pôle 1. — Multiplions Y par $x+1$, faisons $x = -1$; nous obtenons le résidu $\frac{1}{5}$.

Partie relative à x^2+x+1 . — Posons

$$x^2+x+1 = z, \quad x^2 = -x-1+z.$$

Portons dans le dénominateur de Y

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2-2x+2) &= (x+1)(-3x+1+z) \\ &= -3x^2+x(z-2)+1+z = x(z+1)+4-2z. \end{aligned}$$

Nous avons ensuite (n° 218)

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x(1+z)+4-2z} &= \frac{x^2+2x}{x^2(1+z)+x(4-2z)} \\ &= \frac{x-1+z}{3x(1+z)+1} \quad (1) \\ &= \frac{3(z-1)(x+2)+-(z+1)(x-1+z)}{3(z-1)(4-2z)-(z+1)} \\ &= \frac{(2x+7)+(4x-6)z}{-13+17z} \quad (1'). \end{aligned}$$

Divisons suivant les puissances croissantes de z jusqu'à un reste en z^2 :

$$\frac{2x+7+(4x-6)z}{-13+17z} = \frac{13+17z}{-13+17z} \cdot \frac{2x+7}{13} + \frac{-18x+41}{169} z$$

(1) Nous négligeons les puissances de z supérieures à la première (n° 218).

La partie relative à $x^2 + x + 1$ est donc

$$\frac{2x+7}{15(x^2+x+1)^2} + \frac{-18x+41}{109(x^2+x+1)}.$$

Partie relative à $x^2 - 2x + 2$. — Nous devons poser $x^2 - 2x + 2 = z$, puis opérer comme précédemment, en négligeant tous les termes en z . Cela revient à remplacer, dans le coefficient de $\frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ dans y , x^2 par $2x - 2$; ce qui nous donne successivement

$$\frac{x+2}{(x+1)(3x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)(12x+17)} = \frac{x+2}{19x+41};$$

puis

$$\frac{x+2}{19x+41} = \frac{x^2+2x}{19x^2+41x} = \frac{4x+2}{-3x-38} = \frac{3(x+2)+19(4x+2)}{-3 \times 41 - 19 \times 38} = \frac{79x+32}{-845}.$$

La partie relative à $x^2 - 2x + 2$ est donc

$$\frac{-79x+32}{845(x^2-2x+2)},$$

et l'on retrouve bien la formule (6).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer les développements de

$$\frac{x^3+2}{x^6+6x^5+15x^4+21x^3+18x^2+9x+2},$$

au voisinage de $x = -1$ et jusqu'au dixième ordre; de $\frac{x^5+x^2+1}{x^3+2x^2-x-2}$,

au voisinage de $x = 4$ et jusqu'au troisième ordre; de

$$\frac{x^6+x^5-3x^4+5x+3}{x^2-7x-4}$$

au voisinage de $x = 2$ et jusqu'à l'ordre ∞ .

2. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$\frac{x^6+1}{(x+1)^2(x-2)^3}, \quad \frac{x+7}{(x+1)^4(x-3)}, \quad \frac{x^8}{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}.$$

3. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x+4)(x+1)(x-5)(2x+7)}, \quad \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)}, \quad \frac{x^5 + 3x^4 - x^3 + 2}{(x-1)(x-2)(3x+1)}.$$

4. Même question pour

$$\frac{x^2}{(x^2-4)^3}, \quad \frac{x^4+3}{(x^2-9)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2}.$$

5. Calculer le résidu du pôle $x = -2$ dans la fraction

$$\frac{x^8 + 4x^6 - x - 5}{(x+2)^4(x-1)^3(x+3)^2}.$$

($x+2 = z$: négliger dans la division les termes en z de degrés > 3).

6. Trouver le polynôme de degré minimum qui prend les valeurs 1, 2, 3, ..., n pour $x = 1, 2, 3, \dots, n$, ou bien pour $x = n, n-1, \dots, 2, 1$.

(Dans le premier cas, on pourra comparer le résultat avec la solution évidente $y = x$ et en déduire des identités arithmétiques.)

7. Connaissant les restes de division d'un polynôme par $x-a$, $x-b$, ..., $x-l$, calculer le reste de division par le produit

$$(x-a)(x-b)\dots(x-l).$$

[Si n est le nombre des diviseurs linéaires donnés, le reste cherché est le polynôme de degré $n-1$ qui prend les valeurs connues

$$f(a), \quad f(b), \quad \dots, \quad f(l), \quad \text{pour} \quad x = a, b, \dots, l.]$$

8. Étant donnés n nombres distincts $a, b, \dots, l$, et un nombre naturel $p = n-1$, on a l'identité

$$\frac{a^p}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)} + \frac{b^p}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)} + \dots + \frac{l^p}{(l-a)(l-b)\dots(l-h)} = 0.$$

(S'appuyer sur ce que la somme des résidus d'une fraction rationnelle est nulle, lorsque le degré du dénominateur surpasse de deux unités au moins le degré du numérateur.)

9. Étant donnée l'équation du troisième degré en z

$$z^3 + \frac{a^2}{a^2 + l}z^2 + \frac{b^2}{b^2 + l}z + \frac{c^2}{c^2 + l} = 0,$$

on appelle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ses racines. Calculer x^2, y^2, z^2 en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3 , ainsi que

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2, \\ & \frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_2)}, \\ & \frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda_1)^2}, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2. \end{aligned}$$

[Partir de l'identité en λ

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 \equiv - \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)}{(\lambda - a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)}.$$

Pour calculer x^2, y^2, z^2 , décomposer le second membre en éléments simples.

Pour $x^2 + y^2 + z^2$, développer suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\lambda}$ et évaluer, de part et d'autre, les coefficients de $\frac{1}{\lambda}$.

Pour $\sum \frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)}$, on pourra retrancher les égalités obtenues en remplaçant successivement λ par λ_1 et λ_2 dans (1).

Pour $\sum \frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)^2}$, dériver (2) par rapport à λ et faire $\lambda = \lambda_1$, en observant que le second membre est de la forme $(\lambda - \lambda_1)f(\lambda)$.

Pour $dx^2 + dy^2 + dz^2$, on calculera dx, dy, dz en prenant les différentielles logarithmiques des expressions trouvées pour x^2, y^2, z^2 . On s'appuiera ensuite sur les valeurs de

$$\sum \frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)}.$$

10. Décomposer en éléments simples réels les fractions

$$\begin{aligned} & \frac{x^3}{x^4 - 1}, \quad \frac{x^4}{x^3 - 1}, \quad \frac{1}{x^2 - 1}, \quad \frac{1}{x^3 + 1}, \quad \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 3)}, \\ & \frac{1}{(x^2 - 1)^3(x^2 - x + 1)^2}, \quad \frac{1}{(x^4 - 2x \cos a + 1)(x^2 - 2x \cos b + 1)}. \end{aligned}$$

CHAPITRE XVIII.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Soit l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

1° Chercher la condition pour que le produit de deux de ses racines soit égal au produit des deux autres. Résoudre l'équation dans ce cas.

2° L'équation étant supposée quelconque, on lui fait subir la transformation $x = y + h$. Déterminer h pour que l'équation en y satisfasse à la condition précédemment trouvée. En déduire une méthode de résolution algébrique de l'équation du quatrième degré.

1° Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les quatre racines, supposées telles que $x_1x_2 = x_3x_4$. Elles sont partagées en deux groupes symétriques (x_1, x_2) et (x_3, x_4) , ce qui nous incite à poser ⁽¹⁾

$$(1) \quad x_1 + x_2 = p, \quad x_1x_2 = q, \quad x_3 + x_4 = p', \quad x_3x_4 = q'.$$

La condition imposée s'écrit alors

$$(2) \quad q = q',$$

tandis que les relations entre les coefficients et les racines prennent la forme

$$(3) \quad p + p' = -a,$$

$$(4) \quad q + q' + pp' = b,$$

$$(5) \quad pq' + qp' = -c,$$

$$(6) \quad qq' = d.$$

Il faut éliminer p, q, p', q' entre (2), (3), (4), (5), (6), ou p, p', q

---

⁽¹⁾ Voir la note de la page 85 du Cours.

entre

$$(7) \quad p - p' = -a,$$

$$(8) \quad pp' - 2q = -b,$$

$$(9) \quad (p - p')q = -c,$$

$$(10) \quad q^2 = -d.$$

Si l'on tient compte de (7), (9) donne

$$(11) \quad q = \frac{c}{a}.$$

Portant dans (10), on a la condition cherchée

$$(12) \quad c^2 = a^2 d.$$

Si elle est remplie, (11) donne q ; de (7) et (8) on tire ensuite $p + p'$ et pp' ; d'où p et p' par une équation du second degré; puis x_1 , x_2 et x_3 , x_4 par deux nouvelles équations du second degré.

Remarque. — On aurait pu aussi trouver les relations (7) à (10) en identifiant l'équation proposée avec la suivante

$$(x^2 - px - q)(x^2 - p'x + q) = 0.$$

2° Si l'on désigne par $f(x)$ le premier membre de l'équation proposée, l'équation en y s'écrit

$$f(y - h) = 0$$

ou (n° 113)

$$(13) \quad f(h) + y f'(h) + y^2 \frac{f''(h)}{2} + y^3 \frac{f'''(h)}{6} + y^4 = 0.$$

Écrivons, pour elle, la condition (12)

$$(14) \quad [f'(h)]^2 = \frac{[f'''(h)]^2}{36} f(h).$$

ou

$$(4h^3 - 3ah^2 + 2bh - c)^2 = (4h - a)^2 (h^3 - ah^2 + bh - c) + d = 0,$$

ou

$$(15) \quad h^3(-8c + 4ab - a^2) + h^2(4b^2 - 2ac - 16d - a^2b) \\ + h(4bc - 8ad - a^2c) + c^2 - a^2d = 0.$$

Il y a donc trois valeurs de h répondant à la question. De plus, on voit qu'on peut ramener la résolution de toute équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième degré suivie de celles de trois équations

tions du second degré. D'une façon plus précise, ayant formé l'équation (15) en h , on en cherchera *une* racine. En la portant dans (13), on obtiendra une équation en x résoluble par la méthode indiquée dans 1°. Ayant les racines de (13), on aura celles de l'équation proposée, en ajoutant à chacune d'elles la valeur précédente de h .

2. *Étant donnée l'équation $x^3 + 3x^2 - x - 7 = 0$, calculer la somme des sixièmes puissances de ses racines.*

Nous pouvons nous ramener aux sommes des deux premières puissances ⁽¹⁾, en divisant x^6 par $x^3 + 3x^2 - x - 7$; ce qui nous donne l'identité

$$x^6 \equiv (x^3 + 3x^2 - x - 7)(x^3 - 3x^2 + 10x - 26) + 67x^2 + 44x - 182.$$

La somme demandée est donc égale à $67S_2 + 44S_1 - 182$, en conservant les notations du n° 224. Or,

$$S_1 = -3.$$

Puis,

$$S_2 = (S_1)^2 - 2s_2 = 9 + 2 = 11.$$

Finalement, la somme cherchée est égale à

$$67 \times 11 + 44 \times 3 - 182 = 423.$$

3. *Calculer $\Sigma a^3 b^2 c^2$, pour l'équation $x^4 + 2x^2 - x + 1 = 0$.* — On a, par exemple (n° 223),

$$\begin{aligned} S_3 \Sigma a^2 b^2 &= (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)(a^2 b^2 + a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 + c^2 d^2) \\ &= \Sigma a^5 b^2 + \Sigma a^3 b^2 c^2, \end{aligned}$$

d'où

$$(1) \quad \Sigma a^3 b^2 c^2 = S_3 \Sigma a^2 b^2 - \Sigma a^5 b^2.$$

Puis,

$$(S_2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = S_4 + 2 \Sigma a^2 b^2;$$

d'où

$$(2) \quad \Sigma a^2 b^2 = \frac{1}{2}(S_2^2 - S_4).$$

Enfin,

$$S_5 S_2 = S_7 + \Sigma a^5 b^2,$$

d'où

$$(3) \quad \Sigma a^5 b^2 = S_5 S_2 - S_7.$$

⁽¹⁾ Voir la note de la page 280 du Cours.

Portant (2) et (3) dans (1), il vient

$$(4) \quad \Sigma a^3 b^2 c^2 = \frac{1}{2} S_3 (S_2^2 - S_4) - S_5 S_2 - S_7.$$

Il nous faut calculer S_2, S_3, S_4, S_5, S_7 . Employons les formules de Newton (n° 224) :

$$\begin{aligned} S_1 &= 0, \\ S_2 - 4 &= 0, \\ S_3 - 2S_1 - 3 &= 0, \\ S_4 + 2S_2 - S_1 - 4 &= 0, \\ S_5 + 2S_3 - S_2 - S_1 &= 0, \\ S_6 - 2S_4 - S_3 + S_2 &= 0, \\ S_7 - 2S_5 - S_4 - S_3 &= 0; \end{aligned}$$

d'où

$$S_2 = -4, \quad S_3 = 3, \quad S_4 = 4, \quad S_5 = -10, \quad S_7 = 24.$$

Portant dans (4), il vient

$$\Sigma a^3 b^2 c^2 = -1.$$

Autre méthode. — On peut encore écrire (cf., n° 223, remarque III),

$$\Sigma a^3 b^2 c^2 = a^2 b^2 c^2 d^2 \Sigma \frac{a}{d^2} = \Sigma \frac{a}{d^2} = \Sigma ab^{-2}.$$

Or

$$S_1 S_{-2} = S_{-1} + \Sigma ab^{-2},$$

d'où

$$\Sigma ab^{-2} = S_1 S_{-2} - S_{-1} = -S_{-1}.$$

D'autre part, S_{-1} est la somme des racines de l'équation aux inverses (n° 242, III) : $y^4 - y^3 + 2y^2 + 1 = 0$; c'est-à-dire que $S_{-1} = 1$. Finalement,

$$\Sigma a^3 b^2 c^2 = -1.$$

On voit que cette seconde méthode est beaucoup plus rapide que la première.

4. Calculer $\Delta = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$, pour l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

On peut faire ce calcul en décomposant Δ en groupes symétriques.

Nous conseillons au lecteur d'employer cette méthode, à titre d'exercice.

Nous allons nous servir ici de la méthode des coefficients indéterminés

(n° 225). Le degré de Δ en p et q est au plus égal au plus fort exposant de a , c'est-à-dire 4. Le poids est égal au degré d'homogénéité de Δ en a , b , c , c'est-à-dire 6. Si l'on se rappelle que les poids de p et q sont 2 et 3, les seuls termes possibles sont des termes en p^3 et q^2 . Donc

$$(1) \quad \Delta = Ap^3 + Bq^2.$$

Pour déterminer les coefficients A et B , prenons d'abord $a = b = 1$, $c = -2$; nous avons

$$\Delta = 0, \quad p = -3, \quad q = 2,$$

d'où l'équation

$$(2) \quad 27A = 4B.$$

Prenons ensuite $q = 0$, $p = -1$; d'où

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = -1, \quad \Delta = 4, \quad \text{d'où} \quad A = -4.$$

Portant dans (2), on a

$$B = -27.$$

Finalement,

$$(3) \quad \Delta = -(4p^3 - 27q^2).$$

3. *Trouver les conditions pour que l'équation $x^3 + mx^2 + nx^2 + p = 0$ ait une racine triple.*

Une première méthode consisterait à éliminer x entre les trois équations (n° 226)

$$(1) \quad f(x) \equiv x^3 + mx^2 + nx^2 + p = 0,$$

$$(2) \quad f'(x) \equiv 3x^2 + 2mx + n = 0,$$

$$(3) \quad f''(x) \equiv 20x^3 + 10mx^2 + 2n = 0.$$

Mais cela semble devoir donner lieu à des calculs pénibles.

On pourrait aussi, et c'est beaucoup plus simple, éliminer x entre (3), $f''_1 = 0$, $f''_2 = 0$. Nous conseillons au lecteur de faire ce calcul.

Voici une troisième méthode, qui est encore plus rapide.

Si (1) possède une racine triple, (2) possède une racine double. Or, l'équation (2) se décompose en $x = 0$ et

$$(4) \quad 5x^3 - 4mx^2 + 2n = 0$$

Pour que $x = 0$ soit racine triple de (1), il faut que $f(x)$ contienne x^3 en facteur, ce qui exige $p = n = 0$; auquel cas, zéro est racine quadruple.

Cette solution banale étant écartée, écrivons que (4) a une racine

double. Cette racine doit satisfaire à l'équation dérivée

$$15x^2 + 8mx = 0.$$

Comme nous supposons $x = 0$, la racine cherchée est nécessairement $x = -\frac{8m}{15}$. Si nous écrivons qu'elle vérifie (4) puis (1), nous aurons les deux conditions cherchées

$$2n = 5 \times \frac{8^3}{15^3} m^3 - 4 \times \frac{8^2}{15^2} m^3 = 4 \times \frac{8^2}{15^2} m^3 \left(\frac{2}{3} - 1 \right) = -\frac{4}{3} \times \frac{8^2}{15^2} m^3,$$

ou

$$(5) \quad n = -\frac{2}{3} \frac{8^2}{15^2} m^3$$

et

$$(6) \quad \begin{aligned} p &= \frac{8^3}{15^3} m^3 \left(\frac{8^3}{15^3} m^3 - \frac{8^2}{15^2} m^3 + \frac{2}{3} \times \frac{8^2}{15^2} m^3 \right) \\ &= \frac{8^4}{15^4} m^3 \left(\frac{8}{15} - 1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{5} \times \frac{8^4}{15^4} m^3. \end{aligned}$$

Afin de simplifier l'écriture, il convient de poser

$$-\frac{8m}{15} = a.$$

On a alors

$$m = -\frac{15a}{8}, \quad n = \frac{5}{4} a^3, \quad p = -\frac{3}{8} a^3,$$

de sorte que l'équation la plus générale qui soit de la forme (1) et qui possède une racine triple non nulle peut s'écrire

$$(7) \quad x^3 + \frac{15}{8} a x^2 + \frac{5}{4} a^3 x^2 - \frac{3}{8} a^3 = 0,$$

où a désigne une constante quelconque, qui n'est autre que la racine triple.

A priori, (7) doit être divisible par $(x - a)^3$. Effectivement, si l'on fait la division, on trouve un quotient exact égal à

$$x^2 + \frac{9}{8} a x + \frac{3}{8} a^2.$$

Les racines de (7) autres que la racine triple sont donc données par l'équation

$$(8) \quad x^2 + \frac{9}{8} a x + \frac{3}{8} a^2 = 0.$$

Elles sont imaginaires.

6. Déterminer m pour que l'équation $m.x^3 + m^2.x^2 + x + m = 0$ ait une racine double.

Les équations dérivée et dérivée par rapport à la variable d'homogénéité sont

$$(1) \quad 3mx^2 + 2m^2x + 1 = 0,$$

$$(2) \quad m^2x^2 + 2x + 3m = 0.$$

Éliminons x (n° 234)

$$(9m^2 - m^2)^2 - (6m - 2m^4)(6m^3 - 2) = 0.$$

On peut diviser par m , qui ne saurait manifestement être nul. Il vient alors, en posant $m^3 = u$,

$$64u - 4(3 - u)(3u - 1) = 0;$$

ou

$$u^2 + 2u - 1 = 0,$$

d'où

$$u = -1, \quad m = -1.$$

Si m possède cette valeur, la racine double de l'équation proposée est la solution commune à (1) et (2). Elle vérifie

$$(1) + 3.(2) = 0,$$

c'est-à-dire $x = 1$. L'autre racine est donnée, par exemple, par le produit des trois racines, qui est -1 ; elle est donc égale à -1 .

7. Déterminer p et q pour que l'équation

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + px + q = 0$$

n'ait que deux racines distinctes.

Une première méthode consiste à écrire que le plus grand commun diviseur entre le premier membre $f(x)$ et sa dérivée est du second degré, en vertu du théorème du n° 229. A cet effet, on effectue la recherche de ce plus grand commun diviseur par la méthode de la division (n° 206), et quand on a au diviseur un polynôme du second degré, on annule le reste correspondant. Ce reste étant du premier degré, on obtient deux équations de condition, d'où l'on tire p et q . Nous conseillons au lecteur de faire ce calcul, à titre d'exercice.

Nous allons suivre une méthode différente, qui donne lieu à des calculs plus simples.

Observons d'abord que deux cas seulement peuvent se présenter :

Premier cas. — Deux racines doubles. — Dans ce cas, $f(x)$ est le carré d'un trinôme du second degré, soit

$$(1) \quad x^4 + 4x^3 + 2x^2 + px + q = (x^2 + \lambda x + \mu)^2.$$

Égalant les termes en x^3 et en x^2 , nous avons successivement

$$(2) \quad \lambda = 2, \quad \mu = -3.$$

Égalant ensuite les termes en x et constant, nous obtenons

$$(3) \quad p = -12, \quad q = 9.$$

Voilà donc une première solution, qui correspond à deux racines doubles, données par l'équation

$$(4) \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

et, par conséquent, égales à 1 et -3 .

Deuxième cas. — Une racine triple et une racine simple. — La racine triple z doit annuler les deux premières dérivées; donc

$$(5) \quad z^3 + 3z^2 - z + \frac{p}{4} = 0,$$

$$(6) \quad 3z^2 + 6z - 1 = 0.$$

L'équation (6) a tous ses coefficients numériques. On en tire deux valeurs réelles pour z . Choissant l'une d'elles, on la porte dans (5) et l'on obtient, en tenant compte de (6),

$$(7) \quad p = \frac{4}{3}(8z - 1).$$

Portant enfin dans l'équation proposée, ou plus simplement dans l'équation dérivée deux fois par rapport à la variable d'homogénéité (n° 227), on a

$$(8) \quad -z^2 - \frac{3p}{2}z + 3q = 0,$$

d'où

$$(9) \quad q = \frac{3z^2 + 5}{3}.$$

Les équations (6), (7), (9) nous fournissent donc deux nouvelles solutions. Pour chacune d'elles, z est racine triple; la racine restante β est donnée par la somme -4 des quatre racines, c'est-à-dire que $\beta = -(4 + 3z)$.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Soit l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, de racines x_1, x_2, x_3 .
Trouver la condition pour que l'on ait

$$(I) \quad x_1 x_2 = -1,$$

$$(II) \quad x_1 + x_2 = m x_3 \quad (m \neq -1),$$

$$(III) \quad x_3 = \sqrt{x_1 x_2},$$

$$(IV) \quad \frac{2}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

[Pour (I), (II), (III), une des relations entre les coefficients et les racines donne immédiatement x_3 . Il suffit de porter ensuite cette valeur dans l'équation proposée, pour avoir la condition cherchée. Pour (IV), prendre l'équation aux inverses (n° 242, III).]

2. Étant donnée l'équation précédente, trouver la condition pour que l'on ait

$$x_1 - x_2 = x_1 x_2 - m x_3 \quad (m \neq -1).$$

Comment peut-on résoudre l'équation dans ce cas?

3. Étant donnée l'équation $x^3 + px + q = 0$, exprimer que deux de ses racines ont un rapport constant, ou que l'une d'elles est égale au carré de l'autre.

4. Étant donnée l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, on désigne ses racines par $\tan A, \tan B, \tan C$. Trouver la condition pour que l'on ait $2A + B + C = 0$.

Cette condition étant supposée remplie, on pose $1 - b = \gamma$, $a - c = z$, et l'on demande de discuter la réalité des angles B et C suivant la position du point de coordonnées γ et z dans le plan $\gamma O z$.

Application numérique. — Calculer en grades les angles A, B, C, en supposant $\gamma = 3$, $z = 3$.

5. Les coefficients de l'équation du n° 1 étant supposés réels, on suppose que la racine x_3 est seule réelle, les deux autres étant imaginaires conjuguées (n° 249). Soient M_1, M_2, M_3 les points d'affixes x_1, x_2, x_3 . Trouver la condition qui doit lier les coefficients a, b, c, d pour que le triangle M_1, M_2, M_3 soit rectangle en M_3 ou équilatéral (E. P., 1909).

[On doit avoir

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3\right)^2 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} = 0,$$

dans le premier cas, et

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(x_1 - x_2)^2 = 0,$$

dans le second cas].

6. Condition pour que l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ aient deux racines dont la somme soit égale à la somme des deux autres. Résoudre l'équation dans cette hypothèse.

7. Déterminer m pour que l'équation $x^4 + x^3 + mx^2 + 3x + 2 = 0$ ait deux racines dont la somme soit égale au produit des deux autres. Résoudre ensuite l'équation obtenue.

8. Déterminer m pour que l'équation $x^5 - 6x^3 - x^2 + mx + 4 = 0$ ait deux racines de somme nulle.

9. Comment peut-on résoudre une équation algébrique sachant que ses racines sont en progression arithmétique?

(Les deux premières relations entre les coefficients et les racines permettent de calculer la plus petite racine et la raison.)

10. Déterminer trois nombres a, b, c pour qu'ils soient racines de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (E. P., 1911).

(Se servir des relations entre les coefficients et les racines.)

11. Étant donnée l'équation $x^3 + px + q = 0$, calculer

$$\Sigma a^3b, \quad \Sigma \frac{a}{b}, \quad \Sigma a^3bc, \quad (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2).$$

12. Étant donnée la même équation, former l'équation du second degré qui a pour racines $ab^2 + bc^2 + ca^2$ et $ac^2 + ba^2 + cb^2$.

[On peut calculer la somme et le produit; ou bien remarquer que la différence de ces deux quantités est égale à $(a - b)(b - c)(c - a)$, dont on sait calculer le carré (Exercice résolu n° 4).]

13. Calculer

$$\begin{aligned} \Sigma a^3bc & \quad \text{pour} \quad x^3 + px + q = 0, \\ \Sigma a^2b^2cd & \quad \text{pour} \quad x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0, \\ \Sigma \frac{a}{bc} & \quad \text{pour} \quad x^8 + x^6 - 1 = 0. \end{aligned}$$

14. Étant donnée l'équation binôme $x^m = 1$, calculer S_p pour les différentes valeurs de p .

15. Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés sont racines de l'équation $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (E. P., 1909).

[Appliquer la formule bien connue $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.]

16. Calculer trois nombres connaissant leur somme, la somme de leurs carrés et la somme de leurs cubes.

(Écrire les formules de Newton pour l'équation du troisième degré dont ces nombres sont les racines.)

17. Résoudre le système

$$x + y + z = 0, \quad x^4 + y^4 + z^4 = 50, \quad x^5 + y^5 + z^5 = -50 \quad (\text{E. P., 1912}).$$

(Cf. Exercice précédent.)

18. Condition pour que les équations

$$x^3 + px + q = 0, \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad x^4 + px^3 + q = 0$$

aient une racine double.

19. Déterminer m pour que l'équation

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + m = 0$$

ait une racine double.

20. Déterminer m, n pour que l'équation

$$x^4 + mx^3 + 2x + n = 0$$

ait une racine triple.

21. Déterminer m, n, p pour que l'équation

$$x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p = 0$$

ait une racine quadruple.

22. Déterminer m, n pour que l'équation

$$x^3 - 35x^2 + 36x + m = 0$$

n'ait que trois racines distinctes.

23. Déterminer m, n, p, q pour que l'équation

$$x^6 - 18x^4 + 6mx^3 + 6nx^2 + 6px + q = 0$$

n'ait que deux racines distinctes.

[On montrera qu'il doit exister une identité de la forme

$$f'(x) \equiv (x - \alpha)f_1',$$

En identifiant terme à terme, on aura des équations pour déterminer m, n, p, q, α .]

24. Séparer les ordres de multiplicité de l'équation

$$x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0.$$

CHAPITRE XIX.

ÉLIMINATION.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Déterminer p et q pour que les équations

$$(1) \quad x^3 - 7x + q = 0,$$

$$(2) \quad x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x + p = 0$$

aient deux racines communes.

Nous allons écrire que le plus grand commun diviseur est du second degré (n° 230)

	$x + 3$	$x + \frac{q-10}{4}$
$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x + p$	$x^3 - 7x + q$	$4x^2 + (10-q)x - p - 3q$
$3x^3 - 4x^2 - (11-q)x + p$	$4x^3 - 28x + 4q$	
$4x^2 + (10-q)x + p - 3q$	$(q-10)x^2 - (3q-p-28)x - 4q$	
	$\left[3q-p-28 + \frac{(q-10)^2}{4} \right]x + 4q + (p-3q)\frac{(10-q)}{4}$	

Annulons le reste correspondant au diviseur du second degré

$$(3) \quad 4(3q-p-28) + (q-10)^2 = 0,$$

$$(4) \quad 16q - (p-3q)(10-q) = 0.$$

Éliminons p , par la combinaison $(10-q).(3) + 4.(4)$; il vient

$$(5) \quad (q-10)^3 - 4 - 28(q-10) - 4^3q = 0.$$

Nous simplifierons cette équation en posant

$$(6) \quad q - 10 = 4u,$$

il vient, en effet,

$$(7) \quad u^3 - 11u - 10 = 0.$$

Ayant u , (6) donne q ; puis de (3) on tire

$$(8) \quad p = 2(2u^2 + 6u + 1).$$

Les racines communes à (1) et (2) sont obtenues en annulant le plus grand commun diviseur

$$(9) \quad x^2 - ux - u^2 - 7 = 0.$$

La troisième racine de (1) est $-u$, car la somme des trois est nulle et la somme des deux premières est u , d'après (9).

Les troisième et quatrième racines de (2) sont données par

$$(10) \quad x^2 - (u - 3)x + 3u - 4 = 0,$$

comme on le voit en calculant le quotient de (2) par (9), ce qu'on peut faire en négligeant, au diviseur et dans les restes partiels, tous les termes de degré plus petit que 2.

Le problème admet trois solutions, qui correspondent aux trois racines de (7). — Parmi celles-ci, la racine $u = -1$ saute aux yeux et donne $q = 6$, $p = -6$, 2 et -3 comme racines communes, 1 comme troisième racine de (1), -1 comme troisième et quatrième racines de (2). — Les deux autres racines de (7) sont données par

$$(11) \quad u^2 - u - 10 = 0;$$

elles sont réelles, mais incommensurables. Si l'on tient compte de (11), les équations (8) et (9) se simplifient un peu et s'écrivent

$$(12) \quad p = 2(8u + 21),$$

$$(13) \quad x^2 - ux + u + 3 = 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin de prouver que la plus petite racine de (11) donne seule des racines réelles pour (13), ainsi que pour (10).

2. Éliminer x entre les deux équations

$$(1) \quad x^3 - 4mx^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$(2) \quad 2x^3 - (m + 1)x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Nous allons nous ramener à deux équations du second degré (n° 236).

Multiplions (1) par -2 et ajoutons à (2)

$$(3) \quad (x - 7m)x^2 - x - 3 = 0.$$

Multiplions (2) par -2 , ajoutons à (1) et divisons par x , en remar-

quant que zéro ne peut jamais être racine commune

$$(4) \quad -3x^2 - 2(m-2)x + 7 = 0.$$

Annulons enfin le résultant de (3) et (4),

$$[(2-7m)7-9]^2 - [2(2-7m)(m-2)+3][7+6(m-2)] = 0$$

ou

$$(5) \quad 28m^3 + 713m^2 - 100m = 0.$$

Il y a donc trois valeurs de m pour lesquelles les équations proposées ont une racine commune. Cette dernière peut être obtenue par la combinaison linéaire $7 \cdot (3) + 3 \cdot (4)$, qui donne, en enlevant le facteur x ,

$$(6) \quad x = \frac{6m-7}{19m-5}.$$

En particulier, pour $m=0$, la racine commune est 1.

Autre méthode. — Éliminons m entre les équations proposées, au moyen de la combinaison $-(1) + 4(2)$; nous obtenons une équation à coefficients tous numériques :

$$(7) \quad 7x^3 + 8x^2 - 17x + 2 = 0,$$

dont les racines sont les racines communes possibles de (1) et (2).

Ayant calculé l'une d'elles, on aura la valeur de m correspondante en la substituant à x dans (1), par exemple, ou mieux dans (6).

Si l'on tenait à avoir l'équation du troisième degré en m qui constitue effectivement le résultat de l'élimination, c'est-à-dire l'équation (5), il suffirait de remplacer x par l'expression (6) dans (7). Mais, un tel calcul est inutile si l'on cherche seulement les valeurs de m pour lesquelles il y a racine commune. Il suffit en effet, pour cela, de résoudre l'équation (7). Or, on aperçoit aisément la racine $x=1$. Après division par $x-1$, il reste l'équation du second degré $7x^2 + 15x - 2 = 0$.

3. Éliminer x entre les équations

$$(1) \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

$$(2) \quad x^2 + px + q = 0.$$

Remplaçons dans (1) x^4 par $(px+q)^2$ et x^3 par $-x(px+q)$, nous obtenons l'équation du second degré

$$(3) \quad x^2(p^2 - ap - b) - x(2pq - aq + c) + q^2 + d = 0.$$

Il ne nous reste plus qu'à annuler le résultant de (2) et (3) :

$$(q^2 - d - qp^2 - apq - bq^2 - (2pq - aq + c - p^2 - ap^2 - bp)(pd - pq^2 - aq^2 - cq) = 0.$$

4. Résoudre le système

$$(1) \quad 5x^2 - 5x^2 - 3x - 9x = 0,$$

$$(2) \quad 5x^3 - 5x^3 - 15x^2 - 15x^2 - x^2 = 0.$$

Éliminons x (n° 237). A cet effet, multiplions (1) par x , (2) par -1 et ajoutons

$$(3) \quad 10x^2 - 10x^2 - 15x^2 - 15x^2 - x^2 = 0.$$

Annulons le résultant de (1) et (3) par rapport à x :

$$x^2[10(9 - 5x) - 5x(1 - 5x)]^2 + x^2[(10 - 5x)(9 - 5x) - 3(1 - 5x)][36 - 5x(12 - 5x)] = 0,$$

ou

$$x^2[-(25x^2 - 5 \times 13x + 12 \times 9)^2 + (25x^2 - 5 \times 3)(x - 3 \times 6)(10 - 5x^2 + 5 \times 12x - 36)] = 0,$$

ou

$$x^2(25 \times 150x^3 - 25 \times 58x^2 - 50 \times 39x - 36 \times 3 \times 175) = 0$$

ou, en divisant par 150,

$$(4) \quad x^2(25x^3 - 88x^2 - 13x - 126) = 0.$$

A chaque racine de cette équation correspond pour x la racine commune à (1) et à (3), que l'on peut obtenir par la combinaison $-12 \cdot (1) + 5 \cdot (3)$, ce qui donne

$$(5) \quad x = \frac{25x^3 - 65x^2 - 108x}{-25x^2 - 110x - 36}.$$

Nous avons d'abord la solution $y = 0$, $x = 0$. L'équation (4) admet ensuite la racine $y = -1$, à laquelle correspond

$$x = \frac{-198}{-99} = 2.$$

En divisant (4) par $y^2(y+1)$, il reste l'équation du second degré

$$(6) \quad 25y^2 - 113y - 126 = 0,$$

dont les racines sont

$$\frac{113 \pm \sqrt{169}}{50} = \frac{113 \pm 13}{50} = \frac{1}{5}, \frac{6}{5}.$$

auxquelles correspondent des valeurs de x données par (5), qui peut s'écrire, en tenant compte de (6).

$$(7) \quad x = 6y \frac{8y - 3}{-3y + 16},$$

ce qui donne les deux solutions

$$y = 2, \quad x = 1; \quad y = 2, 52, \quad x = 15, 12 \frac{429}{3861} = 1,68.$$

3. Résoudre le système $x^3 = 7x + 3y$, $y^3 = 7y + 3x$ (E. P., 1911). — Si l'on change x en y et y en x , les deux équations ne font que s'échanger. Le système est donc symétrique. Du reste, il est équivalent au suivant, obtenu par addition et soustraction,

$$(1) \quad x^3 + y^3 = 10(x + y),$$

$$(2) \quad x^3 - y^3 = 4(x - y).$$

Chacune de ces équations se décompose, de sorte que notre système équivaut aux quatre suivants :

$$(I) \quad x + y = 0, \quad x - y = 0;$$

$$(II) \quad x + y = 0, \quad x^2 + xy + y^2 = 4;$$

$$(III) \quad x^2 - xy - y^2 = 10, \quad x - y = 0;$$

$$(IV) \quad x^2 - xy - y^2 = 10, \quad x^2 - xy - y^2 = 4.$$

Les trois premiers donnent les solutions suivantes :

$$(5) \quad x = y = 0, \quad x = -y = \pm 2, \quad x = y = \pm \sqrt{10}.$$

Pour résoudre le dernier, nous ajoutons et retranchons

$$x^2 + y^2 = 7, \quad xy = -3,$$

d'où

$$(x - y)^2 = 1, \quad x + y = -1;$$

de sorte que x et y sont racines de l'une ou l'autre des deux équations $z^2 \pm z - 3 = 0$.

Ceci conduit aux solutions

$$(4) \quad x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \quad y = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \quad x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \quad y = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2};$$

$$(5) \quad x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad y = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; \quad x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \quad y = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

On a en tout 9 solutions.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Déterminer p et q pour que les équations

$$x^4 - 6x^2 + px - 3 = 0, \quad x^3 - x^2 - qx + 2 = 0$$

aient deux racines communes.

2. Déterminer p , q , r pour que les équations

$$x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 - px + q = 0, \quad x^5 + x^4 - 3x^3 - x^2 - rx + 3 = 0$$

aient trois racines communes.

3. Éliminer x entre les équations

$$x^3 - (m + 1)x^2 + (3m + 10)x - 12 = 0$$

et

$$x^4 - (m + 8)x^2 + (m + 16)x - 3 = 0;$$

$$x^3 - mx^2 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad x^3 - mx - 2 = 0;$$

$$x^4 - 3x^3 - x^2 - 5x + m = 0 \quad \text{et} \quad x^4 - x^3 - 3x^2 - 4x + 2m = 0;$$

$$x^3 + ax + b = 0 \quad \text{et} \quad x^3 + a'x + b' = 0;$$

$$x^3 + ax + b = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + a'x + b' = 0.$$

4. Résoudre les systèmes

$$2x - 3y + 1 = 0, \quad x^2 - xy + y^2 - 2x + y + 1 = 0;$$

$$2x^2 + y^2 - 3x + 2y + 2 = 0, \quad x^2 + y^2 - xy + 2x + y = 0,$$

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p, \quad x^2 + y^2 = R^2 \quad (\text{poser } x \sin \varphi + y \cos \varphi = q);$$

$$x^3 = ax + by, \quad y^3 = ay + bx;$$

$$x + y + 2z = 4, \quad x^2 + y^2 + 4z^2 + z = 1, \quad x^3 + y^3 + z^3 + 5z = 4;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a, \quad xy + yz + zx = b, \quad x^3 + y^3 + z^3 = c;$$

$$xy + zt = at + ty = xt + yz = a, \quad x + y + z + t = b,$$

5. Résoudre le système

$$x^2 = y^x, \quad x^y = y^x \quad (\text{E. P., 1906}).$$

(Prendre les logarithmes et diviser membre à membre.)

6. *Résolution de l'équation du troisième degré.* — Soit l'équation

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0,$$

On pose $x = y + z$ et l'on détermine y et z par les équations

$$3yz + p = 0, \quad y^3 + z^3 + q = 0.$$

Déduire de là que les trois racines de (1) sont données par la formule (de Cardan)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

les deux racines cubiques étant associées de manière que leur produit soit $-\frac{p}{3}$. Cf. *Leçons*, n° 280.)

CHAPITRE XX.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Former l'équation aux carrés des racines de l'équation*

$$(1) \quad x^4 + mx^3 + \frac{m^2}{2}x^2 + mpx + p^2 = 0.$$

Nous allons éliminer x entre (1) et

$$(2) \quad y = x^2.$$

En tenant compte de (2), (1) s'écrit

$$(3) \quad y^2 + mxy + \frac{m^2}{2}y + mpy + p^2 = 0,$$

d'où

$$(4) \quad x = -\frac{y^2 + \frac{m^2}{2}y + p^2}{m(y + p)}.$$

Portons dans (2)

$$\left(y^2 + \frac{m^2}{2}y + p^2\right)^2 = y^2 m^2 (y + p)^2,$$

ou

$$(5) \quad y^4 + y^2 \left(2p^2 - 2pm^2 - \frac{m^4}{4}\right) - p^4 = 0.$$

On obtient une équation bicarrée. L'ayant résolue (n° 242), on aura les quatre racines de (1) par l'application de la formule (4).

Il convient toutefois d'observer ici que *cette formule n'est valable que si* $m(y + p) \neq 0$. Le cas où $m = 0$ n'offre aucun intérêt, car l'équation (1) se réduit alors à $x^4 + p^2 = 0$. Voyons maintenant ce qui se passe si $y = -p$. En portant cette valeur dans (3), on a la condition $p = \frac{m^2}{4}$.

Si cette condition est remplie, l'équation (1) est vérifiée pour

$$x = \pm \sqrt{-p} = \pm i \frac{m}{2}.$$

Son premier membre est divisible par $x^2 + p$; on trouve d'ailleurs pour quotient

$$x^2 + m.x + \frac{m^2}{4} = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2.$$

Les racines de (1) sont donc, dans ce cas, $\pm i \frac{m}{2}$ et $-\frac{m}{2}$, qui est racine double.

Revenons au cas général pour discuter la *réalité des racines*. Observons d'abord que, d'après (2) et (4), x et y sont réels en même temps. Or, pour que (5) ait des racines réelles, il faut d'abord que l'on ait

$$\left(2p^2 - 2pm^2 + \frac{m^4}{4}\right)^2 - 4p^4 \geq 0,$$

ou

$$(6) \quad m^2 \left(2p - \frac{m^2}{2}\right)^2 \left(2p - \frac{m^2}{4}\right) = 0.$$

Écartant les cas déjà examinés de $m = 0$, $p = \frac{m^2}{4}$, nous avons la condition

$$(7) \quad p \leq \frac{m^2}{8}.$$

En second lieu, l'équation (5), considérée comme du second degré en y^2 , doit avoir au moins une racine positive. Mais, ses deux racines ont le même signe, car leur produit p^2 est positif. Il faut donc que la somme soit positive, ce qui se traduit par

$$(8) \quad 2p^2 - 2pm^2 + \frac{m^4}{4} \leq 0.$$

Le premier membre est un trinôme du second degré en p ; ses racines sont $\frac{m^2}{4}(2 \pm \sqrt{2})$; et p doit être compris entre elles. Mais, cette dernière condition est incompatible avec (7), si l'on observe que $\frac{m^2}{4}(2 - \sqrt{2}) > \frac{m^2}{8}$. Il s'ensuit que l'équation (1) n'a jamais aucune racine réelle, sauf le cas où $p = \frac{m^2}{4}$.

2. *Faire la transformation*

$$(1) \quad y = x - x^2$$

sur l'équation

$$(2) \quad x^4 - x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (\text{E. P., 1912}).$$

Il nous faut éliminer x entre (1) et (2). En tenant compte de (1), (2) s'écrit

$$(2 - y)^2 + x(2 - y) - 4(2 - y) - 4x + 1 = 0$$

ou

$$x = \frac{y^2 - 3}{y - 2}.$$

Portant dans (1), il vient

$$(y^2 - 3)^2 + (y - 2)(y + 2)^2 = 0$$

ou

$$y^4 + y^3 - 4y^2 - 4y + 1 = 0.$$

On retombe sur l'équation proposée. Il semble donc que la transformation soit inutile au point de vue de la recherche des racines. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Ce qui précède nous apprend que *si x est une racine de (2), $2 - x^2$ en est une autre*, d'ailleurs distincte de x , car on ne peut avoir $x = 2 - x^2$ que pour $x = 1$ ou -2 , valeurs qui ne vérifient pas (2).

Les racines de (2) sont donc de la forme $x, \tilde{x}, 2 - x^2, 2 - \tilde{x}^2$.

Si l'on pose $x + \tilde{x} = p, x\tilde{x} = q$, on a

$$(2 - x^2) + (2 - \tilde{x}^2) = 4 - p^2 + 2q$$

et

$$(2 - x^2)(2 - \tilde{x}^2) = 4 - 2p^2 + 4q + q^2 = (q - 2)^2 + 2p^2.$$

On en conclut qu'il doit exister une identité de la forme

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 \\ = (x^2 - px - q)[x^2 + (p^2 - 2q - 4)x + (q + 2)^2 - 2p^2]. \end{aligned}$$

Autrement dit, le système

$$(3) \quad 1 = p^2 - 2q - 4 + p,$$

$$(4) \quad -4 = (q + 2)^2 - 2p^2 - p^3 + 2pq + 4p - q,$$

$$(5) \quad -4 = -p(q - 2)^2 + 2p^3 - qp^2 - 2q^2 - 4q,$$

$$(6) \quad 1 = q(q + 2)^2 - 2p^2q,$$

doit être compatible.

Multiplions (4) par p et ajoutons à (5)

$$-4 - 4p = -p^4 + 3p^2q + 4p^2 + pq - 2q^2 -$$

ou, en remplaçant q par sa valeur $\frac{p^2 - p - 5}{2}$ tirée de (3).

$$(7) \quad p^2 + p - 1 = 0;$$

moyennant quoi on a

$$(8) \quad q = -(p + 2).$$

Si, dans (4), (5), (6), on remplace maintenant p^2 par $1 - p$ et q par $-(p + 2)$, on constate qu'on obtient des identités.

Finalement, l'équation proposée se décompose en deux équations du second degré, obtenues en remplaçant p par les deux racines réelles de (7) dans

$$(9) \quad x^2 - px - (p + 2) = 0,$$

ce qui donne

$$x = \frac{p \pm \sqrt{3(p+3)}}{2}$$

(en remplaçant p^2 par $1 - p$ sous le radical), avec $p = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; d'où les quatre racines

$$x_1 = -1,89, \quad x_2 = -1,34, \quad x_3 = 0,21, \quad x_4 = 1,95,$$

calculées à $\frac{1}{100}$ près.

Comme vérification facile, on constate que la somme est bien égale à -1 .

3. THÉORÈME. — *Toute transformation rationnelle effectuée sur une équation du troisième degré peut être ramenée à une transformation entière du second degré au plus ou à une transformation homographique.*

Soit l'équation du troisième degré

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

et la transformation rationnelle

$$(2) \quad y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

où φ et ψ désignent deux polynômes quelconques, le second étant pre-

nier avec $f(x)$, afin que y reste fini pour toutes les racines de (1). En vertu de cette hypothèse, on peut trouver deux polynômes U et V donnant lieu à l'identité (n° 209)

$$(3) \quad U f(x) + V \varphi(x) \equiv 1.$$

Si l'on y remplace x par une racine de (1), on obtient

$$(4) \quad \frac{1}{\varphi(x)} = V.$$

En portant dans (3), on obtient la transformation entière équivalente $y = V \varphi(x)$. Mais, si $V \varphi(x)$ est de degré > 2 , on peut le diviser par $f(x)$, ce qui donne l'identité

$$(5) \quad V \varphi(x) = f(x)Q + R(x),$$

$R(x)$ étant au plus du second degré. En y remplaçant x par une racine de $f(x)$, on voit que $V \varphi(x)$ et $R(x)$ prennent la même valeur; de sorte que la transformation (2) équivaut finalement à la transformation entière du second degré ⁽¹⁾

$$(6) \quad y = R(x).$$

Je dis maintenant que cette dernière équivaut à une transformation homographique. En effet, divisons $f(x)$ par $R(x)$; nous avons

$$f(x) \equiv R(x)Q(x) + \varphi(x),$$

$Q(x)$ et $\varphi(x)$ désignant deux polynômes du premier degré.

Si x vérifie (1), on a

$$R(x) = -\frac{\varphi(x)}{Q(x)};$$

de sorte que (6) équivaut à la transformation homographique

$$(7) \quad y = -\frac{\varphi(x)}{Q(x)}.$$

4. Calculer $\sum \frac{ab}{(a^2 - a^2 - 1)(b^2 - b^2 - 1)}$ pour les racines a, b, c de l'équation

$$(1) \quad x^3 - x^2 + x + 1 = 0.$$

⁽¹⁾ Le lecteur démontrera de la même façon que toute transformation rationnelle effectuée sur une équation du n^{me} degré équivaut à une transformation entière de degré $n-1$ au plus.

Nous allons faire la transformation

$$(2) \quad y = \frac{x}{x^2 - x^2 - 1},$$

puis, nous calculerons la somme des produits deux à deux des racines de l'équation transformée.

Nous pourrions, d'après le théorème de l'exercice précédent, nous ramener à une transformation homographique. Il est plus rapide de procéder directement. Contentons-nous seulement, comme simplification préliminaire, de remplacer le dénominateur de (2) par son reste de division par (1), à savoir $-(2x^2 + 3x + 2)$. Nous avons alors à éliminer x entre (1) et $y = -\frac{x}{2x^2 + 3x + 2}$, ou

$$(3) \quad 2x^2y + x(3y + 1) + 2y = 0.$$

La combinaison $2xy \cdot (1) - (3)$ nous donne, en divisant par x , qui ne peut être nul,

$$(4) \quad 2yx^2 + 4xy + y + 1 = 0.$$

Cette équation peut remplacer (1), à condition que $y \neq 0$.

Annulons le résultant de (3) et (4) :

$$(5) \quad 4y^2(y - 1)^2 + 2y(7y + 1)[(3y + 1)(y - 1) + 8y^2] = 0.$$

En divisant par $2y$, qui est un facteur étranger, nous obtenons l'équation transformée. Il nous suffit d'ailleurs d'en calculer les coefficients de y^3 et de y ; on trouve 79 et -7 . La somme cherchée est donc $-\frac{7}{79}$.

3. Former l'équation aux carrés des différences des racines de

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0.$$

Première méthode. — Soient a, b, c les trois racines. Nous devons faire la transformation du second ordre $y = (a - b)^2$. Mais, elle est symétrique et peut être ramenée à une transformation du premier ordre (n° 213). Effectivement, on peut écrire

$$(2) \quad y = (a - b)^2 = 4ab - c^2 + 4\frac{q}{c}.$$

L'équation transformée sera donc obtenue en éliminant x entre (1) et $y = x^2 - \frac{4q}{c}$, ou, en chassant le dénominateur et remplaçant x^3

par $-(p.r + q)$,

$$(3) \quad x = \frac{3q}{x-p}.$$

Portant cette valeur dans (1), nous obtenons l'équation demandée

$$(4) \quad y^3 + 6p.y^2 + 9p^2.y + 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Deuxième méthode. — Appliquons la méthode générale décrite au n° 247. Posons

$$u = \frac{a+b}{2}, \quad v = \frac{a-b}{2},$$

d'où

$$a = u + v, \quad b = u - v.$$

Écrivons que a et b vérifient (1) :

$$(5) \quad (u+v)^3 - p(u+v) + q = 0,$$

$$(6) \quad (u-v)^3 - p(u-v) + q = 0;$$

d'où l'on déduit, par addition et soustraction,

$$(7) \quad u^3 + 3uv^2 + pu + q = 0,$$

$$(8) \quad 3u^2 + v^2 + p = 0 \quad (\text{en divisant par } v).$$

Posant $v^2 = \frac{y}{4}$ et éliminant u , nous aurons l'équation cherchée. En tenant compte de (8), (7) s'écrit

$$2u(y+p) + 3q = 0.$$

On en tire u et, en portant dans (8), on retrouve l'équation (4).

Remarque. — En prenant le produit des racines de (4), on retrouve la formule établie à l'exercice résolu n° 4 du Chapitre XVIII.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Former les équations aux carrés et aux cubes des racines des équations complètes du troisième et du quatrième degré.

2. Faire la transformation $y = x^2 - x$ sur l'équation

$$x^4 - x^3 + x^2 - 9x + 6 = 0.$$

3. Faire la transformation $y = x^2 + x$ sur l'équation

$$3x^4 + 10x^3 - 7x^2 - 8x - 9 = 0.$$

4. Étant donnée l'équation $x^3 + px + q = 0$, trouver m et n tels que l'une ou l'autre des transformations

$$y = x^2 + mx + n, \quad y = \frac{x+m}{x+n}$$

conduise à une équation binôme en y . Dédurre de là une méthode de résolution algébrique de l'équation du troisième degré.

5. Étant donnée l'équation $x^3 + x - 1 = 0$, trouver une transformation homographique équivalente à $y = \frac{x^5}{x^2 - 1}$.

(On peut suivre la méthode décrite à l'exercice résolu n° 3. On peut aussi se ramener d'abord à $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$; puis déterminer A, B, C, D pour que l'égalité $\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ soit entraînée par $x^3 = 1 - x$.)

6. Calculer $\sum \frac{a+2}{a-1}$ pour l'équation $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$.

7. Appliquer à l'équation $3x^3 - 3x^2 + 33x - 25 = 0$ la méthode de résolution du n° 4.

8. Résoudre et discuter l'équation

$$x^4 + mx^3 + 2mx^2 + mx + 1 = 0.$$

9. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+2a} + \frac{1}{x+3a} + \frac{1}{x+4a} = 0 \quad (\text{E. P., 1908}).$$

(Poser $x + 2a = y$.)

10. Étant donnée l'équation $x^3 + px + q = 0$, de racines x_1, x_2, x_3 , former l'équation qui a pour racines les quantités telles que $x_1^2 + x_2^2$, ou $\frac{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2}{x_3}$.

11. Étant donnée la même équation, calculer $\sum \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + mx_1 x_2}$.

12. Faire la transformation $y = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}$ pour l'équation complète du troisième degré.

(On pourra utiliser les relations entre les coefficients et les racines.

On calculera, par exemple, x_2 et x_3 en fonction de x_1 et de y . On portera ensuite dans $\Sigma x_1 x_2$ et $x_1 x_2 x_3$ et l'on éliminera x_1 .)

13. Étant donnée l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, faire les transformations

$$(I) \quad y = x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$

$$(II) \quad y = x_1 x_2 + x_3 x_4.$$

En déduire deux méthodes de résolution algébrique de l'équation du quatrième degré. [Méthodes de Descartes (I) et de Ferrari (II).] (Cf. *Leçons*, n° 266.)

[Poser $x_1 + x_2 = p$, $x_1 x_2 = q$, $x_3 + x_4 = p'$, $x_3 x_4 = q'$. (Cf. exercice résolu n° 1. Chap. XVIII.)]

14. Faire, pour la même équation, la transformation

$$y = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4.$$

15. Faire, pour la même équation, la transformation

$$y = (x_1 x_2 x_3 x_4) \quad (\text{Note II}).$$

[*Équation aux 6 rapports anharmoniques*. Se ramène à la transformation (II) de l'exercice n° 13, suivie de la transformation du n° 12.

On doit constater que l'équation en y ne change pas quand on transforme l'équation en x par une transformation homographique quelconque (n° 322). En particulier, on peut faire disparaître le terme en x^3 .

L'équation en y doit être réciproque et demeurer invariante pour la transformation $y \mid 1 - y$ (n° 319).]

CHAPITRE XXI.

ÉQUATIONS À COEFFICIENTS RÉELS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Décomposer en facteurs réels du second degré le polynôme*

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c.$$

Nous commencerons par faire, au sujet de cette décomposition, les observations suivantes : Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de l'équation

$$(1) \quad f(x) = 0.$$

Si l'on ne se préoccupe pas de la réalité, il y a trois manières d'effectuer la décomposition : il suffit, en effet, d'associer le facteur linéaire $x - x_1$ successivement avec $x - x_2, x - x_3, x - x_4$, en associant entre eux les deux facteurs restants. On peut donc prévoir que *le problème va dépendre de la résolution d'une équation du troisième degré* ⁽¹⁾.

Si l'on suppose maintenant que a, b, c soient réels, il peut arriver que les quatre racines soient réelles, ou bien que deux soient réelles, par exemple x_1 et x_2 , les deux autres étant imaginaires conjuguées (n° 249) ; ou enfin que les quatre racines soient imaginaires, x_1 et x_3 étant respectivement conjuguées de x_2 et x_4 .

Dans le premier cas, les trois décompositions prévues sont réelles. Dans les deux autres cas, il faut associer $x - x_1$ avec $x - x_2$ pour obtenir un facteur réel ⁽²⁾ ; donc une seule décomposition est réelle.

Voyons maintenant comment on peut résoudre le problème sans calculer au préalable les racines de $f(x)$. Employons la *méthode des*

⁽¹⁾ D'où il résultera une nouvelle méthode de résolution algébrique de l'équation du quatrième degré ; car si l'on calcule une racine de l'équation du troisième degré à laquelle il est fait allusion, on en déduira la décomposition de l'équation (1) en deux équations du second degré. Rappelons, d'autre part, que l'équation générale du quatrième degré se ramène aisément à la forme (1). (n° 242, 1).

⁽²⁾ Rappelons que le produit de deux imaginaires conjuguées est réel (n° 33).

coefficients indéterminés et posons, en remarquant de suite que la somme des racines est nulle,

$$(2) \quad x^4 + ax^2 + bx + c \equiv (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \beta'),$$

Identifions

$$\beta + \beta' = \alpha^2 + a, \quad \beta' - \beta = \frac{b}{\alpha}, \quad \beta\beta' = c;$$

d'où

$$(3) \quad \beta = \frac{1}{2} \left(a + \alpha^2 - \frac{b}{\alpha} \right), \quad \beta' = \frac{1}{2} \left(a - \alpha^2 + \frac{b}{\alpha} \right);$$

puis, en posant $\alpha^2 = z$,

$$(4) \quad \varphi(z) \equiv z^3 + 2az^2 + (a^2 - \frac{1}{2}b)z - b^2 = 0.$$

Nos prévisions se vérifient. Ayant une racine de (4), on prend $\alpha = +\sqrt{z}$; puis, on calcule β et β' par (3), et l'on a une décomposition. En prenant $\alpha = -\sqrt{z}$, on retomberait sur la même, les deux facteurs ne faisant visiblement que s'échanger.

Le nombre des solutions réelles est égal au nombre des racines positives de (4). Or, $\varphi(0)$ et $\varphi(+\infty)$ ayant respectivement les signes — et +, il y a dans l'intervalle $(0, +\infty)$ un nombre impair de racines (n° 250), c'est-à-dire une ou trois ⁽¹⁾. Il y a donc bien *une ou trois décompositions réelles*.

2. THÉORÈME DES LACUNES. — *Le nombre des racines imaginaires d'une équation algébrique est au moins égal au nombre total n des racines imaginaires des équations binômes obtenues en annulant successivement tous les groupes de deux termes consécutifs.*

Pour que les équations binômes dont il est question donnent des racines imaginaires, il faut qu'il manque des termes dans l'équation proposée, ou, comme on dit, que son premier membre $f(x)$ *présente des lacunes*.

Soient V et V' les nombres de variations de $f(x)$ et $f(-x)$. Le nombre des racines imaginaires est au moins égal à $m - (V + V')$, en appelant m le degré de l'équation (n° 253). Or, nous allons prouver que cette différence est précisément égale à n .

A cet effet, imaginons que l'on complète $f(x)$ par des termes quelconques. Soient V_1 et V'_1 les nombres de variations présentés par le polynôme $f_1(x)$ obtenu et par $f_1(-x)$. On sait (n° 253) que $V_1 + V'_1 = m$.

---

(1) On pourrait aussi invoquer le théorème de Descartes. Il donnerait même le nombre exact des solutions réelles, dans le cas où $\varphi(z)$ a toutes ses racines réelles (n° 254).

D'autre part, soient $\Lambda_p x^p$ et $\Lambda_{p-q} x^{p-q}$ deux termes consécutifs quelconques de $f(x)$. Ils présentent une *lacune de $q-1$ termes*. Si q est impair, ils fournissent une unité dans $V+V'$; si q est pair, ils fournissent 0 ou 2 unités, suivant que Λ_p et Λ_{p-q} sont de même signe ou de signes contraires. Dans les trois cas, ils fournissent autant d'unités que l'équation binôme

$$(1) \quad \Lambda_p x^q + \Lambda_{p-q} = 0$$

a de racines réelles.

Si l'on considère maintenant dans $f_1(x)$ le groupe qui est limité par les deux termes ci-dessus, il donne q unités dans $V_1+V'_1$, c'est-à-dire un nombre égal au nombre total des racines de (1). Il en résulte, par conséquent, dans la différence $(V_1+V'_1) - (V+V')$, un nombre d'unités égal au nombre des racines imaginaires de (1).

Si l'on raisonne de même pour tous les groupes de deux termes consécutifs de $f(x)$, on voit que la différence

$$(V_1+V'_1) - (V+V') = m - (V+V')$$

est égale à la somme n des nombres de racines imaginaires de toutes les équations telles que (1).

C. Q. F. D.

Remarque. — Pour les équations à coefficients numériques, ce théorème ne présente aucune utilité, car il équivaut au calcul de la somme $V+V'$, lequel est alors immédiat. Pour les équations à coefficients littéraux, il peut servir quelquefois. En particulier, il arrive qu'en multipliant un polynôme complet par un facteur convenable, ne possédant que des racines réelles, on introduise des lacunes signalant l'existence de racines imaginaires au produit, donc aussi au polynôme primitif.

C'est ainsi qu'on peut établir certains théorèmes, tels que ceux de *de Gua* et *d'Hermite*. (Cf. Exercices proposés, nos 7 et 8.)

3. Trouver la limite supérieure des racines positives de l'équation

$$(1) \quad 3x^6 + x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Nous allons appliquer successivement les trois méthodes décrites aux nos 237 et 238, à titre de comparaison.

1^{re} *Règle de Newton.* — Les dérivées successives sont :

$$(2) \quad 18x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 5,$$

$$(3) \quad 90x^4 - 40x^3 - 48x^2 + 6x + 4,$$

$$(4) \quad 360x^3 - 120x^2 - 96x + 6,$$

$$(5) \quad 720x^2 + 240x - 96.$$

La quatrième admet une racine positive, qui est < 1 , car $x = 1$ donne, dans (5), un résultat positif. Le même nombre, substitué dans (4), (3) et (2), donne encore des résultats positifs. Mais, dans (1), on obtient -1 . Substituons 2; nous obtenons un résultat positif. Donc 2 est limite supérieure des racines positives.

2° *Règle des groupements.* — Considérons le polynôme (1) comme la somme des deux suivants :

$$(6) \quad 3x^6 - 4x^4 + 2x^2,$$

$$(7) \quad x^5 + x^3 - 5x,$$

$$(8) \quad 1.$$

Le premier $x^2(3x^4 - 4x^2 + 2)$ est toujours positif, car le trinôme en x^2 entre parenthèses a ses racines imaginaires. Le second peut s'écrire $x(x^4 + x^2 - 5)$. La racine positive du trinôme en x^2 est

$$\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} < \frac{-1 + 5}{2} = 2.$$

Donc, $\sqrt{2}$ est une limite supérieure des racines de ce trinôme. Comme (8) est positif, on voit qu'on peut prendre $\sqrt{2}$ comme limite supérieure.

3° *Règle de Lagrange.* — Elle donne, comme limite, $1 + \sqrt{\frac{5}{3}}$. On voit que la limite la plus rapprochée est donnée par la règle des groupements.

4. Rechercher les racines commensurables de l'équation

$$(1) \quad 8x^6 - 34x^5 + 14x^4 + 152x^3 - 76x^2 - 39x + 18 = 0.$$

Diviseurs du dernier terme : 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Diviseurs du premier terme : 1, 2, 4, 8.

Racines possibles : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2},$
 $\pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{9}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{9}{8}.$

Par la règle de Lagrange, nous déterminons les limites suivantes des racines :

Limite supérieure des racines positives : $1 + \frac{76}{8} < 11;$

Limite inférieure des racines positives : $\frac{1}{1 - \frac{76}{18}} > \frac{1}{6};$

Limite inférieure des racines négatives :

$$-\left(1 + \sqrt[3]{\frac{15}{8}}\right) = -(1 + \sqrt[3]{19}) > -6.$$

Limite supérieure des racines négatives : $-\frac{-1}{1 + \sqrt[3]{\frac{15}{8}}} < -\frac{1}{2}.$

Nous devons donc enlever du Tableau précédent $-6, -9, \pm 18, \pm \frac{1}{8}.$

Règle d'exclusion : $f(1) = 18, f(-1) = -140$; ce qui nous enlève

$$+1, +6, -9, +\frac{9}{2}, +\frac{9}{4}, +\frac{3}{8}, -3, \\ -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}, -\frac{3}{8}, -9$$

et

$$-2, -\frac{1}{2}, +\frac{9}{8}, -1.$$

Reste à essayer : $-2, +3, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{1}{4}, +\frac{3}{4}.$

Essai de -2 . — Divisons par $1 + \frac{x}{2}$ (n° 260, IV). Nous avons la suite des coefficients

$$18, -48, -50, -178, -100, -16, -6.$$

Donc, -2 est racine; le quotient correspondant est, au facteur 2 près,

$$(1) \quad f_1(x) = 8x^3 + 50x^2 + 89x^3 + 26x^2 + 94x + 9.$$

Il nous reste à essayer les mêmes nombres sur ce quotient ⁽¹⁾.

Essai de -2 . — Divisons par $1 + \frac{x}{2}$. Le premier coefficient 9 n'est pas divisible par 2. Donc, l'essai ne réussit pas.

Essai de $+3$. — Divisons par $1 - \frac{x}{3}$

$$9, -24, -33, +78, -24, -6.$$

La règle d'exclusion ne donne rien;

$$f(1) = \frac{f(1)}{1-1} = 6 \quad \text{et} \quad f_1(1) = \frac{f_1(1)}{-1+3} = -140$$

sont divisibles respectivement par les $(x - \frac{1}{2})$ et $(x - \frac{1}{3}).$

3 est racine; nous avons le quotient (divisé par -3)

$$(3) \quad f_2(x) \equiv 8x^2 - 26x^3 + 11x^2 - 7x - 3.$$

$f_2(1) = -3$ n'est pas divisible par $3 - 1 = 2$; donc, 3 n'est plus racine. Les autres nombres à essayer ne sont pas éliminés par la règle d'exclusion.

Essai de $-\frac{1}{2}$. — Divisons par $x + \frac{1}{2}$

$$8, \quad -30, \quad 26, \quad -6, \quad 0.$$

$-\frac{1}{2}$ est racine; nous avons le quotient (divisé par 2)

$$(4) \quad f_3(x) \equiv 4x^3 - 15x^2 + 13x - 3.$$

$f_3(1) = -1$ n'est pas divisible par $-1 + 2 = -3$; donc, $-\frac{1}{2}$ n'est plus racine ⁽¹⁾. De même, $\frac{1}{4}$ est exclu. Restent à essayer $\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{4}$.

Essai de $\frac{3}{2}$. — Divisons par $x - \frac{3}{2}$

$$-3, \quad 11, \quad \dots$$

$11 \times \frac{2}{3}$ n'est pas entier; donc, $\frac{3}{2}$ ne convient pas.

Essai de $\frac{3}{4}$. — Divisons par $x - \frac{3}{4}$

$$4, \quad -12, \quad 4, \quad 0$$

$\frac{3}{4}$ est racine; nous avons le quotient

$$(5) \quad f_4(x) \equiv x^2 - 3x + 4.$$

dont les racines sont $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Finalement, les racines de l'équation (1) sont $-2, 3, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Si une équation algébrique à coefficients entiers admet une racine de la forme $a + b\sqrt{N}$, où a, b, N désignent des nombres rationnels,

---

(1) On peut aussi observer que, d'après le théorème de Descartes, l'équation (1) a au plus deux racines négatives.

dont le troisième n'est pas carré parfait, elle admet aussi la racine $a - b\sqrt{N}$ au même ordre de multiplicité.

(Démonstration analogue à celle du n° 249, $\sqrt{N}$ jouant le rôle de i .)

2. Reconnaître si l'équation $x^3 - 5x - 2 = 0$ admet une racine de la forme ci-dessus.

(Il doit y avoir une racine commensurable.)

3. Décomposer en facteurs réels du second degré les polynômes

$$x^4 - 1, \quad x^4 + 2x^2 + 1, \quad x^6 + 1, \quad x^8 + 1, \quad x^{2m} + 1.$$

[On peut passer par l'intermédiaire des facteurs linéaires. Pour les deux premiers, on peut aussi employer la méthode des coefficients indéterminés, ou bien mettre le polynôme sous la forme d'une différence de deux carrés : d'une façon générale, on peut écrire

$$x^4 + ax^2 + b^2 = (x^2 + b)^2 - (2b - a)x^2.]$$

4. Décomposer de même

$$(x^2 + x + 1)^2 + x^4, \quad (x^2 + 1)^3 - (x + 1)^6, \\ x^8 - x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

{ Chercher les racines imaginaires

$$\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right)^2 = -1, \quad \left[\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} \right]^3 = -1, \quad \frac{x^9 - 1}{x - 1} = 0 \}.$$

5. Démontrer que si $f(x)$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de $f(x) + \lambda f'(x)$, quel que soit λ (E. P., 1909).

[D'après le théorème de Rolle (n° 61), $f'(x)$ a toutes ses racines réelles; les substituer dans $f + \lambda f'$.]

6. Prouver que, quel que soit m , l'équation

$$x^4 + 3x^3 + mx^2 - x - 5 = 0$$

a une racine positive et une seule.

7. Démontrer que si trois coefficients consécutifs d'un polynôme sont en progression géométrique, il a au moins deux racines imaginaires (de Gua).

(Si q est la raison, multiplier par $x - q$ et se reporter à l'exercice résolu n° 2.)

8. Même propriété si quatre coefficients sont en progression arithmétique (*Hermite*).

[Multiplier par $(x-1)^2$.]

9. Limites supérieure et inférieure des racines positives et négatives des équations

$$4x^7 + 3x^6 + 5x^4 - x^3 - 8x^2 - x - 2 = 0, \quad x^6 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 5 = 0.$$

10. Racines commensurables des équations

$$2x^5 - 5x^4 - 21x^3 - 15x^2 + 33x - 10 = 0,$$

$$45x^4 - 168x^3 - 55x^2 - 26x - 8 = 0,$$

$$x^6 - x^5 - 19x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 17x - 15 = 0.$$

11. Si, en substituant p nombres entiers consécutifs dans un polynôme à coefficients entiers, aucun des résultats n'est divisible par p , le polynôme ne peut pas avoir de racines entières (*Gauss*).

[Si a était une racine entière, $\frac{f(x)}{x-a}$ serait entier pour toutes les valeurs entières de x . S'appuyer, d'autre part, sur ce que, parmi p entiers consécutifs, il y a toujours un multiple de p .]

CHAPITRE XXII.

ÉQUATIONS À COEFFICIENTS NUMÉRIQUES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Discuter l'équation* $x^3 - 4x^2 - mx - 1 = 0$.

Elle rentre dans le type III du n° 263. Nous allons donc discuter l'équation aux inverses

$$(1) \quad f(x) \equiv x^3 + mx^2 - 4x - 1 = 0.$$

A cet effet, nous étudions les variations de $f(x)$. Nous avons

$$(2) \quad f'(x) \equiv x(4x^2 + 3mx + 8) = xg(x).$$

Le trinôme $g(x)$ a des racines réelles et distinctes, si $9m^2 - 4^2 \cdot 8 > 0$, ou $m > \frac{8\sqrt{2}}{3}$, en se bornant à *considérer les valeurs positives de m* ⁽¹⁾. Nous devons donc déjà distinguer deux cas.

Premier cas : $m > \frac{8\sqrt{2}}{3}$. — $g(x)$ est essentiellement > 0 ; $f'(x)$ a le signe de x et $f(x)$ prend sa valeur minimum pour $x = 0$. Cette valeur étant négative (-1) et la valeur pour $x = \pm \infty$ étant positive, on voit qu'il y a 2 racines, l'une positive, l'autre négative.

Deuxième cas : $m > \frac{8\sqrt{2}}{3}$. — $g(x)$ a deux racines x_1, x_2 , toutes deux négatives. Nous avons le Tableau de variations :

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	+	+	+	+

(1) La discussion pour $m = 0$ se déduirait de celle que nous allons faire par la simple remarque que le changement de m en $-m$ ne fait que changer le signe des racines.

Il nous faut les signes de y_1 et de y_2 . Nous savons qu'on peut remplacer ces quantités par les résultats de substitution dans la dérivée par rapport à la variable d'homogénéité

$$mx^3 - 8x^2 - 4.$$

Mais, ce polynôme peut s'écrire, en tenant compte de $g(x) = 0$,

$$mx \left(-\frac{3mx}{4} - 9 \right) - 6mx - 16 - 4 = - \left(\frac{3}{4} m^2 x^2 + 8mx + 20 \right) = -\varphi(x).$$

Les signes de y_1 et de y_2 sont donc opposés à ceux de $\varphi(x_1)$ et de $\varphi(x_2)$. Pour avoir ceux-ci, on peut procéder comme il suit :

Le produit $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$ a même signe que le résultant des trinômes $g(x)$ et $\varphi(x)$, à savoir

$$F(m^2) = 27m^3 - 13 \times 64m^2 + 6400.$$

Le discriminant de ce trinôme en m^2 s'écrit

$$13^2 \cdot 32^2 - 27 \cdot 16^2 \cdot 25 = 16^2 (169 \times 4 - 27 \times 25) = 16^2 (676 - 675) = 16^2.$$

Les racines sont donc $\frac{16}{27} (26 \pm 1)$, c'est-à-dire 16 et $\frac{400}{27}$. Les valeurs positives correspondantes de m sont 4 et $\frac{20}{3\sqrt{3}}$. Elles sont toutes deux plus grandes que $\frac{8\sqrt{5}}{3}$. Nous sommes donc obligés de partager notre deuxième cas en plusieurs autres.

I. $4 > m > \frac{20}{3\sqrt{3}}$. — $F(m^2)$ est négatif; y_1 et y_2 sont de signes contraires. Mais, d'après le Tableau, $y_1 < y_2$. Donc, $y_1 < 0$, $y_2 > 0$. Il y a 4 racines, une dans chacun des intervalles $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) , $(x_2, 0)$, $(0, +\infty)$.

II. $m > 4$. — $F(m^2)$ est positif; $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$ sont de même signe. Pour avoir ce signe, observons que c'est aussi celui de $\varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, fonction symétrique facile à calculer

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) + \varphi(x_2) &= \frac{3}{4} m^2 \left(\frac{9m^2}{16} - 4 \right) + 8m \left(-\frac{3m}{4} \right) + 40 \\ &= \frac{27}{64} m^4 - 9m^2 + 40 = G(m^2). \end{aligned}$$

Ce trinôme en m^2 a deux racines réelles et positives, m_1^2 et m_2^2 . Mais $G(16) = 4 > 0$; de plus, $16 > \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} = \frac{9 \cdot 32}{27} = \frac{32}{3}$. Donc, 16 est plus grand que ces deux racines. Par suite, l'hypothèse $m > 4$ entraîne $m > m_1$, $m > m_2$, donc $G(m^2) > 0$. Il suit de là que $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$

sont positifs et, par suite, y_1 et y_2 négatifs. Nous avons donc seulement 2 racines, l'une plus petite que x_1 , l'autre positive.

III. $\frac{20}{3\sqrt{3}} > m > \frac{8\sqrt{2}}{3}$. — $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$ ont encore même signe, celui de $G(m^2)$. Mais, $G\left[\left(\frac{20}{3\sqrt{3}}\right)^2\right] = -\frac{20}{27}$ et $G\left[\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2\right] = -\frac{8}{3}$ sont négatifs. Donc, $\left(\frac{20}{3\sqrt{3}}\right)^2$ et $\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2$ sont tous deux compris entre m_1^2 et m_2^2 . Par suite, dans l'hypothèse actuelle, m^2 est aussi compris entre ces nombres, et $G(m^2)$ est négatif. Il s'ensuit que y_1 et y_2 sont positifs. Nous avons 2 racines, l'une comprise entre x_2 et 0, l'autre positive.

Cas intermédiaires. — a. $m = 4$. — $F(m^2) = 0$, $G(m^2) > 0$. Un des nombres y_1 , y_2 est nul, l'autre est négatif. Comme $y_1 < y_2$, c'est y_2 qui est nul et y_1 négatif. Donc, il y a une racine double égale à x_2 et deux racines simples, l'une plus petite que x_1 , l'autre plus grande que zéro.

b. $m = \frac{20}{3\sqrt{3}}$. — $F(m^2) = 0$, $G(m^2) < 0$. En raisonnant comme ci-dessus, on voit que $y_1 = 0$, $y_2 > 0$. Il y a une racine double égale à x_1 et deux racines simples comprises respectivement entre x_2 et 0 et entre 0 et $+\infty$.

Remarque. — On aurait pu confondre les cas II et III et observer que, quel que soit le signe commun à y_1 et à y_2 , il y a toujours deux racines réelles et deux seulement, dont l'une est positive et l'autre négative. Nous avons voulu montrer néanmoins comment on pourrait déterminer dans tous les cas les signes de y_1 et de y_2 , ce qui, pour d'autres exemples, pourrait avoir de l'importance au point de vue du nombre des racines. En outre, cette détermination fournit une meilleure séparation des racines.

2. Étudier l'équation

$$(1) \quad f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 3 = 0.$$

Calculer sa plus petite racine à $\frac{1}{1000}$ près.

Étudions les variations de $f(x)$. Nous avons

$$(2) \quad f'(x) = 10(3x^4 - 6x^3 + 1).$$

Il nous faut maintenant étudier l'équation

$$(3) \quad g(x) = 3x^4 - 6x^3 + 1 = 0.$$

On a

$$g'(x) = 6x^2(2x - 3);$$

d'où le Tableau

$$(4) \quad \begin{array}{ccccccc} x & -\infty & & \frac{3}{2} & & +\infty \\ \hline g & + & \searrow & - & \nearrow & + \end{array}$$

$$\left[g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3^3}{16} - \frac{3^2}{4} + 1 = -\frac{3^3}{16} + 1 = \frac{-81 + 16}{16} < 0 \right].$$

L'équation (3) admet donc deux racines x_1 et x_2 , séparées par le nombre $\frac{3}{2}$.

Formons maintenant le Tableau des variations de $f(x)$:

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f & + & & - & \searrow & x_2 & \nearrow & + \end{array}$$

Il nous faut les signes de y_1 et y_2 , ou des résultats de substitution dans $f'_1 = 5(-3x^4 + 8x - 3)$. Mais, en tenant compte de (3), la parenthèse s'écrit $-6x^3 + 8x - 2 = -2(3x^3 - 4x + 1)$. La nouvelle parenthèse s'annule visiblement pour $x = 1$ et son quotient par $x - 1$ est

$$(6) \quad h(x) = 3x^2 - 3x + 1.$$

Soient ξ_1, ξ_2 les racines de ce trinôme. Il faut les placer, ainsi que 1, par rapport à x_1, x_2 . D'abord, $g(1) < 0$; donc

$$(7) \quad x_1 < 1 < x_2;$$

puis, en supposant $\xi_1 < \xi_2$, on peut écrire

$$(8) \quad \xi_1 < x_1 < x_2,$$

car $\xi_1 < 0$ et $x_1 > 0$ [$g(0)$ est positif].

Cherchons maintenant le signe de $g(\xi_2)$. Nous pouvons remplacer $g(x)$ par le reste $13(-x + \frac{1}{3})$ de sa division par $h(x)$. Cela nous conduit à placer $\frac{1}{3}$ par rapport à ξ_2 . Dans ce but, nous formons

$$h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} > 0.$$

Nous voyons que $\frac{1}{3}$ est extérieur à l'intervalle (ξ_1, ξ_2) et, comme $\xi_1 < 0$, $\frac{1}{3}$ est $> \xi_2$, $-\xi_2 + \frac{1}{3}$ est > 0 , $g(\xi_2)$ est > 0 . Comme $\xi_2 < \frac{1}{3}$ (puisque $< \frac{1}{3}$)

et que $\frac{3}{2} < x_2$, d'après (4), on a nécessairement

$$(9) \quad \frac{3}{2} < x_1 < x_2.$$

Finalement, le trinôme $3x^3 - 4x + 1 = (x-1)h(x)$ prend le signe $-$ pour $x = x_1$ et le signe $+$ pour $x = x_2$. Donc $y_1 > 0$, $y_2 < 0$. L'équation proposée a *trois racines réelles*.

Remarque. — Ces racines sont séparées par les nombres x_1 et x_2 ; mais ceux-ci ne sont pas explicitement connus. Pour obtenir une séparation effective, procédons par substitutions successives. D'abord, $f(0) < 0$; comme $0 < x_1$, les trois racines sont positives.

[On peut le voir aussi par le théorème de Descartes; car $f(-x)$ n'ayant pas de variations, il n'y a pas de racines négatives.]

Puis $f(1) = -2 < 0$. Comme $1 > x_1$, les deux plus petites racines sont comprises entre 0 et 1. Pour les séparer, calculons, par exemple,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1^3}{16} > 0.$$

Finalement, si X_1 , X_2 , X_3 sont les trois racines rangées par ordre de grandeur croissante, nous avons la disposition suivante :

$$0, \quad X_1, \quad \frac{1}{2}, \quad X_2, \quad 1, \quad X_3.$$

D'ailleurs $f(3) > 0$; donc $X_3 < 3$.

Calcul de X_1 . — Commencer par resserrer l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Nous avons

$$f(0,3) = -3 + 3 + (0,3)^3(6 < 0,3 + 15) < 0;$$

$$f(0,4) = -3 + 4 > 0,384 + 0,06444 > 0.$$

Donc, X_1 est compris entre 0,3 et 0,4.

Appliquons la méthode de Newton. — Il nous faut le signe de $f'(x)$, (n° 270). Or $f''(x) = 6x(2x^3 - 3x^2) = 6x^2(2x - 3)$ est négatif dans tout l'intervalle. Nous devons donc appliquer la méthode au nombre 0,3. Si $X_1 = 0,3 + h$, nous prenons comme valeur approchée de h celle qui est donnée par

$$f(0,3) + hf'(0,3) = 0,$$

ou

$$h_1 = \frac{(0,3)^3(15,2)}{8,623} = \frac{0,10692}{8,623} = 0,01239 \quad (\text{par défaut}).$$

L'erreur commise ε est plus petite que $\frac{1}{200} \frac{-f''(0,4)}{8,623}$. [Le maximum de $-f''(x)$ entre 0,3 et 0,4 est atteint pour $x=0,4$, car, dans cet intervalle, $-f''(x)=360x(1-x)$ est positif.] Donc

$$\varepsilon < \frac{60,0,16,2,2}{200,8,623} = \frac{1,056}{86,23} < 0,013.$$

Mais, si nous observons maintenant que h est exactement inférieur à $0,013 + 0,013 = 0,026$, nous pouvons écrire

$$\varepsilon < (0,026)^2,1,3 < 0,0007,1,3 = 0,00091.$$

On en conclut que X_1 est compris entre les deux nombres

$$0,31239 \quad \text{et} \quad 0,31239 + 0,00091 = 0,31330,$$

qui constituent deux *valeurs approchées, par défaut et par excès, à moins de $\frac{1}{1000}$ près*. En prenant leur moyenne arithmétique 0,312845, on obtient une valeur approchée, à moins de $\frac{1}{2000}$; mais on ne sait pas dans quel sens. Enfin, on peut se borner à trois décimales, en prenant 0,313 comme valeur approchée à moins de $\frac{1}{1000}$ près; mais on ne sait pas non plus quel est le sens de l'approximation. On ne connaît donc pas le troisième chiffre du développement illimité de X_1 en fraction décimale, bien qu'on possède une valeur approchée à moins de $\frac{1}{2000}$; mais cela a peu d'importance pratique.

3. Discuter l'équation

$$(1) \quad x \cos x - 2 \sin x + m = 0,$$

et calculer sa plus petite racine positive et autre que $\frac{\pi}{2}$ quand $m=2$.

Nous commencerons par observer qu'on peut se borner à considérer les *valeurs positives de m* , car le changement de m en $-m$ équivaut à celui de x en $-x$.

Cela posé, pour séparer les racines de l'équation (1), on songe tout d'abord à étudier les variations de son premier membre (n° 263). Mais l'équation dérivée $x \sin x + \cos x = 0$ est transcendante et nécessiterait une étude particulière. Nous éviterons cet inconvénient en divisant au préalable l'équation (1) par $\cos x$ ⁽¹⁾. Autrement dit, *nous allons*

(1) On peut enlever, par cette opération, les racines $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, si elles existent; ce qui n'arrive que pour $m = 2 \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire k pair, $m=2$.

étudier les variations de la fonction

$$(2) \quad y = f(x) = x - 2 \operatorname{tang} x + \frac{m}{\cos x}.$$

Intervalle de variation. — Si l'on change x en $x + 2k\pi$, y se change en $y + 2k\pi$. Il suffit donc de construire la courbe dans un intervalle de longueur 2π , quitte à lui faire subir ensuite toutes les translations $(2k\pi, 2k\pi)$.

Si l'on change x en $\pi - x$, y se change en $\pi - y$. Cela indique une symétrie par rapport au point I $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Finalement, nous prenons pour *intervalle de variation* $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

Ayant construit la courbe correspondante, nous prendrons sa *symétrique par rapport au point I*; puis nous lui ferons subir les *translations* $T_k(2k\pi, 2k\pi)$, qui sont parallèles à la première bissectrice.

Continuité. — La fonction est définie et continue dans tout l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, sauf peut-être aux extrémités.

Dérivée. — On a

$$y' = 1 - \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{m \sin x}{\cos^2 x} = \frac{-(1 - m \sin x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}.$$

Il nous faut le signe du trinôme en $\sin x$

$$(3) \quad z = z(\sin x) = \sin^2 x - m \sin x + 1.$$

Premier cas : $m < 2$. — z est toujours positif, donc y' négatif; y décroît. Pour

$$x = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad \operatorname{tang} x = -\varepsilon, \quad \frac{m}{\cos x} = -\varepsilon, \quad y = +\varepsilon.$$

Pour $x = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, y se présente sous la forme $\varepsilon - \varepsilon$. Mais, si on l'écrit

$$(4) \quad y = x - \frac{m - 2 \sin x}{\cos x},$$

on voit qu'il tend vers $-\varepsilon$. On a donc la courbe suivante (fig. 11). Si l'on prend sa symétrique par rapport au point I, on obtient la courbe en pointille. Il suffit ensuite d'imaginer les translations T_k pour se rendre compte que l'équation proposée admet une racine x_k et une seule dans chaque intervalle tel que $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, quel que soit l'entier k , positif, négatif ou nul.

Si k est très grand positif, x_k est très voisin de $k\pi + \frac{\pi}{2}$. Si k est négatif et de très grande valeur absolue, x_k est très voisin de $k\pi - \frac{\pi}{2}$.

Fig. 11.

Deuxième cas : $m = 2$. — La seule différence avec le cas précédent provient de ce que, pour $x = \frac{\pi}{2}$, $y = x + 2 \frac{(1 - \sin x)}{\cos x}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$. (Appliquer la règle de l'Hospital.) La courbe passe au point 1 et présente la forme suivante (fig. 12). La symétrie donne ensuite le trait

Fig. 12.

pointillé. En imaginant enfin les translations T_k , on voit qu'en dehors des racines $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (cf. note de la page 179), il y a une racine x_k et une seule dans chaque intervalle tel que $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$.

Pour les grandes valeurs de k , même observation que plus haut.

Troisième cas : $m \geq 3$. — Le trinôme $\mathfrak{s}$ admet une racine et une seule comprise entre -1 et $+1$; cette racine est d'ailleurs positive. Soit z

la valeur correspondante de x ($0 < x < \frac{\pi}{2}$). On a le Tableau

x	$-\frac{\pi}{2}$	x	$+\frac{\pi}{2}$
y	$+z$	β	$+z$

avec

$$\zeta = z + \frac{m - 2 \sin z}{\cos z} = z + \cot z,$$

en remplaçant m par $\frac{1 + \sin^2 z}{\sin z}$. Cela nous donne la courbe C suivante (fig. 13). Par symétrie, on obtient la courbe C' en pointillé.

Fig. 13.

La translation T_k amène C en C_k , qui coupe Ox en deux points, si l'ordonnée y_k du point A_k , homologue de A, est négative ou nulle ⁽¹⁾. Or $y_k = \zeta + 2k\pi$; on doit donc avoir

$$\zeta + 2k\pi \leq 0 \quad \text{ou} \quad k \leq -\frac{\zeta}{2\pi}.$$

Ceci aura lieu pour $k = k_1$, si l'on appelle k_1 le plus petit nombre entier $-\frac{\zeta}{2\pi}$.

De même, la translation T_k amène C' en C'_k , qui coupe Ox en deux points, si l'ordonnée y'_k du point A'_k est positive ou nulle ⁽¹⁾. Or

$$y'_k = \pi - \zeta + 2k\pi;$$

on doit donc avoir

$$\pi - \zeta + 2k\pi \geq 0 \quad \text{ou} \quad k \geq \frac{\zeta - \pi}{2\pi}.$$

(1) Si $y = 0$, les deux points sont confondus; $x + 2k\pi$ est racine double. Ceci arrive lorsque $\frac{\zeta}{2\pi}$ est un nombre entier. Remarque analogue pour y'_k .

Ceci aura lieu pour $k = k_2$, si l'on appelle k_2 le plus petit nombre entier $\geq \frac{\frac{5}{2}\pi}{2\pi} - \frac{1}{2}$, nombre d'ailleurs visiblement égal à k_1 ou à $k_1 - 1$.

Finalement, nous pouvons énoncer les résultats suivants :

Les entiers k_1 et k_2 étant déterminés comme il vient d'être expliqué, l'équation possède deux racines dans chaque intervalle

$$\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

pour toutes les valeurs de $k = k_1$, ainsi que dans chaque intervalle

$$\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right)$$

pour toutes les valeurs de $k = k_2$; elle n'en admet pas d'autres.

La discussion est donc à présent complète.

Calcul de la plus petite racine positive autre que $\frac{\pi}{2}$, quand $m = 2$.

— La figure 12 nous montre que cette racine est comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

On peut le voir aussi en transformant l'équation comme il suit.

Posons $\frac{\pi}{2} - x = 2u$; il vient

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2u \right) \sin 2u + 2(1 - \cos 2u) = 0,$$

ou, en exprimant $\sin 2u$ et $\cos 2u$ en fonction de $\sin u$ et $\cos u$ et divisant par $\sin u$ (ce qui enlève les solutions $u = k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$),

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2u \right) \cos u - 2 \sin u = 0,$$

ou enfin

$$(5) \quad \tan u = u - \frac{\pi}{4}.$$

Rien n'est plus facile que d'étudier cette équation graphiquement. Ses racines sont les abscisses des points d'intersection de la courbe bien connue $y = \tan x$ et de la droite $y = x - \frac{\pi}{4}$. La figure 14 montre que l'équation (5) admet une racine et une seule dans chaque intervalle $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$. [Par suite, (1) admet une racine et une seule

dans chaque intervalle

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2k\pi - \pi, \frac{\pi}{2} - 2k\pi - \pi \right) \quad \text{ou} \quad \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right),$$

conformément au résultat précédemment obtenu.]

Fig. 14.

L'avantage de la transformation ci-dessus consiste en ce que l'équation (5) est plus simple de forme que l'équation (1) et sera plus facile à résoudre.

D'après la formule $2u = \frac{\pi}{2} - x$, la plus petite racine positive en x correspond à la racine en u qui est immédiatement inférieure à $\frac{\pi}{4}$. La figure 14 montre que cette dernière est comprise entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$, et semble d'ailleurs assez voisine de $-\frac{\pi}{4}$.

Posons $\varphi(u) = \tan u - u + \frac{\pi}{4}$. Nous avons

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{2} > 0.$$

Donc la racine est comprise entre $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Faisons d'autres substitutions pour *resserrer l'intervalle*. En nous servant d'une Table de conversion des grades en radians et d'une Table de tangentes naturelles, nous avons

$$\varphi(-60^\circ) = -1,376 + 0,942 + 0,785 > 0,$$

$$\varphi(-70^\circ) = -1,963 + 1,100 + 0,785 < 0,$$

$$\varphi(-65^\circ) = -1,632 + 1,021 + 0,785 > 0,$$

$$\varphi(-68^\circ) = -1,819 + 1,068 + 0,785 < 0,$$

$$\varphi(-69^\circ) = -1,889 + 1,083 + 0,785 < 0.$$

La racine est donc comprise entre -68γ et -69γ . Appliquons la méthode de Newton à cet intervalle.

Nous avons

$$\varphi'(u) = \tan^2 u, \quad \varphi''(u) = 2 \tan u (1 + \tan^2 u).$$

$\varphi''(u)$ est négatif dans l'intervalle considéré. Il faut donc appliquer la méthode à $-69\gamma = -1.08385$.

Nous avons, en utilisant cette fois une Table de logarithmes à cinq décimales,

$$\varphi(-69\gamma) = -1,88870 + 1,08385 + 0,78540 = -0,01945.$$

Si $u + h$ désigne la racine exacte, nous prenons pour valeur approchée de h

$$h_1 = -\frac{\varphi(-69\gamma)}{\varphi'(-69\gamma)} = \frac{0,01945}{\tan^2 69\gamma} = 0,00545;$$

d'où

$$u_1 = -1,08385 + 0,00545 = -1,07840.$$

Limite de l'erreur. — Le maximum de $|\varphi''(u)|$ dans l'intervalle $(-69\gamma, -68\gamma)$ est

$$2 \tan 69\gamma (1 + \tan^2 69\gamma) < 4(1 + 4) = 20.$$

D'autre part,

$$h < 1,084 - 1,068 = 0,016;$$

donc

$$\varepsilon < \frac{0,000256,20}{2 \tan^2 69\gamma} = \frac{0,00256}{\tan^2 69\gamma} < \frac{0,00256}{(1,8)^2} = \frac{0,00064}{0,81} < \frac{0,00064}{0,8} = 0,0008.$$

Mais alors h est inférieur à

$$h_1 + 0,0008 < 0,0055 + 0,0008 = 0,0063;$$

donc (n° 271; remarque),

$$\varepsilon < \frac{(0,0063)^2,10}{\tan^2 69\gamma} < \frac{(0,0064)^2,10}{(1,8)^2} = \frac{(0,0032)^2}{0,81} < 0,000128 < 0,00013.$$

Finalement, la racine u est comprise entre $-1,07845$ et $-1,07858$. On peut donc prendre, à moins de $\frac{1}{10000}$ près ⁽¹⁾,

$$u = -1,0785;$$

(1) Nous supposons toutefois que les calculs auxiliaires, qui ont été faits avec cinq décimales seulement, ne donnent pas d'erreurs supplémentaires suffisantes pour modifier cette approximation.

d'où

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = 1,5708 + 2,1570 = 3,7278 \quad (1).$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Discuter les équations

$$\begin{aligned} 4x^3 + 3x^2 - 6x - m &= 0, & 2mx^3 - 4x^2 - 5x + 2 &= 0, \\ 6mx^3 - x^2 + mx + 3 &= 0, & x^3 + mx^2 - 3x - 2 &= 0, \end{aligned}$$

2. Discuter les équations

$$x^4 + px - q = 0, \quad x^5 + px + q = 0.$$

3. Discuter les équations

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - x^2 + m &= 0, & 2x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 8x + m &= 0, \\ 3x^4 - 4x^3 - 4mx^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

4. Étudier les équations

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 - 5x + 3 &= 0, & x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 8x + 1 &= 0, \\ x^5 - x^3 + 2x^2 - 1 &= 0, & x^6 + x^2 - 2x - 1 &= 0, & x^6 + x^3 + x^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

(Pour la seconde, on remarquera que la dérivée s'annule pour $x = 1$. Pour les deux dernières, prendre l'équation aux inverses.)

5. Discuter les équations

$$\begin{aligned} 4x^6 - 27(x - a)^2 &= 0, & \frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x}{1} + 1 &= 0, \\ & & \text{(E. C., 1908 et 1911.)} \end{aligned}$$

6. Étudier l'équation

$$x(x^2 - x - 1)^4 - x^2 + x = 0 \quad (\text{E. P., 1908}). \quad (\text{Poser } x^2 - x - 1 = y.)$$

7. Les nombres $a, b, c, \dots, l$ étant supposés tous distincts et les nombres A, B, C, ..., L tous positifs, montrer que l'équation

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

(1) La quatrième décimale est encore moins certaine que pour u , car l'erreur sur x est double de celle relative à u . Mais nous pouvons affirmer l'exactitude des trois premières.

(Étudier les variations du premier membre, sans oublier les discontinuités.)

8. Étudier les équations

$$\begin{aligned} x - e \sin x &= m \quad (0 < e < 1), \quad \log(x^m) = x, \\ e^x &= m x^2, \quad 2x \operatorname{arc tang} x = x^3 - 2, \quad \log x = \operatorname{arc sin} x, \\ (x^2 - 1) \log x &= x - m, \quad \log x = e^x. \end{aligned}$$

9. Résoudre à $\frac{1}{1000}$ près l'équation $x^3 + x + 1 = 0$.

10. Calculer à $\frac{1}{100}$ près la plus petite racine positive de l'équation

$$x^6 - x^2 - x - 2 = 0.$$

11. Calculer à $\frac{1}{100}$ près les deux racines de l'équation $x = 3 \log x$, ainsi que leur somme et leur produit.

12. Résoudre à $\frac{1}{1000}$ près l'équation

$$x - 0,01677 \sin x = 2,58611.$$

13. Séparer les racines de l'équation

$$x \cos x = \sin x + \cos 2x$$

et calculer la plus petite racine positive à $\frac{1}{1000}$ près.

14. Résoudre approximativement les systèmes

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 2x - 4y - 1 &= 0, & x^2 - 2y^2 + 4x - 6y &= 0; \\ x^3 - y^3 - xy &= 0, & x^2 + y^2 - y &= 0. \end{aligned}$$

CHAPITRE XXIII.

DÉTERMINANTS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

On pourrait le développer directement suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne. Mais, il vaut mieux essayer de le simplifier au préalable par des combinaisons de lignes ou de colonnes (n° 281) faisant apparaître des zéros ou des rangées partiellement proportionnelles. C'est ainsi que, si l'on retranche la deuxième ligne de la quatrième, celle-ci devient :

Quatrième ligne : 2, 0, -5, 0, 0.

Ajoutant la deuxième à la troisième, celle-ci devient :

Troisième ligne : 1, 2, 3, 0, 3.

A part l'élément du milieu, on obtient la première ligne. Retranchons donc celle-ci de notre nouvelle troisième ligne; nous obtenons :

Troisième ligne : 0, 0, 4, 0, 0.

Nous pouvons donc écrire

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 4 \times 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix}.$$

en développant suivant la troisième ligne, puis encore suivant la troisième.

Il nous reste à calculer un déterminant du troisième ordre. On peut le développer par la règle de Sarrus, ou bien suivant la première ligne ou la deuxième colonne. Adoptons, par exemple, ce dernier moyen; nous obtenons

$$D = 4 \times 2 - 1(2 \times 4 - 3) + 5(2 \times 3 - 3 \times 3) = 4 \times 2(4 - 5 - 25) = -240.$$

2. DÉTERMINANT DE VANDERMONDE. — Les $n+1$ nombres $a, b, c, \dots, l$ étant supposés différents, calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & l & l^2 & \dots & l^n \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, qu'on appelle *déterminant de Vandermonde*, est évidemment un polynôme homogène par rapport aux $n+1$ lettres $a, b, c, \dots, l$. Or, pour $a=b$, il est identiquement nul, comme ayant ses deux premières lignes identiques. Il est donc divisible par $(b-a)$ (n° 203).

Pour la même raison, il est divisible par $c-a, d-a, \dots$, et par suite par le produit de tous ces facteurs (n° 205). On a donc une identité de la forme

$$(1) \quad \begin{aligned} D &= (b-a)(c-a)(d-a)\dots(l-a) \\ &\quad (c-b)(d-b)\dots(l-b) \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\quad (l-h)Q = PQ, \end{aligned}$$

le quotient Q étant un certain polynôme en $a, b, \dots, l$.

Or, le degré de D est $1+2+\dots+n$. [On le voit par exemple en multipliant $a, b, \dots, l$ par un même nombre λ ; les 2^e, 3^e, ..., $(n+1)$ ^{ième} colonnes sont multipliées respectivement par $\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n$; donc D est multiplié par $\lambda^{1+2+\dots+n}$.] D'autre part, le produit P qui est au second membre de (1) comprend $(1+2+\dots+n)$ facteurs. Il s'ensuit que Q est une constante. Nous en aurons la valeur en égalant de part et d'autre les coefficients d'un terme particulier, par exemple du terme $bc^2 \dots l^n$, que donne la diagonale principale. Il est aisé de voir que ce terme ne figure qu'une seule fois dans le développement du déterminant. D'autre part, pour l'obtenir dans P , il faut prendre l dans tous les facteurs de la n ^{ième} colonne de (1), puis h dans tous ceux de la $(n-1)$ ^{ième} colonne, etc. Autrement dit, on obtient le terme $bc^2 \dots l^n$, dans P , en multipliant les premiers termes de chaque facteur, ce qui lui donne pour coefficient l'unité. Il résulte de là que $Q=1$. Donc, D est égal au produit P .

3. Effectuer le produit des deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ d & -b & a & 0 \\ e & -c & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Multiplions lignes par lignes

$$DD' = \begin{vmatrix} 0 & -a^2 & -ab & -ac \\ a^2 & 0 & -ad & -ae \\ 0 & 0 & 0 & -cd + be - af \\ 0 & 0 & -eb + cd + af & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant suivant la première colonne, puis suivant la seconde, nous avons

$$DD' = (-a^2)(-a^2)(cd + af - eb)^2 = a^4(cd + af - eb)^2.$$

Si l'on remarque maintenant que D' se réduit à son terme principal a^4 , nous en concluons, en supposant toutefois $a \neq 0$ ⁽¹⁾,

$$D = (cd + af - eb)^2.$$

4. Faire le produit des matrices

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 & x_n & y_n & z_n & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2x'_1 & -2y'_1 & -2z'_1 & x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 \\ 1 & -2x'_2 & -2y'_2 & -2z'_2 & x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & -2x'_n & -2y'_n & -2z'_n & x_n'^2 + y_n'^2 + z_n'^2 \end{vmatrix}.$$

D'après la règle du n° 283, l'élément général est

$$\begin{aligned} c_{ij}^l &= x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2 + z_{i-1}^2 - 2x_{i-1}x'_{j-1} - 2y_{i-1}y'_{j-1} \\ &\quad - 2z_{i-1}z'_{j-1} + x_{j-1}'^2 + y_{j-1}'^2 + z_{j-1}'^2, \\ c_{ij}^l &= (x_{i-1} - x'_{j-1})^2 + (y_{i-1} - y'_{j-1})^2 + (z_{i-1} - z'_{j-1})^2, \end{aligned}$$

du moins tant que i et j sont tous deux supérieurs à l'unité.

En outre, $c_1^l = c_j^l = 1$, si $j \geq 1$; $c_1^l = 0$.

(1) Si a était nul, le développement par la règle de Laplace donnerait de suite

$$D = (be - cd)^2,$$

Dès lors, appelons d'une manière générale z_{ij} le carré de la distance du point M_i qui aurait pour coordonnées rectangulaires x_i, y_i, z_i au point M'_j , qui aurait pour coordonnées x'_j, y'_j, z'_j , par rapport aux mêmes axes (t. II). Le produit de nos deux matrices est égal au déterminant

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ 1 & z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix}$$

Différents cas peuvent alors se présenter suivant la valeur de n .

Si $n \geq 4$, le produit est nul. En particulier, si l'on confond les points M'_i avec les points M_i et si l'on prend $n = 5$, on obtient la *relation qui existe entre les distances de 5 points de l'espace* associés deux à deux de toutes les manières possibles. (Observer que, dans cette hypothèse, on a $z_{ii} = 0$ et $z_{ij} = z_{ji}$.) En prenant le cinquième point au centre de la sphère qui passe par les quatre premiers, on a une équation du premier degré pour calculer le carré du rayon de cette sphère.

Pour $n = 4$, le déterminant (1) est égal au produit des déterminants déduits des deux matrices, qui sont alors des tableaux carrés. Mais, en les développant suivant la première ligne, on constate, d'après une formule de Géométrie analytique (t. II), qu'ils sont égaux respectivement à $6V$ et à $48V'$ (au signe près), en appelant V et V' les volumes des deux tétraèdres $M_1 M_2 M_3 M_4$ et $M'_1 M'_2 M'_3 M'_4$. Le déterminant (1) est donc égal à $288VV'$. Si l'on confond les deux tétraèdres, on a une formule donnant le volume d'un tétraèdre en fonction des arêtes.

Pour $n < 4$, le déterminant (1) est égal à une somme de produits de déterminants. Prenons, par exemple, $n = 3$. Les seuls produits non nuls sont de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & z_1 & 1 \\ \text{»} & y_2 & z_2 & 1 \\ \text{»} & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2x'_1 & -2z'_1 & x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 \\ 1 & -2x'_2 & -2z'_2 & \text{»} \\ 1 & -2x'_3 & -2z'_3 & \text{»} \end{vmatrix} \\ = -4 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & z'_2 & 1 \\ x'_3 & z'_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant (1) est alors égal à $-16(S_x S_x + S_y S_y + S_z S_z)$, en appelant S_x , par exemple, l'aire algébrique de la projection du triangle $M_1 M_2 M_3$ sur xOz . Mais, si α, β, γ sont les angles du plan de ce

triangle avec yOz , zOx , xOy et si S est son aire, on a

$$S_x = S \cos \alpha, \quad S_y = S \cos \beta, \quad S_z = S \cos \gamma.$$

De même

$$S_x = S' \cos \alpha', \quad S_y = S' \cos \beta', \quad S_z = S' \cos \gamma'.$$

Donc

$$S_x S_x + S_y S_y + S_z S_z = SS'(\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma') = SS' \cos V,$$

en appelant V l'angle des deux plans $M_1 M_2 M_3$, $M'_1 M'_2 M'_3$. Finalement, on a la formule élégante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = 16 SS' \cos V \quad (1).$$

Pour $n = 2$, les seuls produits non nuls sont de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & 1 \\ \text{»} & x_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2x'_1 & x'^2_1 + \dots \\ 1 & -2x'_2 & \text{»} \end{vmatrix} = 2(x_1 - x_2)(x'_1 - x'_2).$$

Leur somme est égale à $2 M_1 M_2 \cdot M'_1 M'_2 \cdot \cos V$, en appelant V l'angle des deux vecteurs $(M_1 M_2)$ et $(M'_1 M'_2)$. En développant (1), on obtient alors la formule élégante

$$\overline{M_1 M_2}^2 + \overline{M_2 M_1}^2 - \overline{M_1 M'_1}^2 - \overline{M_2 M'_2}^2 = 2 \overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M'_1 M'_2} \cos V.$$

En particulier, si $V = \frac{\pi}{2}$, on a le théorème suivant :

Dans tout tétraèdre orthocentrique, la somme des carrés de deux arêtes opposées est la même pour les trois couples d'arêtes.

[À part les cas $n = 3$ et $n = 2$, nous avons emprunté ces applications au cours professé à la Sorbonne par M. Darboux, pendant l'année scolaire 1904-1905.]

(*) On pourrait aisément interpréter les signes des deux membres, en considérant les sens de parcours $M_1 M_2 M_3$, $M'_1 M'_2 M'_3$ sur les deux triangles (Cf. t. II). Si l'on confond les deux triangles, on a la surface en fonction des côtés.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ -8 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & x \\ x & 6 & 3 & -4 & x \end{vmatrix}.$$

2. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

[Pour le dernier, ajouter les lignes, puis retrancher chaque colonne de la suivante, etc.]

3. Soient n quantités distinctes $x_1, x_2, \dots, x_n$. On désigne par σ_i^j la somme des produits i à i de celles de ces quantités autres que x_j . Démontrer que le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \dots & \sigma_{n-1}^1 \\ 1 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sigma_1^n & \sigma_2^n & \dots & \sigma_{n-1}^n \end{vmatrix}$$

est égal au déterminant de Vandermonde déduit de $x_1, x_2, \dots, x_n$, multiplié par $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

[On peut se servir des identités (n° 225)]

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= s_1 - x_j, & \sigma'_2 &= s_2 - x_j \sigma'_1, & \dots \\ \sigma'_i &= s_i - x_j \sigma'_{i-1}, & \dots, & & \sigma'_{n-1} &= s_{n-1} - x_j \sigma'_{n-2}, \end{aligned}$$

où s_i désigne la somme des produits i à i des n quantités proposées.

En portant dans D, on obtient le déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & s_1 - x_j & s_2 - x_j \sigma'_1 & \dots & s_{n-1} - x_j \sigma'_{n-2} \end{vmatrix}.$$

En multipliant la première colonne successivement par $-s_1, -s_2, \dots, -s_{n-1}$ et ajoutant aux 2^e, 3^e, $\dots$, $n^{\text{ièmes}}$ colonnes, on obtient

$$D = D' = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & x_j & x_j \sigma'_1 & \dots & x_j \sigma'_{n-2} \end{vmatrix}.$$

On opère sur ce déterminant comme sur D' et, en continuant de la sorte, on arrive à éliminer de proche en proche tous les σ_i .]

4. Soit le déterminant d'ordre $n+1$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \dots & x+1 \end{vmatrix}.$$

Calculer sa dérivée par rapport à x . En déduire son développement.

[$D_n = n D_{n-1}$. De plus $D_n = 0$, pour $x = 0$. Enfin $D_1 = x$. En intégrant de proche en proche, on obtient D_n . On peut aussi, en retranchant la première ligne de la deuxième, établir la formule de récurrence $D_n = x D_{n-1}$.]

5. Faire le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

En déduire le théorème d'Arithmétique suivant : *Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés.*

6. Multiplier lignes par lignes les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{vmatrix}$$

et en déduire une autre démonstration du théorème précédent (Darboux, *loc. cit.*).

7. Faire le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}.$$

En le multipliant par un déterminant analogue, en déduire une extension du théorème des nos 5 et 6 (Darboux, *loc. cit.*).

8. Calculer les entiers $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ de manière que le produit lignes par lignes des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ x_4 & x_5 & x_6 & 0 \\ x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{vmatrix}$$

n'ait que des éléments nuls au-dessus de la diagonale principale.

9. *Déterminants fonctionnels.* — Étant données trois fonctions, par exemple, u, v, w de x, y, z , on appelle *déterminant fonctionnel*, ou *jacobien*, de ces trois fonctions le déterminant

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Montrer que si l'on fait un changement de variables quelconque (n° 139), on a identiquement

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x', y', z')} = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \frac{D(x, y, z)}{D(x', y', z')}.$$

10. Pour résoudre le système

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d', \quad x^2 + y^2 + z^2 = d'',$$

on peut prendre pour inconnue auxiliaire le déterminant fonctionnel des premiers membres. Calculer le carré de ce déterminant (Darboux, *loc. cit.*).

11. Soient une courbe plane orientée et une origine des arcs M_0 sur cette courbe. On considère trois points M_1, M_2, M_3 d'abscisses curvi-

lignes infiniment petites s_1, s_2, s_3 . Calculer, au quatrième ordre près, l'aire algébrique du triangle $M_1 M_2 M_3$.

[Si x, y sont les coordonnées du point d'abscisse curviligne s et si x', y', x'', y'' sont leurs dérivées premières et secondes, l'aire demandée est, à un facteur numérique près, le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 \\ 1 & s_2 & s_2^2 \\ 1 & s_3 & s_3^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & x'_0 & x''_0 \\ y_0 & y'_0 & y''_0 \end{vmatrix},$$

lequel produit est égal à

$$-\frac{1}{\rho} \overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_2 M_3} \cdot \overline{M_3 M_1},$$

ρ désignant le rayon de courbure en M_0 .]

12. Étendre l'exercice précédent à un tétraèdre infiniment petit inscrit dans une courbe gauche.

[On prouvera que le volume du tétraèdre est, à un facteur numérique et au septième ordre près,

$$\frac{1}{\tau^2 \tau} \overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_1 M_3} \cdot \overline{M_1 M_4} \cdot \overline{M_2 M_3} \cdot \overline{M_3 M_4} \cdot \overline{M_4 M_2},$$

ρ et τ désignant les rayons de courbure et de torsion en M_0 (Darboux, *loc. cit.*).]

13. Voir ce que devient l'exercice résolu n° 4 quand on se borne à la géométrie plane ($z_i = 0$).

14. Étant données quatre demi-droites issues du même point : $O\lambda, O\lambda_1, O\lambda', O\lambda'_1$, de cosinus directeurs $a, b, c; a_1, b_1, c_1$; etc., faire le produit des matrices

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \end{vmatrix}.$$

En déduire la relation

$$\cos \beta \cos \beta' - \cos \gamma \cos \gamma' = \cos \Lambda \sin \alpha \sin \alpha',$$

ou l'on appelle $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ les angles $\widehat{\lambda O\lambda_1}, \widehat{\lambda' O\lambda'_1}, \widehat{\lambda O\lambda'}, \widehat{\lambda_1 O\lambda'_1}, \widehat{\lambda O\lambda_1}, \widehat{\lambda' O\lambda'_1}$ et Λ l'angle des deux plans $\widehat{\lambda O\lambda_1}$ et $\widehat{\lambda' O\lambda'_1}$.

15. Étant données les quatre demi-droites $O\lambda_1, O\lambda_2, O\lambda_3, O\lambda_4$ de

cosinus directeurs a_1, b_1, c_1 , etc., multiplier par elle-même la matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

En déduire la relation qui existe entre les angles que font ces quatre demi-droites deux à deux.

16. Développer par la règle de Laplace le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

CHAPITRE XXIV.

ÉQUATIONS ET FORMES LINÉAIRES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Résoudre et discuter le système

$$(1) \quad y + z + mt = a,$$

$$(2) \quad z + t + mx = b,$$

$$(3) \quad t + x + my = c,$$

$$(4) \quad x + y + mz = d.$$

Première méthode. — On peut employer la méthode générale décrite au n° 290. Le déterminant des coefficients des inconnues est

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 & 1 \\ 1 & 1 & m & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour le calculer aisément, ajoutons toutes les lignes à la première; celle-ci devient

$$m + 2, \quad m + 2, \quad m + 2, \quad m + 2.$$

Faisant sortir le facteur $m + 2$, nous retranchons ensuite la dernière colonne des trois premières; il vient, en développant suivant la première ligne,

$$D = -(m + 2) \begin{vmatrix} m-1 & -1 & 0 \\ 0 & m-1 & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -(m + 2) \{ m(m-1)^2 + 1 + m-1 \},$$

$$(5) \quad D = -m(m + 2)(m^2 - 2m + 2).$$

$D : m(m + 2) \neq 0$. — Il y a une solution unique donnée par les

formules de Cramer. Par exemple,

$$(6) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & m \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & m & 0 & 1 \\ d & 1 & m & 0 \end{vmatrix}}{D} \\ = \frac{a(m^2+1) - b(m^3 - m + 1) + c(1 - m) - d(1 + m - m^2)}{-m(m+2)(m^2 - 2m + 1)}.$$

Les valeurs de y, z, t s'en déduiraient par permutations circulaires sur a, b, c, d , car le système proposé ne change pas quand on permute circulairement à la fois x, y, z, t et a, b, c, d .

II : $m = 0$. — Si l'on enlève à D sa quatrième ligne et sa quatrième colonne, on obtient un déterminant qui est égal à 1. On peut le prendre pour déterminant principal. Le déterminant caractéristique correspondant est

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & d \end{vmatrix} = -a + b - c + d = (b + d) - (a + c).$$

Si $a + c \neq b + d$, il n'y a pas de solution.

Si $a + c = b + d$, il y a une infinité de solutions, obtenues en donnant à t une valeur arbitraire et résolvant ensuite les équations (1), (2), (3) par rapport à x, y, z , ce qui donne immédiatement

$$(7) \quad x = c - t, \quad y = a - b + t, \quad z = b - t.$$

III : $m = -2$. — On peut prendre le même déterminant que tout à l'heure pour déterminant principal, car il est égal cette fois à 5. Le déterminant caractéristique est

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ -2 & 0 & 1 & b \\ 1 & -2 & 0 & c \\ 1 & 1 & -2 & d \end{vmatrix} = 5(a + b + c + d).$$

Si $a + b + c + d \neq 0$, pas de solution.

Si $a + b + c + d = 0$, infinité de solutions obtenues, comme plus haut, en résolvant par rapport à x, y, z le système

$$(8) \quad y + z = 2t + a, \quad z - 2x = b - t, \quad x - 2y = c - t.$$

On pourrait employer les formules de Cramer. Mais il est plus rapide, par exemple, de multiplier la première équation par 2, la seconde par -2 , la troisième par 1 et d'ajouter: on obtient de la sorte

$$5x = 2(2t - a) + 2(t - b) + c - t = 5t + 2a - 2b + c;$$

d'où

$$(9) \quad x = t + \frac{2a - 2b + c}{5}, \quad y = t + \frac{a - b - 2c}{5}, \quad z = t + \frac{4a + b + 2c}{5}.$$

Deuxième méthode. — Ajoutons les quatre équations données

$$(10) \quad (x + y + z + t)(m + 2) = a + b + c + d.$$

Ceci nous conduit immédiatement à distinguer deux cas :

Premier cas : $m = -2$. — Pour que le système soit compatible, il faut qu'on ait

$$a + b + c + d = 0.$$

Si cette condition est remplie, chaque équation est une conséquence des trois autres. On peut, par exemple, se borner à considérer les trois premières. On retombe alors sur le système (8) et, par suite, sur les formules (9).

Deuxième cas : $m \neq -2$. — De (10) on tire

$$(11) \quad x + y + z + t = \frac{a + b + c + d}{m + 2} = S.$$

Si l'on tient compte de cette équation, les proposées s'écrivent, en posant $m + 1 = \mu$, pour abrégér l'écriture,

$$(12) \quad \begin{cases} x = \mu t + S - a, \\ y = \mu x + S - b, \\ z = \mu y + S - c, \\ t = \mu z + S - d. \end{cases}$$

Des trois premières on tire successivement x, y, z en fonction de t .

En portant dans la quatrième, il vient, en posant encore, pour abrégér l'écriture, $S - a = \alpha, S - b = \beta, S - c = \gamma, S - d = \delta$,

$$(13) \quad t = \mu^4 t + \mu^3 \alpha + \mu^2 \beta + \mu \gamma + \delta.$$

Le coefficient de t étant $1 - \mu^4$, il faut de nouveau distinguer plusieurs cas :

I : $\mu = 1$, $m = 2$ ou 0 . — On a

$$(14) \quad t = \frac{x^3x + x^2\beta + x\gamma + \delta}{1 - x}.$$

Il y a *une seule solution*, donnée par la formule (14) et celles qu'on obtient par permutations circulaires. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'identité de ces formules avec celles qui sont données par (6).

II : $\mu = 1$, $m = 2$. — L'équation (13) est vérifiée identiquement, si l'on tient compte de la valeur (11) de S . Mais, c'est ici le lieu d'observer que, si les équations (12) sont des conséquences du système proposé, la réciproque peut ne pas être vraie. Les équations (12) ont été obtenues en retranchant (11) de (1), (2), (3), (4). Inversement, on obtient (1), (2), (3), (4) en retranchant (11) de (12). Donc, le système proposé est une conséquence des équations (12) si l'on peut déduire de celles-ci l'équation (11). Or, en les ajoutant, on a

$$(15) \quad (x+y+z-t)(1-\mu) = 4S - (a+b+c+d) = S[4 - (m+2)] = S(1-\mu),$$

c'est-à-dire l'équation (11), *sauf si* $\mu = 1$. C'est précisément l'hypothèse actuelle.

Pour avoir un système équivalent au proposé, il nous faut prendre, par exemple, les trois premières équations (12) et leur adjoindre (11). En portant dans (11) les valeurs de x , y , z calculées en fonction de t , nous avons

$$4t - 6S - 3a - 2b - c = S,$$

d'où

$$(16) \quad t = \frac{7a + 3b + c + 5d}{16}.$$

Les valeurs de x , y , z s'en déduisent par permutations circulaires. On a *une seule solution*.

III : $\mu = -1$, $m = 0$. — L'équation (13) se réduit à $x + y = \beta + \delta$, ou

$$(17) \quad a - c = b - d,$$

Pour que le système soit compatible, il faut donc que la condition (17) soit remplie. Si elle l'est, les formules (12), ou mieux les équations (1), (2), (3), (4) donnent la solution générale

$$(18) \quad x = -t + c, \quad y = t - c + d, \quad z = -t + b,$$

où t est arbitraire.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Résoudre les systèmes suivants, et discuter s'il y a lieu :

$$(I) \quad 2x + y + z = 1, \quad x + 5y + 2z = 0, \quad 3x + 2y + 4z = 6;$$

$$(II) \quad x + 2y + 5z = 0, \quad 3x + z = -2, \quad 6x + y = 5;$$

$$(III) \quad \begin{cases} x + y + z + t = 4, & x + 2y + 3z = 1, \\ t + y + 2z + 3t = 1, & z + 2t + 3x = 1; \end{cases}$$

$$(IV) \quad \frac{y + z + x}{a} = \frac{z + x + y}{b} = \frac{x + y + z}{c}, \quad Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$(V) \quad \frac{x + my + nz}{x} = \frac{y + mz + nx}{y} = \frac{z + mx + ny}{z};$$

$$(VI) \quad \begin{cases} mx + ny = a, & my + nz = b, & mz + nx = c, \\ mt + nu = d & mu + nx = e. \end{cases}$$

(Pour III, retrancher la première de la seconde; puis retrancher la troisième.

Pour IV, prendre pour inconnue auxiliaire ρ la valeur commune des rapports; calculer x, y, z en fonction de ρ , et porter dans la dernière équation.

Pour V, prendre encore pour inconnue auxiliaire la valeur commune des rapports; on obtient un système de trois équations linéaires et homogènes qu'il faut discuter.

Pour VI, on peut multiplier par $m^2, -m^2n, m^2n^2, -mn^3, n^4$ et ajouter.)

2. Étudier l'indépendance des formes

$$\begin{aligned} x - y + z - t, \quad x + y + z + t, \quad ax + by + cx + dt; \\ a_1x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n, \quad x_1 + a_2x_2 + x_3 + \dots + x_n, \quad \dots, \\ x_1 + x_2 + \dots + a_nx_n. \end{aligned}$$

(Pour les dernières, chercher la combinaison linéaire nulle. Prendre pour inconnue auxiliaire $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \lambda$.)

3. Étant donnée une substitution linéaire, calculer les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ pour que les valeurs correspondantes des y_i leur soient proportionnelles.

$\left(\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = S; \right.$ d'où n équations linéaires et homogènes en x_i . En annulant le déterminant, on obtient une *équation en S* du $n^{\text{ième}}$ degré. Donc, en général, il y a n solutions distinctes. Montrer, en

particulier, qu'il en est certainement ainsi si l'équation en S n'a que des racines simples.

Dans le cas où la substitution est *orthogonale*, prouver que l'équation en S est réciproque. Admet-elle les racines ± 1 ?)

4. Prouver que les formules

$$\begin{aligned}\rho x + \mu z + \nu y' &= \rho x' + \mu z' + \nu y', \\ \rho y' + \nu x + \lambda z &= \rho y' + \nu x' + \lambda z', \\ \rho z + \lambda y' - \mu x &= \rho z' - \lambda y' + \mu x'\end{aligned}$$

définissent une substitution orthogonale, quels que soient λ, μ, ν, ρ .

(Si on les résout par rapport à x, y, z , on obtient les formules dites d'*Olinde Rodrigues*.

Pour démontrer qu'on a bien une substitution orthogonale, élever au carré les équations données et ajouter. En se servant de l'identité de Lagrange et de l'équation $\lambda x + \mu y' + \nu z = \lambda x' + \mu y' + \nu z'$, conséquence des proposées, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.)

CHAPITRE XXV.

FORMES QUADRATIQUES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Décomposer en carrés la forme quadratique

$$\omega = x^2 + 9y^2 + z^2 + mt^2 - 4yz - 2zv + 6xy + 2tx - 2mty + tz.$$

Prenons x pour variable directrice (n° 301) :

$$\omega = (x + 3y - z + t)^2 - (3y - z + t)^2 + 9y^2 + z^2 + mt^2 - 4yz - 2mty + tz,$$

$$\omega = P_1^2 + [(m-1)t^2 + 2yz - 2(3+m)yt + 3zt] = P_1^2 + \omega_1.$$

Prenons ensuite y et z pour variables directrices simultanées :

$$\omega_1 = 2[z - (3+m)t] \left(y + \frac{3}{2}t \right) - 3(3+m)t^2 + (m-1)t^2,$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left[y + z - \left(\frac{3}{2} + m \right) t \right]^2 - \frac{1}{2} \left[y - z + \left(\frac{9}{2} + m \right) t \right]^2 + 4(m+2)t^2.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \omega &= (x + 3y - z + t)^2 + \frac{1}{2} \left[y + z - \left(\frac{3}{2} + m \right) t \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[y - z + \left(\frac{9}{2} + m \right) t \right]^2 + 4(m+2)t^2. \end{aligned}$$

Autrement : Prenons z pour variable directrice

$$\begin{aligned} \omega &= \left(z - x + 3y - \frac{t}{3} \right)^2 - \left(x + 2y - \frac{t}{3} \right)^2 \\ &\quad + x^2 + 9y^2 + mt^2 + 6xy + 2tx - 2mty, \end{aligned}$$

$$\omega = Q_1^2 + \left[5y^2 + \left(m - \frac{1}{3} \right) t^2 + 2xy + 3tx + 2(1-m)ty \right] = Q_1^2 + \theta_1.$$

Prenons ensuite y pour variable directrice

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{1}{5} [5y + x + (1-m)t]^2 - \frac{1}{5} [x + (1-m)t]^2 - \left(m - \frac{1}{4}\right)t^2 + 3tx, \\ \theta_1 &= \frac{1}{5} Q_2^2 + \left[-\frac{x^2}{5} - \left(\frac{m^2}{5} - \frac{7m}{5} + \frac{9}{5}\right)t^2 + \frac{13+2m}{5}tx\right] = \frac{1}{5} Q_2^2 + \frac{1}{5} \theta_2.\end{aligned}$$

Prenons x pour variable directrice

$$\begin{aligned}\theta_2 &= -\left[x - \left(\frac{13}{2} + m\right)t\right]^2 + \left(\frac{13}{2} + m\right)^2 t^2 - \left(m^2 - 7m + \frac{9}{4}\right)t^2, \\ \theta_2 &= -Q_3^2 + 20(m+2)t^2.\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\omega &= \left(5 - x - 2y + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{5} [5y + x + (1-m)t]^2 \\ &\quad - \frac{1}{5} \left[x - \left(\frac{13}{2} + m\right)t\right]^2 + 4(m+2)t^2.\end{aligned}$$

On vérifie, conformément à la loi d'inertie (n° 306), que dans les deux modes de décomposition, on a trois carrés positifs et un carré négatif si $m > -2$, et deux carrés positifs et deux carrés négatifs si $m < -2$. Si $m = -2$, on a seulement trois carrés, dont un seul est négatif.

On peut encore vérifier que le discriminant s'annule pour $m = -2$ et dans ce cas seulement. Effectivement, on a

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & -2 & -m \\ -1 & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -m & \frac{1}{2} & m \end{vmatrix}.$$

En développant, par exemple, suivant la première ligne, on a

$$\begin{aligned}\delta &= \left(9m + m - m - m^2 - \frac{9}{4} - 4m\right) - 3\left(3m - 1 + \frac{m}{2} + m - \frac{3}{4} - 2m\right) \\ &\quad - \left(-6m + \frac{9}{2} - m^2 - 2m + \frac{3}{2}m + 9m\right) \\ &\quad - \left(-3 - 9 - 2m - 4 - 3m - \frac{9}{2}\right), \\ \delta &= -4(m+2),\end{aligned}$$

quantité qui ne s'annule que pour $m = -2$.

Le déterminant formé par les trois premières lignes et colonnes est d'ailleurs égal à $2 \neq 0$; de sorte que, lorsque $m = -2$, ω est *a priori* décomposable en trois carrés, ce que nous avons vérifié.

2. Calculer la forme polaire de la forme quadratique précédente relativement aux groupes de variables

$$(x, y, z, t), \quad (x', y', z', t'),$$

ou

$$(x, y, z, t), \quad (0, 0, 0, 1).$$

Pour le premier groupe, nous appliquons la règle pratique donnée au n° 308, et nous écrivons immédiatement

$$\begin{aligned} \omega(x|x') &= xx' + 9yy' + zz' + mt' - 2(yz' + zy') - (zx' + xz') \\ &\quad - 3(xy' + yx') + (tx' + xt') - m(ty' + yt') + \frac{1}{2}(tz' + zt'). \end{aligned}$$

Pour le deuxième groupe, nous utilisons la formule

$$\omega(x|x') = \frac{1}{2} \left(x' \frac{\partial \omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \omega}{\partial y} + z' \frac{\partial \omega}{\partial z} + t' \frac{\partial \omega}{\partial t} \right),$$

qui se réduit ici à

$$\omega(x|x') = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial t} = mt + x - my + \frac{1}{2}z.$$

3. Calculer la forme polaire de

$$\omega = (x + y - z - t)^2 + (2x + y)(z - t) + t^2,$$

relativement aux groupes (x, y, z, t) , $(1, 1, 1, 1)$.

Regardant ω comme une forme quadratique des formes linéaires $x + y - z - t$, $2x + y$, $z - t$, t , nous avons (n° 308)

$$\begin{aligned} \omega(x|x') &= (x + y - z - t)(1 + 1 - 1 - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2}[(2x + y)(1 - 1) + (z - t)(2 + 1)] + t \times 1, \end{aligned}$$

ou

$$\omega(x|x') = \frac{3}{2}(z - t) + t = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}t.$$

4. INVARIANTS D'UNE FORME QUADRATIQUE. — Les coefficients de l'équation en S d'une forme quadratique sont des INVARIANTS pour toute substitution orthogonale.

Étant donnée la forme quadratique ω , considérons une fonction quelconque de ses coefficients, soit $I = f(a_i^k)$. Imaginons qu'on fasse maintenant sur ω une substitution linéaire (S) , transformant $\omega(x)$ en une autre forme quadratique $\vartheta(y)$, dont nous désignons les coefficients par b_i^k . Ces coefficients sont certaines fonctions linéaires des a_i^k .

Cela posé, on dit que *la fonction $\mathbf{I}$ est un invariant pour la substitution (S) , si l'on a identiquement $f(b_i^k) \equiv f(a_i^k)$* ⁽¹⁾.

Par exemple, le discriminant est un invariant pour toutes les substitutions de module ± 1 ; comme cela résulte du théorème démontré au n° 309.

Je dis maintenant que *les n coefficients du polynôme en S que nous avons appelé $\hat{\delta}(S)$ sont des invariants pour toute substitution orthogonale.*

Appelons $\varepsilon(S)$ le polynôme analogue relatif à la forme $\theta(y)$. Il faut montrer que $\hat{\delta}(S) \equiv \varepsilon(S)$. Pour cela, nous observons que $\hat{\delta}(S)$ est le discriminant de la forme quadratique

$$(1) \quad \omega'(x) = \omega(x) - S(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

De même, $\varepsilon(S)$ est le discriminant de

$$(2) \quad \theta'(y) = \theta(y) - S(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2).$$

On a d'ailleurs, quels que soient S et les x_i ,

$$(3) \quad \theta'(y) \equiv \omega'(x),$$

car

$$\theta(y) \equiv \omega(x)$$

par hypothèse, et

$$(y_1^2 + \dots + y_n^2) = (x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

parce que la substitution est orthogonale. Donc, on a aussi (n° 309)

$$\varepsilon(S) = \hat{\delta}(S),$$

parce que le carré du module de la substitution est égal à 1 (n° 299) ⁽²⁾.

5. INVARIANTS SIMULTANÉS DE DEUX FORMES QUADRATIQUES. — Soient deux formes quadratiques $\omega(x)$ et $\theta(x)$. Le discriminant $\hat{\delta}(S)$ de la forme $\omega(x) - S\theta(x)$ est un polynôme de degré n en S .

Faisons une substitution linéaire quelconque et soient $\Omega(y)$, $\Theta(y)$ et par suite $\Omega(y) - S\Theta(y)$ les formes transformées de $\omega(x)$, $\theta(x)$ et $\omega(x) - S\theta(x)$. Le discriminant $\Delta(S)$ de $\Omega(y) - S\Theta(y)$ est encore un polynôme de degré n en S . On sait d'ailleurs que, si μ est le module de

(1) Ceci doit avoir lieu quels que soient les a_i^k .

(2) On peut aussi, en s'appuyant sur le théorème du n° 309, démontrer que les deux polynômes $\hat{\delta}(S)$ et $\varepsilon(S)$ ont les mêmes racines, parce que pour chacune de ces racines $\omega'(x)$ et $\theta'(y)$ se décomposent en moins de n carrés (n° 305).

la substitution, on a l'identité

$$(1) \quad \Delta(S) \equiv p^2 \hat{\sigma}(S),$$

On voit donc que les coefficients de $\Delta(S)$ sont proportionnels à ceux de $\hat{\sigma}(S)$. Autrement dit, *les rapports des coefficients de $\hat{\sigma}(S)$ à l'un d'entre eux sont des invariants pour toute substitution linéaire*. C'est ce qu'on appelle des *invariants simultanés* des deux formes quadratiques.

L'équation

$$(2) \quad \hat{\sigma}(S) = 0$$

est liée intimement au problème suivant :

Trouver une substitution linéaire qui fasse disparaître simultanément les termes rectangles dans les deux formes ω et θ .

Soit

$$(3) \quad x_i = x_1^i y_1 + x_2^i y_2 + \dots + x_n^i y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

une telle substitution. On a, par hypothèse,

$$(4) \quad \omega(x) \equiv \Omega(y) = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \dots + A_n y_n^2,$$

$$(5) \quad \theta(x) \equiv \Theta(y) = B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + \dots + B_n y_n^2.$$

Différentions par rapport à y_i ,

$$(6) \quad A_i y_i \equiv \frac{1}{2} \left(x_1^i \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + x_2^i \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + x_n^i \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1^i} + \dots + x_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n^i} \right),$$

$$(7) \quad B_i y_i \equiv \frac{1}{2} \left(x_1^i \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + x_2^i \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \dots + x_n^i \frac{\partial \theta}{\partial x_n} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1^i} + \dots + x_n \frac{\partial \theta}{\partial x_n^i} \right).$$

Éliminons y_i ; nous avons, en posant $S_i = \frac{B_i}{A_i}$,

$$(8) \quad x_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1^i} - S_i \frac{\partial \theta}{\partial x_1^i} \right) + x_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2^i} - S_i \frac{\partial \theta}{\partial x_2^i} \right) + \dots + x_n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n^i} - S_i \frac{\partial \theta}{\partial x_n^i} \right) = 0.$$

Ceci doit avoir lieu quels que soient les x ; donc

$$(9) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1^i} - S_i \frac{\partial \theta}{\partial x_1^i} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_2^i} - S_i \frac{\partial \theta}{\partial x_2^i} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_n^i} - S_i \frac{\partial \theta}{\partial x_n^i} = 0.$$

Nous obtenons, pour déterminer $x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i$, n équations linéaires et homogènes. Comme nous devons avoir une solution autre que la solution zéro, le déterminant de ces équations doit être nul. Autrement dit, S_i doit être une racine de l'équation (2).

Bornons-nous au cas où cette équation n'a pas de racine multiple. A chaque racine correspond un système tel que (9), qui admet une solution déterminée, à un facteur près (1). Ce facteur étant choisi quelconque, on obtiendra de la sorte tous les coefficients de la substitution (3).

Reste à montrer maintenant que, les coefficients étant ainsi calculés, on n'aura effectivement aucun terme rectangle dans $\Omega(\gamma)$, ni dans $\Theta(\gamma)$.

Pour montrer, par exemple, que le rectangle $\gamma_i \gamma_j$ n'est pas dans $\Omega(\gamma)$, il suffit de prouver que la forme polaire $\Omega(x | x')$ est nulle pour le couple de valeurs

$$(\gamma_i = 1, \gamma_j = 0, j \neq i), \quad (\gamma'_i = 1, \gamma'_j = 0, i \neq j);$$

ou encore que la forme polaire $\omega(x | x')$ est nulle pour les valeurs correspondantes

$$(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i), \quad (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j).$$

Il suffit donc de vérifier les égalités

$$(10) \quad \omega(x_k^i | x_k^j) = 0, \quad \theta(x_k^i | x_k^j) = 0.$$

Or, si l'on multiplie les équations (9) respectivement par $x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j$ et qu'on ajoute, on obtient

$$(11) \quad \omega(x_k^i | x_k^j) - S_i \theta(x_k^i | x_k^j) = 0.$$

De même

$$(12) \quad \omega(x_k^j | x_k^i) - S_j \theta(x_k^j | x_k^i) = 0.$$

Comme $S_j \neq S_i$, on en conclut nécessairement (10).

6. Calculer la forme adjointe de la forme quadratique

$$\omega(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 6xy.$$

Appelons u, v, w les variables adjointes. Nous avons

$$(1) \quad x + 3y + z = u, \quad 3x + y + z = v, \quad x + y + 3z = w.$$

Resolvant, il vient

$$(2) \quad x = \frac{2u - (v + 2w)}{12}, \quad y = \frac{4u - v - w}{12}, \quad z = \frac{2u - v - 5w}{12}.$$

(1) Le déterminant principal est, en effet, d'ordre $n-1$, car si tous les mineurs d'ordre $n-1$ étaient nuls, S_i serait racine multiple de $\mathfrak{D}(S)$. (Cf. n° 310.)

Portons dans

$$(3) \quad \omega = (ux + vy + wz);$$

il vient

$$\Omega(u, v, w) = \frac{1}{12} (2u^2 - v^2 + 5w^2 + 2vw + 4wu + 8uv).$$

Comme vérification, on constate que les formules (2) sont identiques aux suivantes :

$$x = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad y = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial v}, \quad z = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial w}.$$

On constate également, conformément à ce qui a été vu au n° 312, que les coefficients de Ω sont égaux aux mineurs du discriminant δ de ω divisés par δ . En effet,

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

Le coefficient de u^2 , par exemple, doit être égal à

$$\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{-24} = \frac{-4}{-24} = \frac{1}{6}.$$

C'est bien ce que nous avons trouvé. Nous laissons au lecteur la vérification des autres coefficients, ainsi que celle des différentes formules établies au n° 312.

EXERCICES PROPOSÉS

1. Décomposer en carrés les formes quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz + 4zx + 8xy, \\ mx^2 + y^2 + mz^2 + 2mxy + 2zx + 6xy, \\ 3x^2 + y^2 + z^2 + mt^2 + 6xy + 2xz + 2yz + 4mx + 6my + 2tz, \\ x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2tx + 4ty + 2tz. \end{aligned}$$

2. Calculer les formes polaires des formes quadratiques précédentes par rapport aux groupes de variables

$$\begin{aligned} (x, y, z, t), \quad (x', y', z', t'); \quad (x, y, z), \quad (x', y', z'); \\ (1, 0, 1, 0), \quad (-1, -1, 2, 1), \quad (0, 0, 1), \quad (x, y, 1). \end{aligned}$$

3. Calculer les formes polaires de

$$(x + 2z)(t - y) + (y - 3z - t)(z - 3x + t)$$

pour

$$(x, y, z, t), (0, 2, 1, 2);$$

$$(x - y - 2z)^2 + (3x + y)^2 \quad \text{pour } (x, y, z), (1, 2, 3).$$

4. Étant donnée la forme quadratique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, vérifier que $A + C$ et $AC - B^2$ sont des invariants pour la substitution orthogonale

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.$$

5. Étant donnée la forme quadratique

$$\omega(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y'^2 + A''z^2 + 2By'z + 2B'zx + 2B''xy,$$

à quelle condition doivent satisfaire ses coefficients pour qu'on puisse, par une substitution orthogonale, la mettre sous la forme

$$\omega' \equiv \lambda x'^2 + 2\mu y'z'?$$

[L'équation en S de la seconde forme est $(\lambda - S)(S^2 - \mu^2) = 0$. On est donc ramené à exprimer que l'équation en S de ω a deux racines de somme nulle (Exercice résolu n° 4), ce qui est un problème facile (n° 229). La condition étant supposée remplie, on saura résoudre l'équation en S ; donc, ramener ω et ω' à la forme $\omega'' \equiv S_1 x''^2 + S_2 y''^2 + S_3 z''^2$. Inversement, on saura passer de ω'' à ω' ; donc finalement, de ω à ω' .]

6. Étant donnée une forme quadratique à quatre variables, trouver les conditions pour qu'on puisse, par une substitution orthogonale, la mettre sous la forme $\lambda x'y' + \mu z't'$.

(L'équation en S doit être bicarrée.)

7. Trouver la substitution orthogonale qui fait disparaître les termes rectangles de la forme quadratique

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2(yz + xy) - 2zx.$$

8. Étant données deux formes quadratiques à trois variables

$$\omega(x, y, z) \quad \text{et} \quad \theta(x, y, z),$$

trouver la condition pour qu'on puisse, par une substitution linéaire convenable, les mettre respectivement sous la forme

$$\lambda_1 y'z' + \mu z'x' + \nu x'y' \quad \text{et} \quad \alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2.$$

(L'équation en S relative à ces deux formes doit avoir trois racines de somme nulle.)

NOTE I.

SUR LES RELATIONS DE RECURRENCE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Calculer u_n , sachant qu'on a $u_1 = 0$ et

$$(1) \quad (n+1)^2 u_n = (n-1)^2 u_{n-1} + n.$$

Première méthode. — Nous écrivons

$$\begin{aligned} (n+1)^2 u_n &= (n-1)^2 u_{n-1} + n && n^2, \\ n^2 u_{n-1} &= (n-2)^2 u_{n-2} + (n-1) && (n-1)^2, \\ (n-1)^2 u_{n-2} &= (n-3)^2 u_{n-3} + (n-2) && (n-2)^2, \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\ 3^2 u_2 &= 1^2 u_1 + 2 && 2^2. \end{aligned}$$

Multiplions par les facteurs indiqués à droite et ajoutons

$$u_n n^2 (n+1)^2 = - [2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3] = 1 - S_3,$$

en appelant S_3 la somme des cubes des n premiers nombres entiers; d'où

$$(2) \quad u_n = \frac{1 - S_3}{n^2 (n+1)^2}$$

Deuxième méthode. — Si nous employons le critérium et les notations du n° 313, nous avons

$$\frac{a_n - 1}{b_n} = \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{-n} = 4 = \text{const.}$$

Dès lors, faisons le changement de variable $u_n = v_n + A$. Si nous annulons le terme constant dans la relation transformée, nous avons

$$A(n+1)^2 = A(n-1)^2 + n;$$

d'où $A = -\frac{1}{4}$. Puis

$$(n-1)^2 v_n = (n-1)^2 v_{n-1},$$

$$n^2 v_{n-1} = (n-2)^2 v_{n-2},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$3^2 v_2 = 1^2 v_1,$$

$$v_1 = \frac{1}{4} \qquad \left(v_1 = u_1 + \frac{1}{4} \right).$$

Multiplications

$$v_n = \frac{1^2 \cdot 2^2}{(n+1)^2 n^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{n^2 (n+1)^2};$$

d'où

$$(3) \quad u_n = v_n - \frac{1}{4} = \frac{1 - n^2 (n+1)^2}{4 n^2 (n+1)^2} = - \frac{(n-1)(n+2)(n^2+n+2)}{4 n^2 (n+1)^2}.$$

Remarque. — Si l'on compare (2) et (3), on trouve

$$S_3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4},$$

formule qu'on pourrait établir en suivant la marche indiquée à l'exercice résolu n° 3 du Chapitre II.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer u_n sachant qu'on a

$$(I) \qquad u_n = n^2 u_{n-1}, \qquad u_0 = 1;$$

$$(II) \qquad (n+1)u_n = nu_{n-1}, \qquad u_0 = 1;$$

$$(III) \quad (n+1)(n-1)u_n = n^2 u_{n-3}, \qquad u_0 = 1, \qquad u_1 = 0, \qquad u_2 = -1.$$

2. Calculer u_n sachant qu'on a

$$(I) \qquad u_n = nu_{n-1} + 1, \qquad u_0 = 1;$$

$$(II) \qquad (n+2)u_n = nu_{n-1} + 2, \qquad u_0 = 1;$$

$$(III) \qquad (n-1)^3 u_n + (n-1)^3 u_{n-1} = n(n^2+3), \qquad u_1 = -13;$$

$$(IV) \qquad u_n = 2u_{n-1} + 6.$$

3. Calculer u_n sachant qu'on a

$$(I) \qquad (u_n u_{n-1})^n = u_{n-1}, \qquad u_1 = 2;$$

$$(II) \qquad u_n u_{n-1}^2 = a, \qquad u_0 = 1.$$

4. Étant donnée la relation de récurrence

$$(1) \quad P_n = -x^2 P_{n-1} + n(n-1)P_{n-2},$$

où P_{n-1} désigne la dérivée de P_{n-1} par rapport à x , montrer que, si l'on suppose $P_0 = 1$, P_n est un polynôme de degré n en x . Calculer son terme de plus haut degré et son terme constant. Montrer qu'il a toutes ses racines réelles et distinctes.

[Pour prouver que P_n est un polynôme de degré n , raisonner par induction. Pour prouver qu'il a toutes ses racines réelles et distinctes, substituer dans P_n les racines de P_{n-1} , supposées réelles et distinctes, en y ajoutant $-\infty$ et $+\infty$. En tenant compte de (1) et du théorème de Rolle, on n'obtient que des variations.]

5. Étant donnée la relation

$$(1) \quad P_n - n.x.P_{n-1} - [n(n-1).x - 2]P_{n-2} = 0,$$

montrer que, si l'on suppose $P_0 = 1$ et $P_1 = x$, P_n est polynôme de degré n en x . Calculer son terme constant, le coefficient de x^n et celui de x^{n-1} .

NOTE III.

SUR L'ÉQUATION DE RICCATI.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Chercher si l'équation

$$(1) \quad 2x \frac{dy}{dx} = y^2 - 2x^2y + x^4 + 4x^2 - 1$$

admet pour intégrale particulière un polynome et l'intégrer dans ce cas.

Soit m le degré du polynome. Le premier membre est de degré m . Le degré du second membre est le plus grand des trois nombres $2m$, $m+2$ et 4 , si toutefois il n'y a pas de réductions. Si $m > 2$, celles-ci ne sont pas possibles, car $2m$ est supérieur à $m+2$ et 4 . Le second membre est de degré supérieur au degré du premier; l'identité est impossible. Pour $m = 2$, les trois nombres $2m$, $m+2$ et 4 sont égaux; il peut y avoir des réductions.

Posons donc

$$(2) \quad y = ax^2 + bx + c,$$

et portons dans (1)

$$2x(2ax + b) = (ax^2 + bx + c)^2 - 2x^2(ax^2 + bx + c) + x^4 + 4x^2 - 1.$$

Identifions. En annulant le coefficient de x^4 , nous avons d'abord

$$a^2 - 2a + 1 = 0;$$

d'où

$$a = 1.$$

Le terme en x^3 disparaît alors identiquement. En égalant les coefficients de x^2 , nous trouvons ensuite $b = 0$. Le terme en x disparaît. En annulant enfin le terme constant, nous obtenons $c^2 = 1$; d'où $c = \pm 1$. Il y a donc deux polynômes répondant à la question; ce sont

$$(3) \quad y_1 = x^2 + 1, \quad y_2 = x^2 - 1.$$

L'équation (1) doit donc s'intégrer par une quadrature (n° 323). Effectivement, faisons le changement de variable

$$(4) \quad v = x^2 + 1 + \frac{1}{z};$$

nous avons

$$(5) \quad 2xv' = -2z - 1.$$

Cette équation doit admettre l'intégrale particulière

$$z_1 = \frac{1}{x^2 + (x^2 + 1)} = -\frac{1}{2};$$

ce qui se vérifie d'un coup d'œil. Nous aurons l'intégrale générale en ajoutant à $z_1 = -\frac{1}{2}$ l'intégrale générale de l'équation sans second membre (n° 191, *remarque IV*). Celle-ci s'écrit

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

et donne

$$z = \frac{C}{x} \quad (C = \text{const.}).$$

L'intégrale générale de (5) est donc

$$z = \frac{C}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2C + x}{2x}$$

et celle de (1) est finalement

$$y = x^2 + 1 + \frac{1}{z} = x^2 + 1 + \frac{2x}{2C + x} = \frac{2C(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)}{2C + x}.$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Intégrer l'équation

$$y' = m(y - a)(y - b) \quad (m, a, b = \text{const.}),$$

en observant qu'elle admet les solutions particulières $y_1 = a$, $y_2 = b$. Comparer avec la méthode de séparation des variables.

2. Vérifier que l'équation

$$y' = 1 - 6x + 2(5 - 4x)y + 8xy^2$$

admet une intégrale particulière fonction homographique de x . En déduire l'intégrale générale.

3. Vérifier que l'équation

$$y' \cos x = y^2 - (\sin x + 4 \cos x)y - 5 \cos^2 x$$

admet trois intégrales particulières de la forme $A \cos x + B \sin x$. En déduire l'intégrale générale.

4. Intégrer l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \cos z (1 - \cot^2 x) - 2 \sin z \cot x + 3 + \cot^2 x,$$

après avoir vérifié qu'elle admet une intégrale de la forme $m x$, m désignant une constante.

5. Intégrer l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, en la transformant en une équation de Riccati.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
CHAPITRE I. — Nombres incommensurables. — Radicaux; exposants	1
CHAPITRE II. — Analyse combinatoire. — Formule du binome	4
CHAPITRE III. — Nombres complexes	10
CHAPITRE IV. — Séries	14
CHAPITRE V. — Fonction d'une variable réelle	21
CHAPITRE VI. — Fonctions exponentielle et logarithmique. — Nombre e .	32
CHAPITRE VII. — Séries entières	40
CHAPITRE VIII. — Développements limités	51
CHAPITRE IX. — Infinitement petits. — Formes indéterminées	55
CHAPITRE X. — Fonctions de plusieurs variables	61
CHAPITRE XI. — Différentielles	63
CHAPITRE XII. — Intégrales définie et indéfinie	69
CHAPITRE XIII. — Calcul des quadratures	79
CHAPITRE XIV. — Applications des quadratures	91
CHAPITRE XV. — Équations différentielles	105
CHAPITRE XVI. — Polynomes	122
CHAPITRE XVII. — Fractions rationnelles	130
CHAPITRE XVIII. — Propriétés générales des équations algébriques	138
CHAPITRE XIX. — Élimination	150
CHAPITRE XX. — Transformation des équations	157
CHAPITRE XXI. — Équations à coefficients réels	166
CHAPITRE XXII. — Équations à coefficients numériques	174
CHAPITRE XXIII. — Déterminants	188
CHAPITRE XXIV. — Équations et formes linéaires	198
CHAPITRE XXV. — Formes quadratiques	204
NOTE I. — Relations de recurrence	213
NOTE III. — Équation de Riccati	216

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
52755 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA   Haag, Jules
37   Cours complet de mathé-
H3   matiques spéciales
t.1

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY